EHRESMANN-SOKASÁGOK, SPRAYK ÉS VONALELEM D-SOKASÁGOK TRANSZFORMÁCIÓI

Doktori (PhD) értekezés

Pék Johanna

Debreceni Egyetem
Természettudományok Doktori Tanács
Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola
Debrecen, 2009.

Ezen értekezést a Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Tanács Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programja keretében készítettem a Debreceni Egyetem természettudományi doktori (PhD) fokozatának elnyerése céljából.

Debrecen, 2009. ....

Pék Johanna
doktorjelölt

Tanúsítom, hogy Pék Johanna doktorjelölt 2005-2008. között a fent megnevezett Doktori Iskola Differenciálgeometria és alkalmazásai programjának keretében irányításommal végezte munkáját. Az értekezésben foglalt eredményekhez a jelölt önálló alkotó tevékenységével meghatározóan hozzájárult. Az értekezést elfogadását javaslom.

Debrecen, 2009. ....

Dr. Szilasi József
témavezető

EHRESMANN-SOKASÁGOK, SPRAYK ÉS VONALELEM D-SOKASÁGOK TRANSZFORMÁCIÓI

Értekezés a doktori (Ph.D.) fokozat megszerzése érdekében
a matematika tudományágban

Írta: Pék Johanna okleveles matematika - ábrázoló geometria szakos tanár

Készült a Debreceni Egyetem
Matematika és Számítástudományok Doktori Iskolája
Differenciálgeometria és alkalmazásai alprogram keretében

Témavezető: Dr. Szilasi József egyetemi docens

A doktori szigorlati bizottság:

Elnök:	Dr.	....
Tagok:	Dr.	....
	Dr.	....

A doktori szigorlat időpontja: 2009. ....

Az értekezés bírálói:

Dr.	....
Dr.	....

A bírálóbizottság:

Elnök:	Dr.	....
Tagok:	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....
	Dr.	....

Az értekezés védésének időpontja: 2009. ....

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Ezúton szeretnék köszönetet mondani dr. Szilasi Józsefnek
lelkiismeretes témavezetői munkájáért.
Értékes tanácsai nélkül ez a disszertáció nem készülhetett volna el.

Tartalomjegyzék

Bevezetés

Annak rövid vázolásával kezdjük, hogy mi a háttere és a magyarázata a disszertáció címében – és aztán a munka során végig – alkalmazott terminológiának.

Ismeretes, hogy Hermann WEYL volt az első, aki rámutatott a kovariáns deriválás Riemann-struktúráktól független fogalmának fontosságára [44]. Ha M egy (sima) sokaság, D pedig kovariáns deriválás M-en, akkor D-t igen gyakran *konnexió*ként, vagy Weyl nyomán *affin konnexió*ként említik (bár ez utóbbi kifejezés más értelemben is használatos), az (M, D) párt pedig *affinösszefüggő sokaság*nak vagy *affin sokaság*nak mondják. Az „affinösszefüggő sokaság" elnevezés manapság már kissé régiesen hangzik és egyre ritkább. Az „affin sokaság" elnevezés ellen az szól, hogy ez kétértelmű: affin sokaságon gyakran ún. *affin struktúrá*val ellátott sokaságot értenek; egy affin struktúra kijelölése ekvivalens egy torzió- és görbületmentes kovariáns deriválás megadásával. Az ilyen értelemben vett affin sokaságoknak igen gazdag elmélete van, amelybe jó betekintést enged például a [19] dolgozat.

Mindenezek alapján úgy döntöttünk, hogy egy kovariáns deriválással ellátott sokaságra a Serge LANG [24] által használt **D-sokaság** elnevezést fogadjuk el és alkalmazzuk.

Munkánkban a helyzet lényegesen bonyolultabb, mint a D-sokaságok klasszikus elméletében. Azt, hogy miről is van szó, intuitíve nagyon világosan leírja Masao HASHIGUCHI [23] dolgozatának első paragrafusában. Szabad fordításban: amikor egy M differenciálható sokaság olyan geometriai tulajdonságával foglalkozunk, amelyek nem csupán M pontjaitól függenek, hanem a pontbeli nemzérus érintővektoroktól is, akkor M-et **vonalelem-tér**nek (space with line-elements) nevezzük, az érintővektorokat pedig *támaszelem*eknek hívjuk. Fontos megjegyezni, hogy a vonalelem, illetve vonalelemtér (espace d'elements linéaires) fogalma már Élie CARTAN Finsler-tereket tárgyaló klasszikus munkájában is központi szerepet kapott (lásd [8]).

Disszertációnk szintén az ilyen „irányfüggő objektumok" elméletéhez kíván hozzájárulni. Ezekhez a vizsgálatokhoz elengedhetetlen egy alkalmas kovariáns deriválás (vagy „konnexió") bevezetése. Ilyen kovariáns deriválást értelmezett 1949-ben VARGA Ottó [42] a klasszikus tenzorkalkulus eszközeivel, majd hasonló módon – de tőle függetlenül – M. Hashiguchi 1958-ban [23]. Átültetve Lang terminológiáját erre a szituációra, egy kovariáns deriválással ellátott vonalelem-sokaságot neveztünk **vonalelem D-sokaság**nak. Varga Ottó eljárását a koordinátás nyelvezet megőrzésével, de modernizált formában vázoljuk az Appendixben (6.3). A vonalelem D-sokaságok Varga Ottó kezdeményezte elméletét a későbbiekben több hazai geométer is továbbépítette, illetve gazdagította; elegendő ezzel kapcsolatban SOÓS Gyula [33], TAMÁSSY Lajos [40], NAGY Péter [30] és SZABÓ Zoltán [35] dolgozatára utalnunk.

A vonalelemtér Cartan által bevezetett intuitív fogalmának pontossá tétele a fibrált nyalábok elméletének keretei között vált lehetségessé. A „vonalelemtér" megfelelője ekkor egy olyan vektornyaláb, amelynek bázissokasága egy M sokaság nemzérus érintővektorainak $\mathring{T}M$ sokasága, totáltere a

$$\mathring{T}M \times_M TM := \left\{(u,v) \in \mathring{T}M \times TM \mid \mathring{\tau}(u) = \tau(v)\right\}$$

fibrált szorzat (itt $\tau\colon TM \longrightarrow M$ a természetes projekció, $\mathring{\tau} := \tau \restriction \mathring{T}M$), projekciója az

$$(u,v) \in \mathring{T}M \times_M TM \longmapsto u \in \mathring{T}M$$

leképezés. Ezt a nyalábot disszertációnkban a *visszahúzott nyaláb*ként említjük és $\mathring{\tau}^*\tau$-val jelöljük. Mivel vizsgálataink egy részében a zérusvektorok törlése nem szükséges, gyakran szerepeltetjük a

$$\tau^*\tau\colon TM \times_M TM \longrightarrow TM$$

visszahúzott nyalábot is. **Vonalelem D-sokaság**on ezek után olyan (M, D) párt értünk, ahol M egy sokaság, D pedig a $\mathring{\tau}^*\tau$ vagy a $\tau^*\tau$ vektornyalábon adott kovariáns deriválás.

Annak felismerése, hogy a Finsler-geometriában alkalmazott különböző (L. BERWALD , E. CARTAN és H. RUND által bevezetett) kovariáns deriválások egységes és indexmentes tárgyalásául alkalmas fogalmi keretül szolgálnak a (mi szóhasználatunkkal) vonalelem D-sokaságok, az 1960-as évek elején történt meg. Ennek a nézőpontnak a szisztematikus érvényesítésével elsőként talán H. AKBAR-ZADEH munkáiban találkozhatunk (lásd például [1]); ezekről jó összefoglaló áttekintést ad 2006-ban publikált monográfiája [2]. A Makoto MATSUMOTO által egy évtized alatt, 1960 és 1970 között igen alaposan kidolgozott elmélet más utat követ. Matsumoto egy speciális principális nyaláb principális konnexióiként tárgyalja az ún. Finsler-konnexiókat [27], [28]. Az alkalmazott principális nyalábhoz csatolt vektornyaláb azonban éppen a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyaláb, így a principális nyaláb megközelítés ugyanarra az eredményre vezet, mint a vektornyaláb-nézőpontú tárgyalás. Érdemes megemlíteni, hogy P. DOMBROWSKI egy Matsumoto-cikkről írt, de önálló érdekességgel bíró referátumában [17] Matsumoto eredményeit éppen a visszahúzott nyaláb nyelvére fordítja le. Áttekintve a különböző, lehetséges megközelítéseket, M. CRAMPIN egy 2000-ben publikált dolgozatában [13] ismételten és hatásosan a visszahúzott nyalábon alapuló tárgyalás mellett érvel. Ez a nézőpont és a hozzákapcsolódó fogalmi-kalkulatív apparátus részletes kifejtést nyert a [37] munkában. Disszertációnk általános elméleti hátteréül ez a munka szolgál, terminológiánkban és jelöléseiben, apróbb eltérésektől eltekintve, ezt követjük.

További kulcsfogalom dolgozatunk címében az **Ehresmann-konnexió**. Ez az elnevezés a differenciálgeometria irodalmában több, egymástól eltérő értelemben is szerepel. Disszertációnkban Ehresmann-konnexión – röviden szólva – a

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \longrightarrow TTM \longrightarrow TM \times_M TM \longrightarrow 0$$

kanonikus egzakt sorozat olyan jobb oldali hasítását értjük, amelynek simaságát csak $\mathring{T}M \times_M TM$ fölött kívánjuk meg. (A pontos definíciót illetően lásd 4.1.1-et.) Megjegyezzük, hogy ez a fogalom a [37]-ban *horizontális leképezés*ként szerepel.

Illő e helyen röviden szólnunk Charles EHRESMANN konnexióelmélethez való legfontosabb hozzájárulásáról. Ehresmann konnexióelméleti vizsgálataihoz a „nyersanyagot” Élie Cartan e témában írt dolgozatai szolgáltatták. Egy háromrészes, 1923-ban, 1924-ben és 1925-ben publikált cikksorozatában [8] Cartan bevezette egy sokaságon az affin konnexió fogalmát, és értelmezte az ehhez kapcsolódó alapvető geometriai adatokat: torzió, görbület, holonómia, ... Részletesen tárgyalta ezek alkalmazásait a klasszikus és a relativisztikus mechanikában, és megmutatta fontosságukat az általános relativitáselmélet geometriai jelentésének tisztázása szempontjából. Kifejtette speciálisan, hogy egy konnexió szerinti párhuzamos eltolás hogyan kapcsolható össze a Galilei-féle tehetetlenségi elvvel, illetve – általánosabban –, hogy miként alkalmazható egy gravitációs mezőben mozgó részecske mozgásának leírására; foglalkozott továbbá a klasszikus mezőelméletek (elektomágnesesség, hidrodinamika) affin konnexiók segítségével töténtő geometrizálásával. Későbbi munkáiban Cartan kiterjesztette vizsgálatait az „infinitézimális konnexiók” további típusaira, így a *konform*nak, *euklideszi*nek, illetve *projektív*nek mondott konnexiókra.

Cartan munkáinak nyelvezete és apparátusa a mai olvasó számára nehéz és főleg idegen; lefordítása a mai matematika nyelvére nem is olyan egyszerű feladat. Tudnunk kell, hogy az említett időszakban, az 1920-as években, még a sokaság fogalma sem kristályosodott ki teljesen, ez csupán 1936-ban Hussler WHITNEY egy nevezetes dolgozatában [45] vált történt meg. Érdemes megemlíteni ehhez kapcsolódóan, hogy 1927-ben Cartan publikált egy könyvet a Riemann-geometriáról. Ezt 1946-ban egy lényegesen kibővített második kiadás követett, amelyet 1983-ban R. Hermann kommentárjával angolra is lefordítottak. Cartan még műve második kiadásában sem vállalkozott arra, hogy kitérjen a sokaságok pontos értelmezésére; könyvének 56. oldalán ezt olvashatjuk:

„La notion generale de variété est assez difficle à définier avec precision.”

(*„A sokaság fogalma túl bonyolult ahhoz, hogy precízen definiáljuk.”*) Ma már ezt nem így látjuk: az általános topológia és a differenciálszámítás modern eszközeivel a sokaságok pontos értelmezése nem ütközik semmilyen nehézségbe.

Charles Ehresmann volt az, aki 1950-ben megalkotta a konnexió modern fogalmát, fibrált nyalábok általánosságában [18]. Amennyiben a nyaláb rendelkezik ún. struktúra-csoporttal és az Lie-csoport – és így maga a nyaláb *principális fibrált nyaláb* – akkor a konnexió olyan 1-formaként értelmezhető, amely értékeit a struktúra-csoport Lie-algebrájában veszi fel, és eleget tesz bizonyos axiómáknak. (Az Ehresmann-konnexió elnevezés az ilyen konnexió 1-formákra is használatos, lásd például [34].) Ehresmann a Cartan által bevezetett különböző konnexiókat *Cartan-konnexiók*nak nevezte (nem tévesztendőek össze a Finsler-geometriában használatos Cartan-deriválással), és megmutatta, hogyan nyerhetők ezek egy principális fibrált nyalábon adott konnexió speciális eseteiként.

Disszertációnk fő témája az affinitás- és az automorfizmus-csoport kapcsolatának tisztázása Ehresmann-konnexiók, illetve a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon adott reguláris kovariáns deriválások esetén. E vizsgálatokkal párhuzamban az Ehresmann-konnexiók általános elméletét is kiegészítjük néhány új észrevétellel, valamint néhány fontos ismert tétel új bizonyításával. A dolgozat 6 fejezetből épül fel, beleértve egy Appendixet.

Az első fejezet az alapvető megállapodások rögzítése mellett néhány, a továbbiakban felhasználásra kerülő fontos fogalomra és tényre emlékeztet, valamint egyszerű technikai jellegű észrevételeket tartalmaz. A későbbiekben jól használható értelmezését adjuk a $\tau^*\tau$ nyalábon definiált kovariáns deriválások geodetikusainak („autoparalel görbéinek”).

A második fejezetben bevezetjük és a szükséges mélységig tárgyaljuk a disszertáció szempontjából fontos speciálisabb fogalmakat és konstrukciókat. Leírjuk, hogy az érintőnyaláb kanonikus objektumai, valamint bizonyos vektormezők és szelések hogyan transzformálódnak az alapsokaság egy diffeomorfizmusa által származtatott előretolás (push-forward) alkalmával.

A harmadik fejezetben megmutatjuk, hogy egy szemispray automorfizmus- és affinitáscsoportja egybeesik (3.2.5.).

A negyedik fejezet tárgyalja a disszertációban az Ehresmann-konnexiókkal kapcsolatban felvetett problémák jelentős részét. A bevezető szakaszban Crampin és Grifone egy alapvető tételére adunk egy, az ismerteknél némileg egyszerűbb bizonyítást. Részletesen leírjuk az Ehresmann-konnexió és egy diffeomorfizmus általi visszahúzottja alapvető geometriai adatainak kapcsolatát (4.2.10. lemma). A 4.3. szakaszban két Ehresmann-konnexió különbségtenzorát tárgyaljuk. Megmutatjuk, hogy – egy kanonikus, injektív nyalábleképezéstől eltekintve – egy Ehresmann-konnexiónak és a hozzá csatolt szemisprayből származó Ehresmann-konnexiónak a különbségtenzora az Ehresmann-konnexió erős torziójának $\frac{1}{2}$-szerese. Ebből, egyebek mellett, közvetlenül következik az a fontos, ismert tétel, hogy egy Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatároz az erős torziója és a hozzá csatolt szemispray. A 4.4. szakaszban megmutatjuk, hogy egy Ehresmann-konnexió affinitás-csoportja megegyezik a hozzá csatolt szemispray affinitás-csoportjával, homogén Ehresmann-konnexió esetén pedig a csatolt Berwald-deriválás affinitás-csoportjával. A 4.5. szakasz teljes egészében új eredményeket tartalmaz. Igazoljuk, hogy egy Ehresmann-konnexió automorfizmus-csoportja részcsoportja az általa indukált Berwald-deriválás automorfizmus-csoportjának. Bebizonyítjuk, hogy az alapsokaság egy diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy Ehresmann-konnexiónak, ha automorfizmusa a hozzá csatolt szemispraynek és invariánsan hagyja az erős torziót. Eredményeinkből következik, hogy egy diffeomorfizmus pontosan akkor automorfizmusa egy Ehresmann-konnexiónak, ha affinitás és invariánsan hagyja az erős torziót. Megmutatjuk ennek alapján, hogy az a klasszikus tétel, miszerint egy sokaságon adott kovariáns deriválás automorfizmusai éppen a torziót invariánsan hagyó affinitások, kis mértékben élesíthető.

Az ötödik fejezet első szakasza a visszahúzott nyaláb kovariáns deriválásaival kapcsolatos különböző regularitási feltételeket és egy Ehresmann-konnexióhoz való csatoltságukat tárgyalja. Az 5.2. szakasz első tételében explicite leírjuk, miként konstruálható reguláris kovariáns deriválásból Ehresmann-konnexió, majd (5.2.2.) bebizonyítjuk, hogy ez az egyetlen olyan Ehresmann-konnexió, amelyre vonatkozóan az adott kovariáns deriválás horizontális-deflexiója eltűnik. Speciálisan: egy Ehresmann-konnexió által indukált Berwald-konnexióból is származik egy Ehresmann-konnexió; megmutatjuk, hogy a két Ehresmann-konnexió különbségtenzora éppen az eredeti Ehresmann-konnexió tenziója. Az 5.3. szakaszban igazoljuk, hogy a visszahúzott nyalábon értelmezett reguláris kovariáns deriválások affinitás-csoportja egybeesik az indukált Ehresmann-konnexió affinitás-csoportjával. Az 5.4. szakasz a 4.5. szakasszal állítható párhuzamba, és miként az, ez is csupa új eredményt tartalmaz. Főbb tételeink, jelentősen támaszkodva az Ehresmann-konnexiókra vonatkozó analóg tételekre, a reguláris kovariáns deriválások automorfizmusait jellemzik olyan affinitásokként, amelyek bizonyos torziókat invariánsan hagynak.

A disszertáció valamennyi fontosabb eredményét indexmentes számolással, ill. meggondolásokkal igazoljuk; a koordinátás megközelítés ezeknél a problémáknál szinte áttekinthetetlenül bonyolult lenne, ugyanakkor a tárgyalás során a fontos objektumok mindegyikének megadjuk a koordinátás előállítását is. Mindezek mellett a koordinátás nézőpontnak szenteljük a teljes Appendixet, amelyben levezetjük egy szemispray koefficienseinek, továbbá egy Ehresmann-konnexió, egy $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválás, valamint egy tetszőleges vektornyalábon adott kovariáns deriválás Christoffel-szimbólumainak transzformációs szabályait térképcsere esetén. A kifejtés során időről-időre kitérünk a bevezetett fogalmak és a nyert eredmények történeti vonatkozásaira is, ebben a tekintetben azonban nem törekedhettünk teljességre.

1. fejezet

Vektornyalábok és kovariáns deriválás

1.1. Általános megállapodások

(i) **Sokaság**on egy véges (de nem nulla) dimenziójú, Hausdorff, összefüggő, megszámlálható bázisú sima sokaságot értünk.
Az $\mathbb{R}$ valós számegyenes sokaság-struktúráját az $(\mathbb{R}, r) := (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$ egytagú atlasz definiálja.

(ii) Legyen M és N két sokaság. Az M N-be való sima leképezéseinek halmazát $C^\infty(M, N)$-nel jelöljük. Amennyiben $N = \mathbb{R}$, úgy a $C^\infty(M) := C^\infty(M, \mathbb{R})$ jelölést használjuk.
A következőkben *leképezés*en – ha mást nem mondunk – sima leképezést értünk.

(iii) Egy M sokaság összes diffeomorfizmusa csoportot alkot a leképezés-kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathrm{Diff}(M)$-mel jelöljük:

$$\mathrm{Diff}(M) := \{\varphi \in C^\infty(M, M) \mid \varphi \text{ diffeomorfizmus}\}$$

(iv) Koordinátás számolásokban követjük az Einstein-féle összegzési konvenciót.

1.2. Szelések és vektornyalábok

Legyen E és M sokaság, $\pi\colon E \longrightarrow M$ sima szürjekció. π $p \in M$ fölötti *fibrum*a $E_p := \pi^{-1}(p)$. Egy $\sigma\colon M \longrightarrow E$ leképezés ***szelés***e π-nek, ha $\pi \circ \sigma = 1_M$; ezen szelések halmazát $\mathrm{Sec}(\pi)$-vel (olykor $\mathrm{Sec}(E)$-vel) jelöljük:

$$\mathrm{Sec}(\pi) := \{\sigma \in C^\infty(M, E) \mid \pi \circ \sigma = 1_M\}.$$

Ha $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, $\sigma \in C^\infty(\mathcal{U}, E)$ és $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$, akkor σ-t $\mathcal{U}$ fölötti *lokális szelés*nek nevezzük.

Megmutatható, hogy ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ szürjektív szubmerzió, akkor bármely $p \in M$ pontnak van olyan környezete, amely fölött létezik lokális szelés – és megfordítva. Lásd [7].

Legyen k pozitív egész. Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ sima szürjekció ***k-rangú valós vektornyaláb***, ha tetszőleges pont fölötti fibruma k-dimenziós valós vektortér, és minden $p \in M$ ponthoz megadható p-nek egy $\mathcal{U}$ környezete, valamint $\mathcal{U}$ fölötti lokális szelések egy $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ sorozata úgy, hogy az

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}), \qquad \left(q, \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix}\right) \longmapsto \nu^1\sigma_1(q) + \cdots + \nu^k\sigma_k(q)$$

leképezés diffeomorfizmus. Ekkor $(\sigma_\alpha(q))_{\alpha=1}^k$ minden $q \in \mathcal{U}$ pont esetén bázisa az E_q vektortérnek. Azt mondjuk, hogy $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ *lokális bázis*a a π vektornyalábnak.

Ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ vektornyaláb, akkor $\mathrm{Sec}(\pi)$ természetes módon $C^\infty(M)$-modulus. Ennek zéruseleme az

$$o\colon M \longrightarrow E, \qquad p \longmapsto o(p) := 0_p := \{E_p \text{ zérusvektora}\}$$

zérusszelés.

1.2.1. Definíció. *Egy $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M_1$ és $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M_2$ vektornyaláb közötti* **nyalábleképezés***en olyan (F, f) leképezéspárt értünk, ahol $F \in C^\infty(E_1, E_2)$, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$, és teljesülnek a következők:*

(i) $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ (fibrumtartás).

(ii) Minden $p \in M$ esetén $F_p := F \restriction (E_1)_p\colon (E_1)_p \longrightarrow (E_2)_{f(p)}$ lineáris leképezés (linearitás).

(F, f) erős nyalábleképezés, ha $M_1 = M_2 := M$ és $f = 1_M$. Ha F diffeomorfizmus*, akkor* **nyalábizomorfizmus***ról beszélünk. Egy vektornyaláb önmagára való nyalábizomorfizmusát* nyalábautomorfizmus*nak mondjuk.*

A „nyalábleképezés” elnevezést gyakran csak az (F, f) pár első tagjára, az $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ fibrumtartó, fibrumonként lineáris leképezésre használjuk.

Megmutatható (lásd például [20]), hogy egy (F, f) nyalábleképezés pontosan akkor nyalábizomorfizmus, ha

(1) $F_p\colon (E_1)_p \longrightarrow (E_2)_{f(p)}$ minden $p \in M$ esetén lineáris izomorfizmus, és

(2) $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ diffeomorfizmus.

A következő alapvető tényt, amelynek bizonyítása megtalálható például [4]-ben, gyakran fogjuk alkalmazni.

1.2.2. Lemma (Az erős nyalábleképezések alaplemmája.). *[4] Tekintve egy $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ erős nyalábleképezést, az*

$$\mathcal{F}\colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2), \qquad \sigma \longmapsto \mathcal{F}(\sigma) := F \circ \sigma$$

leképezés $C^\infty(M)$-lineáris. Megfordítva, ha egy $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2)$ leképezés modulus-homomorfizmus, akkor van olyan $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ erős nyalábleképezés, hogy $\mathcal{F}(\sigma) := F \circ \sigma$ teljesül minden $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi_1)$ szelés esetén.

Legyen $\pi\colon E \longrightarrow M$ egy vektornyaláb, (F, f) automorfizmusa π-nek. Ekkor tetszőleges $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ szelés esetén

$$F_\#\sigma := F \circ \sigma \circ f^{-1} \tag{1.1}$$

szelése π-nek. Ezt a $F_\#\sigma$ szelést a σ szelés F *általi előretolt*jának hívjuk.

Az $F_\#\colon \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi)$ leképezés bijektív, $(F_\#)^{-1} = (F^{-1})_\#$. Teljesül továbbá, hogy tetszőleges $h \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$F_\#(h\sigma) = (h \circ f^{-1}) F_\#\sigma, \tag{1.2}$$

így $F_\#$ modulus-homomorfizmus a

$$h \in C^\infty(M) \longmapsto h \circ f^{-1} \in C^\infty(M)$$

gyűrű-izomorfizmus fölött.

Lokális leírás. Tegyük fel, hogy $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölötti lokális bázisa $\mathrm{Sec}(\pi)$-nek, és így minden $q \in \mathcal{U}$ esetén $(\sigma_\alpha(q))_{\alpha=1}^k$ bázisa E_q-nak. Ha (F, f) automorfizmusa π-nek, akkor

$$\forall q \in \mathcal{U}\colon \qquad F(\sigma_\beta(q)) \in E_q, \quad \beta \in \{1, \ldots, k\},$$

és ezért egyértelmű módon

$$F(\sigma_\beta(q)) = F_\beta^\alpha(q)\sigma_\alpha(f(q))$$

írható. Így az $(F_\beta^\alpha(q)) \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$ invertálható mátrixhoz, illetve az

$$(F_\beta^\alpha)\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R}), \quad q \longmapsto (F_\beta^\alpha(q))$$

sima leképezéshez jutunk, amelynek segítségével F lokálisan az

$$F \circ \sigma_\beta = F_\beta^\alpha(\sigma_\alpha \circ f); \quad \beta \in \{1, \ldots, k\} \tag{1.3}$$

formulákkal írható le. Ezt felhasználva

$$(F_\#\sigma_\beta)(f(q)) \overset{(1.1)}{=} F(\sigma_\beta(q)) \overset{(1.3)}{=} (F_\beta^\alpha(\sigma_\alpha \circ f))(q), \quad q \in \mathcal{U};$$

következésképpen

$$F_\#\sigma_\beta = (F_\beta^\alpha \circ f^{-1})\sigma_\alpha, \quad \beta \in \{1, \ldots, k\}. \tag{1.4}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$F_\#^{-1}\sigma_\beta = ((F^{-1})_\beta^\alpha \circ f)\sigma_\alpha. \tag{1.5}$$

1.3. Az érintőnyaláb

Legyen M n-dimenziós sokaság, és tekintsük ennek a $TM := \bigcup_{p\in M} T_pM$ érintősokaságát. Az M sokaság *érintőnyaláb*ja az a

$$\tau\colon TM \longrightarrow M$$

n-rangú vektornyaláb, ahol τ a

$$v \longmapsto \tau(v) := p, \quad \text{ha} \quad v \in T_pM$$

természetes projekció. (Szükség esetén τ helyett a bázissokaságra utaló τ_M-et írunk.)

τ széléseinek $C^\infty(M)$-modulusára az $\mathfrak{X}(M) := \mathrm{Sec}(\tau)$ jelölést használjuk és $\mathfrak{X}(M)$ elemeit *vektormezők*ként említjük.

Az $\mathbb{R}$ sokaság $(\mathbb{R}, r)$ térképéhez tartozó koordinátavektormező a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\colon \mathbb{R} \longrightarrow T\mathbb{R}$$

leképezés.

Legyen M és N sokaság, $\varphi\colon M \longrightarrow N$ sima leképezés. Ekkor φ *érintő-leképezés*e az a

$$\varphi_*\colon TM \longrightarrow TN, \qquad v \in T_pM \longmapsto \varphi_*(v) := (\varphi_*)_p(v) \in T_{\varphi(p)}N$$

leképezés, ahol tetszőleges $h \in C^\infty(N)$ esetén

$$(\varphi_*)_p(v)(h) := v(h \circ \varphi).$$

(φ_*, φ) nyalábleképezés $\tau_M\colon TM \longrightarrow M$ és $\tau_N\colon TN \longrightarrow N$ között. Ha speciálisan $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor (φ_*, φ) nyalábautomorfizmusa τ-nak, $(\varphi_{**}, \varphi_*)$ pedig a $\tau_{TM}\colon TTM \longrightarrow TM$ vektornyalábnak.

Az érintőleképezés definíciójából következik, hogy

$$\tau \circ \varphi_* = \varphi \circ \tau, \tag{1.6}$$

$$\tau_{TM} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}. \tag{1.7}$$

Ha M és N két sokaság, $\varphi\colon M \longrightarrow N$ pedig sima leképezés, akkor azt mondjuk, hogy egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ és egy $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormező *φ-megfelelő*, ha $\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi$. Ilyenkor azt írjuk, hogy $X \underset{\varphi}{\sim} Y$. Ismert, hogy ez a reláció akkor és csak akkor teljesül, ha bármely $g \in C^\infty(N)$ függvény esetén

$$X(g \circ \varphi) = (Yg) \circ \varphi. \tag{1.8}$$

Ennek alkalmazásával egyszerűen adódik, hogy ha $X_1 \underset{\varphi}{\sim} Y_1$ és $X_2 \underset{\varphi}{\sim} Y_2$,

$$[X_1, X_2] \underset{\varphi}{\sim} [Y_1, Y_2], \tag{1.9}$$

tehát a φ-megfelelés során a Lie-zárójel megőrződik.

Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező és egy TM-en értelmezett $\binom{1}{1}$-típusú A tenzor $[\xi, A]$ ***Frölicher-Nijenhuis zárójel***en az

$$[\xi, A]\eta := [\xi, A\eta] - A[\xi, \eta], \qquad \eta \in \mathfrak{X}(TM) \tag{1.10}$$

előírással definiált $\binom{1}{1}$-tenzort értjük.

Megállapodunk abban, hogy *koordinátás számolások*hoz az M sokaságon kijelölünk egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és TM-en az általa *indukált*

$$\left(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n\right); \qquad x^i := u^i \circ \tau, \; y^i(v) := v(u^i); \qquad v \in TM \tag{1.11}$$

*térkép*et tekintjük.

Példa. Legyen $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés. Ha $\mathcal{U} \cap \varphi(\mathcal{U}) \neq \emptyset$, akkor φ_* koordinátakifejezése

$$\varphi_* \underset{(\mathcal{U})}{=} y^j \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} \circ \tau\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \varphi \circ \tau\right). \tag{1.12}$$

φ_{**} hatása a

(1.13)
$$(\varphi_{**})_v \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_v = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} \circ \tau\right)(v) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi_*(v)} + y^k(v) \left(\frac{\partial^2 \varphi^i}{\partial u^j \partial u^k} \circ \tau\right)(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_*(v)};$$

$$(\varphi_{**})_v \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_v = \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial u^j} \circ \tau\right)(v) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{\varphi_*(v)}, \tag{1.14}$$

formulák segítségével írható le, ahol $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U})$.

1.4. Görbék

Egy M sokaságbeli *görbé*n egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ sima leképezést értünk, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy (rendszerint) nyílt intervallum.

A γ görbe *sebesség-* illetve a *gyorsulásvektormező*je

$$\dot{\gamma} := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} : I \longrightarrow TM, \tag{1.15}$$

illetve

$$\ddot{\gamma} := \dot{\dot{\gamma}} := (\dot{\gamma})_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} : I \longrightarrow TTM. \tag{1.16}$$

Egy görbét *regulárisnak* mondunk, ha minden $t \in I$ esetén $\dot{\gamma}(t) \neq 0$.

Tekintve egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ görbét, $\dot{\gamma}$ és $\ddot{\gamma}$ között fennáll a

$$\tau_* \circ \ddot{\gamma} = \dot{\gamma} \tag{1.17}$$

reláció.

Valóban, felhasználva az (1.15)-öt és (1.16)-ot (valamint a láncszabályt),

$$\tau_* \circ \ddot{\gamma} = \tau_* \circ \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\tau \circ \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} =$$
$$= (\tau \circ \dot{\gamma})_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \dot{\gamma}.$$

1.4.1. Lemma. *Ha $\gamma\colon I \longrightarrow M$ egy görbe és $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor*

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_* \circ \dot{\gamma}, \tag{1.18}$$

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma}. \tag{1.19}$$

Bizonyítás. A definíció és a láncszabály alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = (\varphi \circ \gamma)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \varphi_* \circ \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \varphi_* \circ \dot{\gamma},$$

illetve

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = (\varphi_* \circ \dot{\gamma})_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \varphi_{**} \circ (\dot{\gamma})_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma}.$$

□

1.5. A $\tau^*\tau$ visszahúzott nyaláb

A $\tau\colon TM \longrightarrow M$ érintőnyaláb τ fölötti *visszahúzott*ja (pull-backje) az a

$$\tau^*\tau\colon TM \times_M TM \longrightarrow TM$$

TM fölötti $n = \dim(M)$-rangú vektornyaláb, amelynek totáltere

$$TM \times_M TM = \{(v, w) \in TM \times TM \mid \tau(v) = \tau(w)\},$$

egy $v \in TM$ pont fölötti fibruma a

$$\{v\} \times T_{\tau(v)}M \cong T_{\tau(v)}M$$

vektortér; a projekció a $\mathrm{pr}_1\colon TM \times TM \longrightarrow TM$, $(v,w) \longmapsto v$ természetes projekció $TM \times_M TM$-re való leszűkítése.

Diagramon:

$$\begin{array}{ccc} TM \times_M TM & \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} & TM \\ {\scriptstyle \tau^*\tau}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \tau} \\ TM & \xrightarrow[\tau]{} & M \end{array}$$

A $\tau^*\tau$ visszahúzott nyaláb széleseinek $C^\infty(TM)$-modulusára – a korábbiaknak megfelelően – az $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ jelölést használjuk.

Közvetlenül látható, hogy

$$\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \exists \underline{X} \in C^\infty(TM,TM)\colon & \tau \circ \underline{X} = \tau \quad \text{és} \\ \forall v \in TM\colon & \widetilde{X}(v) = (v, \underline{X}(v)) \,. \end{cases}$$

Azt mondjuk, hogy $\underline{X}$ az $\widetilde{X}$ szelés *fő része*. $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ elemei természetes módon azonosíthatók a fő részükkel, ezzel az azonosítási lehetőséggel esetenként külön kommentár nélkül élünk. $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ elemeire a τ*-menti vektormező* elnevezést is használjuk.

Ha $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor

$$\widehat{X}\colon v \in TM \longmapsto \widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v)) \in TM \times_M TM$$

τ-menti vektormező, amelyet *bázikus vektormező*-nek mondunk.

A bázikus vektormezők lokálisan generálják a szelések modulusát, ezt a későbbiekben a tenzoriális relációk igazolásánál gyakran alkalmazni fogjuk.

Speciálisan, ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, akkor a

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \circ \tau \longleftrightarrow \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\colon v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longmapsto \left(v, \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)} \right), \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

szelések lokális bázisát alkotják $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$-nak.

A $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábnak egy kitüntetett szelése a

$$\delta\colon v \in TM \longmapsto \delta(v) := (v,v) \in TM \times_M TM$$

leképezés, ezt *kanonikus szelés*nek hívjuk.

1.6. Kovariáns deriválás vektornyalábon

Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ *vektornyalábon adott kovariáns deriválás*on olyan

$$D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi),$$
$$(X,\sigma) \longmapsto D(X,\sigma) = D_X\sigma = D\sigma(X)$$

leképezést értünk, amely első változójában *tenzoriális* és a második változójában *deriváció*. Ez utóbbi azt jelenti, hogy

$$D_X(f\sigma) = (Xf)\sigma + fD_X\sigma,$$

minden $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén.

Ha $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en, és $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ lokális bázisa $\mathrm{Sec}(\pi)$-nek $\mathcal{U}$ fölött, akkor a

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\sigma_\beta = \Gamma^\alpha_{i\beta}\sigma_\alpha; \qquad i \in \{1, \dots, n\}, \ \beta \in \{1, \dots, k\} \tag{1.20}$$

relációk által definiált

$$\Gamma^\alpha_{i\beta} \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sima függvényeket a D kovariáns deriválás adott térképre és lokális bázisra vonatkozó *Christoffel-szimbólum*ainak hívjuk.

A következő észrevétel jól ismert és egyszerűen ellenőrizhető.

1.6.1. Lemma és definíció. *Tegyük fel, hogy (F, f) automorfizmusa π-nek. Ha*

$$(F^\# D)_X\sigma := F_\#^{-1} D_{f_\# X} F_\#\sigma; \qquad X \in \mathfrak{X}(M), \ \sigma \in \mathrm{Sec}(\pi), \tag{1.21}$$

akkor $F^\# D$ is kovariáns deriválás a π vektornyalábon, amelyet D F általi vissza-húzott*jának (pull-backjének) hívunk.*
Amennyiben $F^\# D = D$, úgy azt mondjuk, hogy F automorfizmusa *D-nek.*
D összes automorfizmusa csoportot alkot a kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathrm{Aut}(D)$*-vel jelöljük.*

Lokális leírás. Miként a Christoffel-szimbólumok bevezetésénél, jelöljünk ki M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és legyen $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ $\mathcal{U}$ fölötti lokális bázisa $\mathrm{Sec}(\pi)$-nek. A lokális bázis tagjainak F általi előretoltjait (1.4) adja, míg a $\frac{\partial}{\partial u^i}$ koordinátavektormezők f általi előretoltjai

$$f_\# \frac{\partial}{\partial u^i} = \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i} \circ f^{-1}\right) \frac{\partial}{\partial u^j}, \qquad f^j := u^j \circ f. \tag{1.22}$$

Ha $D = F^\# \tilde{D}$, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ és $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ esetén

$$D_X\sigma = (F^\# \tilde{D})_X\sigma := (F_\#)^{-1} \tilde{D}_{f_\# X} F_\#\sigma,$$

ahonnan

$$F_\# D_X\sigma = \tilde{D}_{f_\# X} F_\#\sigma. \tag{1.23}$$

Legyen – speciálisan – $X := \frac{\partial}{\partial u^i}$ $(i \in \{1,\dots,n\})$, $\sigma := \sigma_\alpha$ $(\alpha \in \{1,\dots,k\})$. Ekkor egyrészt

$$F_\# D_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \sigma_\alpha \overset{(1.20)}{=} F_\# \left(\Gamma^\gamma_{i\alpha}\sigma_\gamma\right) \overset{(1.2)}{=} \left(\Gamma^\gamma_{i\alpha} \circ f^{-1}\right) F_\# \sigma_\gamma \overset{(1.4)}{=}$$
$$= \left(\Gamma^\gamma_{i\alpha} \circ f^{-1}\right)\left(F^\lambda_\gamma \circ f^{-1}\right)\sigma_\lambda = \left(\left(\Gamma^\gamma_{i\alpha}F^\lambda_\gamma\right)\circ f^{-1}\right)\sigma_\lambda.$$

Másrészt:

$$\tilde{D}_{f_\# \frac{\partial}{\partial u^i}} F_\# \sigma_\alpha \overset{(1.4),(1.22)}{=} \tilde{D}_{\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}\circ f^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(F^\beta_\alpha \circ f^{-1}\right)\sigma_\beta =$$
$$= \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}\circ f^{-1}\right)\left(F^\beta_\alpha \circ f^{-1}\right)\tilde{D}_{\frac{\partial}{\partial u^j}}\sigma_\beta + \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}\circ f^{-1}\right)\frac{\partial\left(F^\beta_\alpha \circ f^{-1}\right)}{\partial u^j}\sigma_\beta =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\beta_\alpha\right)\circ f^{-1}\right)\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}\sigma_\lambda + \left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}\circ f^{-1}\right)\frac{\partial\left(F^\lambda_\alpha \circ f^{-1}\right)}{\partial u^j}\sigma_\lambda =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\beta_\alpha\left(\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}\circ f\right) + \frac{\partial(u^j\circ f)}{\partial u^i}\left(\frac{\partial\left(F^\lambda_\alpha \circ f^{-1}\right)}{\partial u^j}\circ f\right)\right)\circ f^{-1}\right)\sigma_\lambda =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\beta_\alpha\left(\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}\circ f\right) + \frac{\partial\left(F^\lambda_\alpha \circ f^{-1}\circ f\right)}{\partial u^i}\right)\circ f^{-1}\right)\sigma_\lambda =$$
$$= \left(\left(\frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\beta_\alpha\left(\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}\circ f\right) + \frac{\partial F^\lambda_\alpha}{\partial u^i}\right)\circ f^{-1}\right)\sigma_\lambda,$$

ahol $\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}$ függvények $\tilde{D}$ Christoffel-szimbólumai az alapulvett térképre és lokális bázisra vonatkozóan. (1.23) értelmében a levezetett relációk bal oldalai egyenlőek, így a jobb oldalak is azok.
Ez azt adja, hogy *$\tilde{D}$ és $D = F^\# \tilde{D}$ Christoffel-szimbólumait a*

$$\Gamma^\gamma_{i\alpha}F^\lambda_\gamma = \frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\beta_\alpha(\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta}\circ f) + \frac{\partial F^\lambda_\alpha}{\partial u^i} \tag{1.24}$$

$(\alpha,\lambda \in \{1,\dots,k\},\ i \in \{1,\dots,n\})$ *reláció köti össze*, speciálisan *F akkor és csak akkor automorfizmusa a D kovariáns deriválásnak, ha az F-et lokálisan reprezentáló*

$$(F^\alpha_\beta) \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

mátrixértékű leképezés, valamint az M-en indukált $f\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus komponensfüggvényei eleget tesznek a

$$\Gamma^\lambda_{i\beta}F^\alpha_\lambda = \frac{\partial f^j}{\partial u^i}F^\lambda_\beta(\Gamma^\alpha_{j\lambda}\circ f) + \frac{\partial F^\alpha_\beta}{\partial u^i} \tag{1.25}$$

$(\alpha,\beta \in \{1,\dots,k\},\ i \in \{1,\dots,n\})$ *parciális differenciálegyenlet-rendszernek.*

Tekintsünk továbbra is egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ vektornyalábot. Ha $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $c\colon I \longrightarrow M$ sima görbe, akkor egy $s\colon I \longrightarrow E$ sima leképezést

*c-menti szelés*nek mondunk, ha $\pi \circ s = c$, és így minden $t \in I$-re $s(t) \in E_{c(t)}$. A c-menti szelések kézenfekvő módon $C^\infty(I)$-modulust alkotnak, erre a $\mathrm{Sec}_c(\pi)$ jelölést használjuk.

1.6.2. Lemma és definíció. *Ha D kovariáns deriválás a π vektornyalábon, akkor létezik egy és csak egy olyan*

$$D_c\colon \mathrm{Sec}_c(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}_c(\pi), \quad s \longmapsto D_c s$$

$\mathbb{R}$-lineáris leképezés, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

(i) Bármely $f \in C^\infty(I)$ és $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ esetén

$$D_c f s = f' s + f D_c s \tag{1.26}$$

ahol f' az f függvény szokásos deriváltja.

(ii) Ha $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ és $s := \sigma \circ c \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$, akkor bármely $t \in I$-re

$$(D_c s)(t) = D_{\dot{c}(t)}\sigma. \tag{1.27}$$

A D_c leképezést a D-hez csatolt **c-menti kovariáns deriválás***nak nevezzük; tetszőleges $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ esetén a $D_c s$ c-menti szelést az s* c-menti kovariáns deriváltj*ának hívjuk.*
Ha $D_c s = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az s szelés párhuzamos c mentén *(a D kovariáns deriváltra vonatkozóan).*

A lemma így megfogalmazva megtalálható a Greub–Halperin–Vanstone monográfia [20] 2. kötetében (Chapter VII, Problem 11). A bizonyítása lényegében úgy történhet, mint a sokaságokon adott görbementi kovariáns deriválásra vonatkozó megfelelő állításé, lásd például [36].

1.6.3. Definíció. *A $\tau^*\tau$ nyalábon adott $D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ kovariáns deriválás* **geodetikus***án olyan $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbét értünk, amelyre*

$$D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma) = 0 \tag{1.28}$$

teljesül, ahol δ a kanonikus szelés.

(1.27) alapján tetszőleges $t \in I$-re

$$D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma)(t) = D_{\ddot\gamma(t)}\delta, \tag{1.29}$$

így γ pontosan akkor geodetikus, ha eleget tesz a

$$D_{\ddot\gamma(t)}\delta = 0, \qquad t \in I \tag{1.30}$$

feltételnek.

2. fejezet

Struktúrák az érintőnyalábon

2.1. Liftek

Egy $f \in C^\infty(M)$ függvény TM-be való *vertikális lift*je az

$$f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau \in C^\infty(TM);$$

*teljes lift*je az

$$f^{\mathsf{c}} \colon TM \longrightarrow \mathbb{R}, \quad v \longmapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) = (df)_{\tau(v)}(v)$$

függvény.

Lokális leírás. Kijelölve az M sokaságon egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és tekintve TM-en az általa indukált térképet (lásd (1.11)), f^{c} koordinátakifejezése

$$f^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} y^i \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \circ \tau \right) = (u^i)^{\mathsf{c}} \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \right)^{\mathsf{v}}.$$

Speciálisan:

$$x^i := u^i \circ \tau = (u^i)^{\mathsf{v}}, \quad y^i := (u^i)^{\mathsf{c}}.$$

Közvetlenül adódik a definícióból, hogy tetszőleges $f, h \in C^\infty(M)$ függvények esetén

$$(fh)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} h^{\mathsf{v}} + f^{\mathsf{v}} h^{\mathsf{c}}. \tag{2.1}$$

2.1.1. Lemma. *Ha egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőre minden $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén $\xi f^{\mathsf{v}} = \xi f^{\mathsf{c}} = 0$ teljesül, akkor $\xi = 0$, következésképpen TM bármely vektormezőjét egyértelműen meghatározza az M-beli függvények vertikális- és teljes liftjein való hatása.*

Bizonyítás. Tekintsük az $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térkép által indukált (1.11) térképet TM-en, és legyen $\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^{n+i}\frac{\partial}{\partial y^i}$. Válasszuk f függvényként az u^j függvényeket ($j \in \{1,\dots,n\}$). Ekkor a feltételek szerint

$$0 = \xi(u^j)^{\mathsf{v}} = \xi(x^j) = \xi^j, \quad \text{és} \quad 0 = \xi(u^j)^{\mathsf{c}} = \xi(y^j) = \xi^{n+j}$$

teljesül, amiből következik, hogy $\xi = 0$. □

A fenti lemmánál erősebb észrevétel is igaz: K. Yano és A. Ledger megmutatta (lásd [46]), hogy *TM vektormezőit már az M-beli függvények teljes liftjein való hatásuk meghatározza.* A disszertációban azonban csak a 2.1.1 lemmára fogunk támaszkodni.

Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt *vertikális*nak nevezünk, ha $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$. Az (1.9) relációból következően vertikális vektormezők Lie-zárójele is vertikális, emiatt a vertikális vektormezők Lie-részalgebráját alkotják az $\mathfrak{X}(TM)$-nek, ezt $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$-mel jelöljük.

Lokális leírás. Az (1.11)-ben leírt indukált térképet használva, a vertikális vektormezők koordinátaelőállítása

$$\xi \underset{(\mathcal{U})}{=} \xi^{n+i}\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \xi^{n+i} \in C^\infty(\tau^{-1}(\mathcal{U})).$$

Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan X^{v} vertikális vektormező, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}. \tag{2.2}$$

Ezt a vektormezőt az X vektormező *vertikális lift*jének nevezzük.

Lokális leírás.

$$X^{\mathsf{v}} \underset{(\mathcal{U})}{=} (X^i)^{\mathsf{v}}\frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \text{ha} \quad X \restriction \mathcal{U} = X^i\frac{\partial}{\partial u^i}; \tag{2.3}$$

speciálisan

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)^{\mathsf{v}} = \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{2.4}$$

Az

$$\ell^{\mathsf{v}} \colon X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^{\mathsf{v}}(X) := X^{\mathsf{v}} \in \mathfrak{X}(TM). \tag{2.5}$$

leképezést *vertikális liftelés*nek hívjuk.

Könnyen látható, hogy tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ és $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$(fX)^{\mathsf{v}} = f^{\mathsf{v}} X^{\mathsf{v}}. \tag{2.6}$$

Felhasználva a 2.1.1. lemmát, létezik egy és csak egy olyan $C \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, hogy bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$Cf^{\mathsf{v}} = 0 \quad \text{és} \quad Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}. \tag{2.7}$$

Az első feltétel miatt C vertikális, ezt a speciális vektormezőt a TM-en adott *Liouville-vektormező*nek nevezzük.

Lokális leírás.

$$C \underset{(\mathcal{U})}{=} y^i \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{2.8}$$

Szintén 2.1.1.-et használva, minden $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, amelyre tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}} \qquad \text{és} \tag{2.9}$$

$$X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}} \tag{2.10}$$

teljesül. Ezt a vektormezőt az X *vektormező teljes lift*jének hívjuk.

Lokális leírás. Ha $X \underset{(\mathcal{U})}{=} X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, akkor

(2.11)

$$X^{\mathsf{c}} \underset{(\mathcal{U})}{=} (X^i \circ \tau) \frac{\partial}{\partial x^i} + y^j \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} \circ \tau \right) \frac{\partial}{\partial y^i} = (X^i)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial x^i} + (u^j)^{\mathsf{c}} \left(\frac{\partial X^i}{\partial u^j} \right)^{\mathsf{v}} \frac{\partial}{\partial y^i};$$

speciálisan

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \right)^{\mathsf{c}} = \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2.12}$$

Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X. \tag{2.13}$$

Valóban, tekintve egy $f \in C^\infty(M)$ függvényt és felhasználva (2.10)-et,

$$X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X \overset{(1.8)}{\iff} X^{\mathsf{c}}(f \circ \tau) = (Xf) \circ \tau \iff X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}.$$

Szintén egyszerűen adódik, hogy

$$(fX)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{v}} X^{\mathsf{c}} + f^{\mathsf{c}} X^{\mathsf{v}}; \qquad X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M). \tag{2.14}$$

2.1.2. Lemma. *Ha* $\varphi \in C^\infty(M, M)$*, akkor*

$$(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*, \quad f \in C^\infty(M). \tag{2.15}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $v \in TM$ vektorra

$$(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}}(v) := v(f \circ \varphi) = \varphi_*(v)(f) = f^{\mathsf{c}}(\varphi_*(v)) = (f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*)(v),$$

ami az észrevétel helyességét jelenti. □

2.1.3. Lemma. *Legyen* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*, és tegyük fel, hogy* $\varphi\colon M \longrightarrow M$ *sima leképezés. Ha* $X \underset{\varphi}{\sim} Y$*, akkor* $X^{\mathsf{c}} \underset{\varphi_*}{\sim} Y^{\mathsf{c}}$*.*

Bizonyítás. Az (1.8) reláció és a 2.1.1. lemma miatt elegendő megmutatni, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ esetén

$$X^{\mathsf{c}}(f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*) = (Y^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}}) \circ \varphi_* \qquad \text{és} \qquad X^{\mathsf{c}}(f^{\mathsf{v}} \circ \varphi_*) = (Y^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}}) \circ \varphi_*.$$

Valóban, (2.15)-öt alkalmazva

$$\begin{aligned} X^{\mathsf{c}}(f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*) &= X^{\mathsf{c}}(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = (X(f \circ \varphi))^{\mathsf{c}} = \\ &= (Yf \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = (Yf)^{\mathsf{c}} \circ \varphi_* = (Y^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}}) \circ \varphi_*, \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned} X^{\mathsf{c}}(f^{\mathsf{v}} \circ \varphi_*) = &X^{\mathsf{c}}(f \circ \tau \circ \varphi_*) = X^{\mathsf{c}}((f \circ \varphi)^{\mathsf{v}}) = (X(f \circ \varphi))^{\mathsf{v}} = \\ &= ((Yf) \circ \varphi)^{\mathsf{v}} = (Yf) \circ \varphi \circ \tau = (Yf) \circ \tau \circ \varphi_* = \\ &= (Yf)^{\mathsf{v}} \circ \varphi_* = (Y^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}}) \circ \varphi_*. \end{aligned}$$

□

A későbbiekben szereplő állítások bizonyításához felhasználjuk az alábbi jól ismert relációkat, ahol $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.

$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}] = 0, \tag{2.16}$$

$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{c}}] = [X, Y]^{\mathsf{v}}, \tag{2.17}$$

$$[X^{\mathsf{c}}, Y^{\mathsf{c}}] = [X, Y]^{\mathsf{c}}, \tag{2.18}$$

$$[C, X^{\mathsf{v}}] = -X^{\mathsf{v}}, \tag{2.19}$$

$$[C, X^{\mathsf{c}}] = 0. \tag{2.20}$$

Ha az X_i $(i \in \{1, \dots, n\})$ vektormezők lokálisan (egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött) generálják az $\mathfrak{X}(M)$ modulust, akkor az $((X_i^{\mathsf{v}})_{i=1}^n, (X_i^{\mathsf{c}})_{i=1}^n)$ vektormezők lokálisan generálják az $\mathfrak{X}(TM)$ modulust.

Ez az észrevétel lehetővé teszi, hogy TM-en megfogalmazott tenzoriális állítások igazolásánál tetszőleges TM-beli vektormezők helyett $\mathfrak{X}(M)$ egy (lokális) bázisa tagjainak vertikális- és teljes liftjeit szerepeltessük.

2.2. A kanonikus egzakt sorozat

Tekintsük a $\tau\colon TM \longrightarrow M$ és a $\tau_{TM}\colon TTM \longrightarrow TM$ érintőnyalábot, valamint a $\tau^*\tau\colon TM \times_M TM \longrightarrow TM$ visszahúzott nyalábot.

1. Értelmezzünk egy
$$\mathbf{i}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$$
leképezést a következőképpen: ha $(v, w) \in TM \times_M TM$ és $c(t) := v + tw$ $(t \in \mathbb{R})$, akkor
$$\mathbf{i}(v, w) := \dot{c}(0).$$

2. Legyen
$$\begin{aligned} \mathbf{j} := (\tau_{TM}, \tau_*) : TTM &\longrightarrow TM \times_M TM, \\ z \in T_vTM &\longmapsto (v, (\tau_*)_v(z)). \end{aligned}$$

Az $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ leképezést *kanonikus injekció*nak, illetve *kanonikus szürjekció*nak nevezzük.

Lokális leírás. Az $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép által indukált térképet használva (lásd (1.11)), ha $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U}), w \in T_{\tau(v)}M$ és $z \in T_vTM$, akkor
$$\mathbf{i}(v, w) = y^i(w) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v, \qquad \mathbf{j}(z) = \left(v, z^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)}\right).$$

Közvetlenül adódik, hogy $\mathbf{i}$ erős nyalábleképezés $\tau^*\tau$ és τ_{TM} között, $\mathbf{j}$ pedig τ_{TM} és $\tau^*\tau$ között.

A
$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0$$
sorozat egzakt: $\mathbf{i}$ injektív, $\mathbf{j}$ szürjektív és $\mathrm{Im}(\mathbf{i}) = \mathrm{Ker}(\mathbf{j})$.
Az utóbbi relációból következően

$$\mathbf{j} \circ \mathbf{i} = 0. \tag{2.21}$$

A TTM *vertikális résznyaláb*ja a
$$VTM := \mathrm{Ker}(\tau_*) = \mathrm{Im}(\mathbf{i}) \subset TTM$$
kanonikus résznyaláb.

Az erős nyalábleképezések alaplemmája (1.2.2) értelmében $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ modulus-homomorfizmusokat indukál a megfelelő szelések modulusai között az
$$\begin{aligned} \widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) &\longmapsto \mathbf{i}\widetilde{X} := \mathbf{i} \circ \widetilde{X} \in \mathfrak{X}(TM) \qquad \text{és} \\ \xi \in \mathfrak{X}(TM) &\longmapsto \mathbf{j}\xi := \mathbf{j} \circ \xi \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \end{aligned}$$

előírás szerint; ezeket a homomorfizmusokat változatlanul $\mathbf{i}$-vel és $\mathbf{j}$-vel jelöljük. Így $C^\infty(TM)$-homomorfizmusok egy

$$0 \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \xrightarrow{\mathbf{i}} \mathfrak{X}(TM) \xrightarrow{\mathbf{j}} \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozatához jutunk. Ekkor $\mathfrak{X}^\mathsf{v}(TM) = \mathbf{i}(\mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, speciálisan tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező vertikális liftjét, illetve a Liouville-vektormezőt (lásd (2.2), illetve (2.7)) megkaphatjuk az alábbi módon:

$$X^\mathsf{v} = \mathbf{i}\widehat{X}, \tag{2.22}$$

$$C = \mathbf{i}\delta. \tag{2.23}$$

Közvetlenül adódik, hogy bármely $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre teljesülnek a

$$\mathbf{j}X^\mathsf{c} = \widehat{X} \tag{2.24}$$

és a

$$\mathbf{j}X^\mathsf{v} = 0 \tag{2.25}$$

relációk.

A

$$\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j} \in \mathrm{End}\,(\mathfrak{X}(TM)) \tag{2.26}$$

leképezést *vertikális endomorfizmus*nak hívjuk.

(2.22) és (2.24) alapján kapjuk, hogy

$$\mathbf{J}X^\mathsf{c} = X^\mathsf{v}, \qquad \text{ha } X \in \mathfrak{X}(M). \tag{2.27}$$

Egyszerű számolással ellenőrizhetők az (1.10)-ben bevezetett Frölicher-Nijenhuis zárójellel kapcsolatban az

$$[X^\mathsf{v}, \mathbf{J}] = [X^\mathsf{c}, \mathbf{J}] = 0, \qquad X \in \mathfrak{X}(M), \tag{2.28}$$

$$[C, \mathbf{J}] = -\mathbf{J} \tag{2.29}$$

formulák.

2.2.1. Lemma. *Tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ sima görbe esetén*

$$\mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \delta \circ \dot{\gamma}. \tag{2.30}$$

Bizonyítás. Felhasználva (1.17)-et, tetszőleges $t \in I$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\ddot{\gamma}(t)) = (\dot{\gamma}(t), \tau_*(\ddot{\gamma}(t))) = (\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)) = \\ = \delta(\dot{\gamma}(t)) = \delta \circ \dot{\gamma}(t),\end{aligned}$$

ami igazolja az észrevételt. □

Lokális leírás. Az (1.11)-beli térképet használva,

$$\mathbf{i}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{2.31}$$

$$\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x^i} = \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \quad \text{és} \quad \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y^i} = 0, \tag{2.32}$$

továbbá

$$\mathbf{J}\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \text{és} \quad \mathbf{J}\frac{\partial}{\partial y^i} = 0. \tag{2.33}$$

2.3. Szelések és kanonikus objektumok transzformációi

Legyen $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. Az 1.2. szakaszban leírtaknak megfelelően egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező φ_* *általi előretoltját* $\varphi_\# X$-vel jelöljük:

$$\varphi_\# X := \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1}.$$

Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező φ_{**} *általi előretoltjá*ra (az előzőekkel összhangban) az $(\varphi_*)_\#\xi$ jelölést használjuk. Tehát

$$(\varphi_*)_\#\xi = \varphi_{**} \circ \xi \circ \varphi_*^{-1};$$

diagramon:

$$\begin{array}{ccc} TTM & \xrightarrow{\varphi_{**}} & TTM \\ \uparrow \xi & & \uparrow (\varphi_*)_\#\xi \\ TM & \xrightarrow[\varphi_*]{} & TM \end{array} \quad .$$

(1.9)-ből következően az előretolt és a Lie-zárójel képzése felcserélhető:

$$\varphi_\#[X,Y] = [\varphi_\# X, \varphi_\# Y]; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M); \tag{2.34}$$

$$(\varphi_*)_\#[\xi,\eta] = [(\varphi_*)_\#\xi, (\varphi_*)_\#\eta]; \qquad \xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM). \tag{2.35}$$

A 2.1.3. lemma közvetlen következménye, hogy amennyiben $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ és $X \in \mathfrak{X}(M)$, úgy

$$(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}. \tag{2.36}$$

Szintén egyszerűen ellenőrizhető, hogy érvényes a következő

2.3.1. Lemma. *Ha* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ *és*

$$\varphi_* \times \varphi_* \colon \quad (u,v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\varphi_*(u), \varphi_*(v)) \in TM \times_M TM,$$

akkor $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ *automorfizmusa a* $\tau^*\tau$ *visszahúzott nyalábnak.*

Egy $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ szelés $\varphi_* \times \varphi_*$ *általi előretoltját* $\varphi_\# \widetilde{X}$-mal jelölve, (1.1)-nek megfelelően

$$\varphi_\# \widetilde{X} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1}. \tag{2.37}$$

2.3.2. Lemma. *Megtartva az előző lemma jelöléseit, tetszőleges* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *esetén*

$$\varphi_\# \widehat{X} = \widehat{\varphi_\# X}. \tag{2.38}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}\varphi_\# \widehat{X} &:= (\varphi_* \times \varphi_*) \circ (1_{TM}, X \circ \tau) \circ \varphi_*^{-1} = (\varphi_*, \varphi_* \circ X \circ \tau) \circ \varphi_*^{-1} = \\ &= \left(1_{TM}, \varphi_* \circ X \circ \tau \circ \varphi_*^{-1}\right) = \left(1_{TM}, \varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1} \circ \tau\right) = \\ &= (1_{TM}, \varphi_\# X \circ \tau) =: \widehat{\varphi_\# X}.\end{aligned}$$

□

Hasonlóan egyszerű számolás mutatja, hogy

$$\varphi_\# \delta = \delta. \tag{2.39}$$

2.3.3. Lemma. *Tetszőleges* $\varphi \colon M \longrightarrow M$ *sima leképezés esetén érvényesek a következők:*

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)\,; \tag{2.40}$$

$$(\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**}; \tag{2.41}$$

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \varphi_{**}. \tag{2.42}$$

Bizonyítás. Legyen $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en és tekintsük az általa indukált (1.11) térképet TM-en. Felhasználva φ_{**} koordinátakifejezését ((1.13) és (1.14)), tetszőleges $(v,w) \in TM \times_M TM$ párokra:

$$\begin{aligned}\varphi_{**} \circ \mathbf{i}(v,w) =& \varphi_{**}\left(y^i(w)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v\right) = y^i(w)\left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i} \circ \tau\right)(v)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\varphi_*(v)};\\ \mathbf{i}\left(\varphi_*(v), \varphi_*(w)\right) =& y^j\left(\varphi_*(w)\right)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\varphi_*(v)} = \varphi_*(w)(u^j)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\varphi_*(v)} = \\ &= y^i(w)\frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}(\tau(v))\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{\varphi_*(v)},\end{aligned}$$

mivel $\varphi_*(w)(u^j) := w(u^j \circ \varphi) = w(\varphi^j) = w(u^i)\frac{\partial \varphi^j}{\partial u^i}(\tau(v))$. Ezzel beláttuk (2.40) helyességét.
Ha $z := z^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v + z^{n+i}\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v \in T_vTM$, ahol $v \in T_pM$, akkor (2.32)-t is figyelembe véve

$$\begin{aligned}\mathbf{j}\circ\varphi_{**}(z) = \mathbf{j}\left(z^j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}}(v)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi_*(v)}\right) =\\ = \left(\varphi_*(v), z^j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}}(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(\varphi_*(v))}\right) =\\ = \left(\varphi_*(v), z^j\left(\frac{\partial\varphi^i}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{v}}(v)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\varphi(p)}\right) =\\ = (\varphi_*(v), \varphi_*(\tau_*(z))) = (\varphi_*\circ\tau_{TM})\times(\varphi_*\circ\tau_*)(z) = (\varphi_*\times\varphi_*)\circ\mathbf{j}(z),\end{aligned}$$

így (2.41) is teljesül.
Végül a (2.42) reláció a (2.40) és (2.41) alapján

$$\begin{aligned}\varphi_{**}\circ\mathbf{J} = \varphi_{**}\circ\mathbf{i}\circ\mathbf{j} = \mathbf{i}\circ(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\mathbf{j} =\\ = \mathbf{i}\circ\mathbf{j}\circ\varphi_{**} = \mathbf{J}\circ\varphi_{**}.\end{aligned}$$

□

2.3.4. Következmény. *Ha* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, *akkor*

$$(\varphi_*)_\# C = C; \tag{2.43}$$

$$(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}. \tag{2.44}$$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned}(\varphi_*)_\# C := \varphi_{**}\circ\mathbf{i}\circ\delta\circ\varphi_*^{-1} = \mathbf{i}\circ(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\delta\circ\varphi_*^{-1} =\\ = \mathbf{i}\circ\varphi_\#\delta \overset{(2.39)}{=} \mathbf{i}\circ\delta = C;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = \varphi_{**}\circ\mathbf{i}\circ\widehat{X}\circ\varphi_*^{-1} = \mathbf{i}\circ(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\widehat{X}\circ\varphi_*^{-1} =\\ = \mathbf{i}\circ\varphi_\#\widehat{X} \overset{(2.38)}{=} \mathbf{i}\widehat{\varphi_\# X} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}.\end{aligned}$$

□

2.3.5. Következmény. *Ha* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, *akkor*

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i}\circ\varphi_\#, \tag{2.45}$$

$$\varphi_\# \circ \mathbf{j} = \mathbf{j}\circ(\varphi_*)_\#, \tag{2.46}$$

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} = \mathbf{J}\circ(\varphi_*)_\#. \tag{2.47}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ esetén

$$(\varphi_*)_\# \mathbf{i}\widetilde{X} = \varphi_{**} \circ \mathbf{i} \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1} \overset{(2.40)}{=}$$
$$= \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1} = \mathbf{i}\varphi_\# \widetilde{X},$$

így $(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_\#$.
Tekintve egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt,

$$\varphi_\#(\mathbf{j}\xi) := (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} \circ \xi \circ \varphi_*^{-1} \overset{(2.41)}{=}$$
$$= \mathbf{j} \circ \varphi_{**} \circ \xi \circ \varphi_*^{-1} = \mathbf{j}(\varphi_*)_\# \xi,$$

ami (2.46)-ot adja.
A (2.47) reláció az előzőek közvetlen következménye. □

3. fejezet

Spray-sokaságok

3.1. Másodrendű vektormezők

3.1.1. Definíció. *Egy* $S\colon TM \longrightarrow TTM$ *leképezést* **szemispray***nek nevezünk, ha eleget tesz a következő feltételeknek:*

Spr1. $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, $\quad S(0_p) = 0_{0_p}$, $0_p \in T_pM$.

Spr2. $\mathbf{j}S = \delta$, *illetve – ekvivalens módon –* $\mathbf{J}S = C$.

Spr3. S *sima* $\mathring{T}M := \bigcup_{p \in M} T_pM \setminus \{0_p\}$ *fölött.*

Amennyiben a ***Spr3*** *helyett az erősebb*

Spr3$^+$. S *sima* TM*-en*

feltétel teljesül, úgy azt mondjuk, hogy S **másodrendű vektormező** M *fölött. Egy* C^1*-osztályú szemisprayt* **spray***nek, egy másodrendű vektormezőt pedig* **affin spray***nek nevezünk, ha másodfokú pozitív homogén abban az értelemben, hogy teljesül rá a további*

Spr4. $[C, S] = S$

feltétel.

Megjegyzés. Egyszerűen adódik, hogy egy spray pontosan akkor affin spray, ha C^2-osztályú.

Lokális leírás. Tegyük fel, hogy $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray. Tekintsünk M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és legyen $(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n)$ az általa indukált térkép TM-en. **Spr1** alapján $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ fölött

$$S \underset{(\mathcal{U})}{=} S^i \frac{\partial}{\partial x^i} + S^{n+i} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

írható, ahol S^i, S^{n+i} $(i \in \{1, \dots, n\})$ sima függvények $\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cup \mathring{T}M$ fölött.
A $\mathbf{j}S = \delta$ feltétel miatt $S^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = y^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$, amiből

$$S^i = y^i \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

következik.
Tradicionális okokból bevezetve a

$$G^i := -\frac{1}{2} S^{n+i}, \qquad i \in \{1, \dots, n\}$$

függvényeket, S koordinátakifejezése az

$$S = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i} \tag{3.1}$$

alakot ölti.
Amennyiben – speciálisan – S spray, úgy a G^i függvények másodfokú pozitív homogének. Ha – ráadásul – S kvadratikus spray, akkor megadhatóak $G^i_{jk} \colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvények úgy, hogy

$$G^i = \frac{1}{2}(G^i_{jk} \circ \tau) y^j y^k; \qquad G^i_{jk} = G^i_{kj}. \tag{3.2}$$

A továbbiakban egy szemisprayvel ellátott sokaságot – vagyis egy olyan (M, S) párt, ahol $S \colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray – *szemispray-sokaság*ként is említünk. Ha speciálisan S spray, akkor **spray-sokaság**ról vagy **pályatér**ről beszélünk.

Egyszerű számolással adódik, hogy tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ és S szemispray esetén

$$f^{\mathsf{c}} = S f^{\mathsf{v}} \tag{3.3}$$

teljesül. (Szintén könnyen látható, hogy adott f függvény esetén ez a reláció független a szemispray megválasztásától.)

3.1.2. Állítás (Grifone). *[22] Ha S szemispray és $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, akkor*

$$\mathbf{J}\,[\mathbf{J}\xi, S] = \mathbf{J}\xi. \tag{3.4}$$

A Grifone-féle relációban $\xi := X^{\mathsf{c}}$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ választással élve azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{ij}[X^{\mathsf{v}}, S] = \mathbf{i}\widehat{X},$$

ahonnan

$$\mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, S] = \widehat{X} = \mathbf{j}X^{\mathsf{c}} \tag{3.5}$$

következik. A (3.4) alkalmazásával az is adódik, hogy

$$[C,S]-S \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM), \tag{3.6}$$

mivel

$$\mathbf{J}([C,S]-S)=\mathbf{J}[C,S]-C=\mathbf{J}[\mathbf{J}S,S]-C=\mathbf{J}S-C=0.$$

3.1.3. Lemma. *[37] Tetszőleges S szemispray és $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén*

$$[X^{\mathsf{v}},S]=X^{\mathsf{c}}+\eta \tag{3.7}$$

írható, ahol $\eta \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$.

Bizonyítás. Felhasználva a (3.4) relációt

$$\mathbf{J}[X^{\mathsf{v}},S]=\mathbf{J}[\mathbf{J}X^{\mathsf{c}},S]=\mathbf{J}X^{\mathsf{c}},$$

amiből következik, hogy az $[X^{\mathsf{v}},S]$ és a X^{c} csupán egy vertikális vektormezőben térhet el, hiszen ha $\mathbf{J}\xi=0$, akkor $\xi \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$. □

3.2. Spray-sokaságok affinitásai és automorfizmusai

3.2.1. Definíció. *(1) Egy $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray – vagy (M,S) szemispray-sokaság –* **geodetikus***án olyan $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbét értünk, amelynek sebességvektormezője integrálgörbéje S-nek, vagyis amelyre*

$$\ddot{\gamma}=S\circ\dot{\gamma} \tag{3.8}$$

teljesül.
(2) Ha (M,S) szemispray-sokaság, akkor egy $\varphi\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmust **affinitásnak***nak (vagy* totálgeodetikus transzformáció*nak) nevezünk, ha S tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ geodetikusa esetén $\varphi\circ\gamma$ is geodetikusa S-nek, azaz*

$$\ddot{\overline{\varphi\circ\gamma}}=S\circ\dot{\overline{\varphi\circ\gamma}}. \tag{3.9}$$

Egy S szemispray összes affinitása Lie-csoportot alkot [25], ezt a csoportot $\mathrm{Aff}(S)$-sel jelöljük. Érdemes megjegyeznünk, hogy sprayk esetén az affinitásokra megkívánt differenciálhatósági feltétel elejthető: egy fontos, de eléggé elfeledett dolgozatában ([6]) F. Brickell megmutatta, hogy ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ *homeomorfizmus és megőrzi egy spray geodetikusait, akkor φ diffeomorfizmus.*

3.2.2. Lemma. *Legyen (M,S) szemispray-sokaság, $\varphi\colon M \longrightarrow M$ pedig egy diffeomorfizmus. φ pontosan akkor affinitása az S szemispraynek, ha S tetszőleges γ geodetikusa esetén*

$$(\varphi_{**}\circ S - S\circ\varphi_*)\circ\dot{\gamma}=0. \tag{3.10}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$. Ekkor $\varphi \circ \gamma$ is geodetikus, így

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} \overset{(1.18),(1.19)}{\iff} \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma} = S \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} \overset{(3.8)}{\iff}$$
$$\iff \varphi_{**} \circ S \circ \dot{\gamma} = S \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} \iff (\varphi_{**} \circ S - S \circ \varphi_*) \circ \dot{\gamma} = 0.$$

Ha a (3.10) teljesül, akkor az előzőhöz hasonlóan adódik, hogy $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$. □

Lokális leírás. Legyen $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép M-en. Egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe akkor és csak akkor geodetikusa a (3.1) koordinátaelőállítással rendelkező S szemispraynek, ha $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ koordinátafüggvényei eleget tesznek az

$$\gamma^{i\,\prime\prime} + 2G^i \circ \dot{\gamma} = 0, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{3.11}$$

relációnak.

3.2.3. Lemma. *Ha $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor*

$$(\varphi_*)_\# S := \varphi_{**} \circ S \circ \varphi_*^{-1}$$

szintén szemispray. Amennyiben – ráadásul – S spray, úgy $(\varphi_*)_\# S$ is spray.

Bizonyítás. Felhasználva, hogy $\tau_{TM} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}$, kapjuk, hogy

$$\tau_{TM} \circ (\varphi_*)_\# S = \tau_{TM} \circ \varphi_{**} \circ S \circ \varphi_*^{-1} =$$
$$= \varphi_* \circ \tau_{TM} \circ S \circ \varphi_*^{-1} \overset{(\mathbf{Spr1})}{=} \varphi_* \circ 1_{TM} \circ \varphi_*^{-1} =$$
$$= \varphi_* \circ \varphi_*^{-1} = 1_{TM},$$

tehát $(\varphi_*)_\# S$ is eleget tesz az **Spr1** feltételnek.

$$\mathbf{j}(\varphi_*)_\# S \overset{(2.46)}{=} \varphi_\# \mathbf{j} S \overset{(\mathbf{Spr2})}{=} \varphi_\# \delta \overset{(2.39)}{=} \delta,$$

$(\varphi_*)_\# S$ tehát a **Spr2** feltételt teljesíti.
Nyilvánvaló, hogy ha S rendelkezik az **Spr3** vagy **Spr3$^+$** tulajdonsággal, akkor $(\varphi_*)_\# S$-re is érvényes ugyanez.
Tegyük fel végül, hogy $[C, S] = S$. Ekkor

$$[C, (\varphi_*)_\# S] \overset{(2.43)}{=} [(\varphi_*)_\# C, (\varphi_*)_\# S] =$$
$$= (\varphi_*)_\# [C, S] \overset{(\mathbf{Spr4})}{=} (\varphi_*)_\# S,$$

tehát $(\varphi_*)_\# S$ is másodfokú pozitív homogén. □

3.2.4. Lemma és definíció. *Legyen adott egy $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray és egy $\varphi\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus. Ha $(\varphi_*)_\# S = S$, azaz*

$$\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*, \tag{3.12}$$

akkor azt mondjuk, hogy φ **automorfizmus***a az S-nek.*
S összes automorfizmusa csoportot alkot a kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathrm{Aut}(S)$*-sel jelöljük.*

3.2.5. Állítás. *Tetszőleges S szemispray esetén*

$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aut}(S). \tag{3.13}$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$, és legyen $\gamma\colon I \longrightarrow M$ geodetikusa S-nek. Ekkor

$$\begin{aligned} S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} &\overset{\text{felt.}}{=} \varphi_{**} \circ S \circ \dot{\gamma} = \\ &= \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}}, \end{aligned}$$

tehát $\varphi \circ \gamma$ is geodetikusa S-nek, így $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$. Ekkor tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ geodetikus esetén

$$\begin{aligned} S \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} &\overset{\text{felt.}}{=} \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \\ &= \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma} = \varphi_{**} \circ S \circ \dot{\gamma}, \end{aligned}$$

tehát

$$S \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} = \varphi_{**} \circ S \circ \dot{\gamma}.$$

Mivel TM minden nemzérus vektora megkapható egy geodetikus kezdősebességeként, az $S \circ \varphi* = \varphi_{**} \circ S$ reláció teljesül bármely $v \in TM \setminus \underline{0}$ vektorra. A zérusvektorokban

$$S \circ \varphi_*(0_p) = S(0_{\varphi(p)}) \overset{\mathbf{Spr1.}}{=} 0_{0_{\varphi(p)}} = 0_{\varphi_*(0_p)} = \varphi_{**}(0_{0_p}) \overset{\mathbf{Spr1.}}{=} \varphi_{**} \circ S(0_p),$$

ahol $p \in M$ tetszőleges. Ezzel igazoltuk, hogy $S \circ \varphi_* = \varphi_{**} \circ S$ a teljes TM-en érvényes, tehát $\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$. □

4. fejezet

Ehresmann-konnexiók

4.1. Ehresmann-konnexiók

4.1.1. Definíció. *Egy M sokaság fölötti, vagy TM-en adott* **Ehresmann-konnexió**n *olyan*

$$\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$$

leképezést értünk, amely eleget tesz a következő feltételeknek:

Ehr1. *$\mathcal{H}$ sima $\overset{\circ}{T}M \times TM$ fölött.*

Ehr2. *$\mathcal{H}$ fibrumtartó és fibrumonként lineáris:*
ha $v \in TM$ és $\mathcal{H}_v := \mathcal{H} \restriction \{v\} \times T_{\tau(v)}M$, akkor $\mathcal{H}_v$ lineáris leképezése $\{v\} \times T_{\tau(v)}M$-nek T_vTM-be.

Ehr3. $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = 1_{TM\times_M TM}$.

Ehr4. *Tetszőleges $p \in M$, $v \in T_pM$ esetén*

$$\mathcal{H}(o(p), v) = (o_*)_p(v),$$

ahol $o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező.

Röviden szólva, egy Ehresmann-konnexió a

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0$$

kanonikus egzakt sorozat egy jobboldali hasítása, az **Ehr1**-beli, gyengített simasági feltétellel.
Az **Ehr3.** és **Ehr4.** feltétel könnyen ellenőrizhető módon konzisztens, azonban $\mathcal{H}$ – és a belőle származó objektumok – simasága nincs biztosítva a teljes értelmezési tartományán. Ez összhangban van a Finsler geometriai alkalmazások igényeivel, ott ugyanis a simaság $o(M)$ fölötti sérülése tipikus.

$HTM := \mathrm{Im}(\mathcal{H})$ résznyalábja TTM-nek, amelyre teljesül, hogy

$$TTM = HTM \oplus VTM.$$

Ezt (a $\mathcal{H}$ által származtatott) *horizontális résznyaláb*nak hívjuk.

Kijelölve TM-en egy $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexiót, a

$$\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}, \quad \text{illetve} \tag{4.1}$$

$$\mathbf{v} := 1_{TTM} - \mathbf{h} \tag{4.2}$$

nyalábendomorfizmusokat a *$\mathcal{H}$-hoz tartozó horizontális*, illetve *vertikális projektor*nak nevezzük; a

$$\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}\colon TTM \longrightarrow TM \times_M TM \tag{4.3}$$

leképezést pedig a *$\mathcal{H}$-hoz csatolt vertikális leképezés*nek hívjuk. Közvetlenül adódik $\mathcal{V}$ definíciójából, hogy

$$\mathcal{V} \circ \mathbf{i} = 1_{TM \times_M TM}, \tag{4.4}$$

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{V}) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}) \qquad (\Rightarrow \mathcal{V} \circ \mathcal{H} = 0), \tag{4.5}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{i} \circ \mathcal{V}. \tag{4.6}$$

A $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió és az általa származtatott nyalábleképezések tenzoriális leképezéseket indukálnak a megfelelő szelések modulusainak szintjén, ezeket a leképezéseket jelölésükben nem különböztetjük meg az illető nyalábleképezésektől.

$$\mathfrak{X}^{\mathsf{h}}(TM) := \mathcal{H}(\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)) = \mathbf{h}(\mathfrak{X}(TM))$$

részmodulusa az $\mathfrak{X}(TM)$-nek, a $\mathcal{H}$-ra nézve *horizontális vektormezők* modulusa.

Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező ($\mathcal{H}$ szerinti) *horizontális lift*je

$$X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}}. \tag{4.7}$$

Ha $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, akkor $X^{\mathsf{v}} \underset{\tau}{\sim} 0$, $Y^{\mathsf{h}} \underset{\tau}{\sim} Y$ miatt

$$[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}}] \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM). \tag{4.8}$$

Megmutatható, hogy (lásd például [37]), hogy

$$[X, Y]^{\mathsf{h}} = \mathbf{h}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}]. \tag{4.9}$$

Ha az X_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) vektormezők egy $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz fölött generálják az $\mathfrak{X}(M)$ modulust, akkor az $((X_i^{\mathsf{v}})_{i=1}^n, (X_i^{\mathsf{h}})_{i=1}^n)$ vektormezők generálják $\tau^{-1}(\mathcal{U})$ az $\mathfrak{X}(TM)$ modulust.

Ez az észrevétel ugyanazt az egyszerűsítést teszi lehetővé TM-en megfogalmazott tenzoriális állítások bizonyításával kapcsolatban, mint a 2.1. szakasz végén tett megjegyzés.

4.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió M fölött. Az*

$$\ell^{\mathsf{h}}\colon X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^{\mathsf{h}}(X) := X^{\mathsf{h}} \in \mathfrak{X}^{\mathsf{h}}(TM) \tag{4.10}$$

leképezésre (a $\mathcal{H}$-hoz tartozó horizontális liftelés) teljesülnek a következők:

$$(i)\qquad \ell^{\mathsf{h}}(fX) = f^{\mathsf{v}}\ell^{\mathsf{h}}(X), \quad X \in \mathfrak{X}(M), f \in C^\infty(M);$$
$$(ii)\qquad \mathbf{J} \circ \ell^{\mathsf{h}} = \ell^{\mathsf{v}}.$$

Megfordítva, ha adott egy $\ell^{\mathsf{h}}\colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$ leképezés, amely eleget tesz az (i) és (ii) feltételeknek, akkor az a $C^\infty(TM)$-lineáris kiterjesztéssel értelmezett $\mathcal{H}\colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$ leképezés, amelyre $\mathcal{H}(\widehat{X}) = \ell^{\mathsf{h}}(X)$ $(X \in \mathfrak{X}(M))$ Ehresmann-konnexió.

Bizonyítás. A tett észrevételek közvetlenül ellenőrizhetőek. □

4.1.3. Állítás (Crampin–Grifone). *Tegyük fel, hogy $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray. Az*

$$\ell^{\mathsf{h}}\colon X \in \mathfrak{X}(M) \longmapsto \ell^{\mathsf{h}}(X) := \frac{1}{2}\left(X^{\mathsf{c}} - [S, X^{\mathsf{v}}]\right) \in \mathfrak{X}(TM) \tag{4.11}$$

leképezés eleget tesz a 4.1.2. lemmabeli feltételeknek, így egy $\mathcal{H}_S$ Ehresmann-konnexiót származtat, amelynél tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}\left(X^{\mathsf{c}} - [S, X^{\mathsf{v}}]\right) \qquad \textit{(Crampin).} \tag{4.12}$$

A $\mathcal{H}_S$-hez tartozó horizontális projektor megadható a

$$\mathbf{h}_S = \frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S, \mathbf{J}]\right) \qquad \textit{(Grifone)} \tag{4.13}$$

formulával.

Bizonyítás. Elsőként a 4.1.2. *(i)-(ii)* feltételek teljesülését ellenőrizzük. Tetszőleges $f \in C^\infty(M)$ függvényt tekintve:

$$\begin{aligned}\ell^{\mathsf{h}}(fX) &:= \frac{1}{2}\left((fX)^{\mathsf{c}} - [S, (fX)^{\mathsf{v}}]\right) = \frac{1}{2}\left(f^{\mathsf{v}}X^{\mathsf{c}} + f^{\mathsf{c}}X^{\mathsf{v}} - [S, f^{\mathsf{v}}X^{\mathsf{v}}]\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(f^{\mathsf{v}}X^{\mathsf{c}} + f^{\mathsf{c}}X^{\mathsf{v}} - f^{\mathsf{v}}[S, X^{\mathsf{v}}] - (Sf^{\mathsf{v}})X^{\mathsf{v}}\right) \overset{(3.3)}{=} \\ &= \frac{1}{2}f^{\mathsf{v}}\left(X^{\mathsf{c}} - [S, X^{\mathsf{v}}]\right) = f^{\mathsf{v}}\ell^{\mathsf{h}}(X),\end{aligned}$$

ℓ^{h} tehát eleget tesz (i)-nek. Mivel

$$\begin{aligned}\mathbf{J} \circ \ell^{\mathsf{h}}(X) &= \frac{1}{2}(\mathbf{J}X^{\mathsf{c}} - \mathbf{J}[S, X^{\mathsf{v}}]) \overset{(2.27)}{=} \frac{1}{2}(X^{\mathsf{v}} - \mathbf{J}[S, X^{\mathsf{v}}]) \overset{(3.5)}{=} \\ &= \frac{1}{2}(X^{\mathsf{v}} + X^{\mathsf{v}}) = X^{\mathsf{v}} = \ell^{\mathsf{v}}(X),\end{aligned}$$

(ii) is érvényes.
(4.13) ellenőrzéséhez elegendő a bal és a jobb oldalt vertikális, illetve teljes lifteken kiértékelni.

$$\mathbf{h}_S X^{\mathsf{v}} = \mathcal{H}_S \circ \mathbf{j}(X^{\mathsf{v}}) = \mathcal{H}_S \circ \mathbf{j} \circ \mathbf{i}(\widehat{X}) = 0,$$

másrészt

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S,\mathbf{J}]\right)(X^{\mathsf{v}}) = \frac{1}{2}\left(X^{\mathsf{v}} - [S,\mathbf{J}X^{\mathsf{v}}] + \mathbf{J}[S,X^{\mathsf{v}}]\right) \overset{(3.5)}{=} \\ = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{v}} - X^{\mathsf{v}}) = 0,\end{aligned}$$

$\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ fölött tehát mindkét oldal ugyanúgy hat. Ami a teljes lifteken való hatást illeti, azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_S X^{\mathsf{c}} = \mathcal{H}_S \circ \mathbf{j}(X^{\mathsf{c}}) = \mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [S, X^{\mathsf{v}}]) \overset{(1.10)}{=} \\ = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [S,\mathbf{J}]X^{\mathsf{c}} - \mathbf{J}[S,X^{\mathsf{c}}]) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [S,\mathbf{J}]X^{\mathsf{c}}) = \\ = \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S,\mathbf{J}])(X^{\mathsf{c}}).\end{aligned}$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben azt használtuk fel, hogy

$$\begin{aligned}0 \overset{(2.28)}{=} [X^{\mathsf{c}},\mathbf{J}]S = [X^{\mathsf{c}},\mathbf{J}S] - \mathbf{J}[X^{\mathsf{c}},S] = \\ = [X^{\mathsf{c}},C] - \mathbf{J}[X^{\mathsf{c}},S] = -\mathbf{J}[X^{\mathsf{c}},S].\end{aligned}$$

□

Megjegyzés. A most igazolt eredményt – legalábbis a közölt „indexmentes" formában – M. Crampin és J. Grifone fedezte fel (függetlenül) az 1970-es évek elején, és bizonyította be koordinátamentes eszközökkel; lásd [10], illetve [22]. Az itt adott bizonyítás lényegében a Crampin-féle bizonyítás egy egyszerűsített változata.

Lokális leírás. Rögzítsünk M-en egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképet és tekintsük a TM-en az általa indukált (1.11) térképet. Ekkor $\tau^*\tau$-nak $\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{i=1}^n$, τ_{TM}-nek $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{i=1}^n$ lokális bázisa. Egyértelműen léteznek olyan

$$N^i_j\colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \subset TM \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad i,j \in \{1,\dots,n\}$$

$\tau^{-1}(\mathcal{U}) \cap \mathring{T}M$ fölött sima függvények, hogy

$$\mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) =: \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{h}} \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \qquad (j \in \{1,\dots,n\}); \tag{4.14}$$

ezeket a függvényeket az Ehresmann-konnexió $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó (röviden $\mathcal{U}$-ra vonatkozó) *Christoffel-szimbólumai*nak hívjuk. Segítségükkel a $\mathcal{H}$-hoz tartozó vertikális leképezés, valamint a horizontális- és a vertikális projektor lokális bázisokon való hatása a

$$\mathcal{V}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} N_j^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \qquad \mathcal{V}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}; \tag{4.15}$$

$$\mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial}{\partial x^j} - N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \mathbf{h}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} 0; \tag{4.16}$$

$$\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} N_j^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad \mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial}{\partial y^j} \tag{4.17}$$

formulákkal írható le, ahol $j \in \{1, \dots, n\}$.

4.1.4. Lemma és definíció. *Legyen $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexió M fölött. Ha*

$$S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta, \tag{4.18}$$

akkor $S_{\mathcal{H}}$ szemispray, amelyet a $\mathcal{H}$-hoz csatolt szemispray*nek nevezünk. Erre teljesül a*

$$\mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] = S_{\mathcal{H}} \tag{4.19}$$

reláció.

Bizonyítás. *(a)* **Ehr2.**-ből következően

$$\tau_{TM} \circ S_{\mathcal{H}} = \tau_{TM} \circ \mathcal{H} \circ \delta = 1_{TM};$$
$$\mathbf{j} \circ S_{\mathcal{H}} = \mathbf{j} \circ \mathcal{H} \circ \delta \overset{\mathbf{Ehr3.}}{=} 1_{TM \times_M TM} \circ \delta = \delta,$$

Ehr1. pedig biztosítja, hogy $S_{\mathcal{H}}$ sima $\mathring{T}M$ fölött, $S_{\mathcal{H}}$ tehát szemispray.
(b) Rátérve (4.19) igazolására,

$$0 \overset{(3.6)}{=} \mathbf{h}([C, S_{\mathcal{H}}] - S_{\mathcal{H}}) = \mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] - \mathcal{H} \circ \mathbf{j} \circ S_{\mathcal{H}} =$$
$$= \mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] - \mathcal{H} \circ \delta = \mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] - S_{\mathcal{H}},$$

és így $\mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] = S_{\mathcal{H}}$ valóban fennáll. □

4.2. Az indukált Berwald-deriválás. Tenzió, torziók

4.2.1. Lemma és definíció. *Jelentse $\mathring{\tau}\colon \mathring{T}M \longrightarrow M$ a $\tau\colon TM \longrightarrow M$ érintő-nyaláb* hasított nyaláb*ját; ekkor $\mathring{\tau} = \tau \restriction \mathring{T}M$.*

Tekintsük a $\mathring{\tau}^*\tau\colon \mathring{T}M \times_M TM \longrightarrow \mathring{T}M$ *visszahúzott nyalábot, a széléseinek* $C^\infty(TM)$*-modulusát jelölje* $\mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$*. Tegyük fel, hogy* M *fölött adva van egy* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió.*
Ha tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ *vektormező és* $\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$ *szelés esetén*

$$\nabla_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathcal{H}\widetilde{Y}] + \mathcal{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}], \tag{4.20}$$

akkor a $\nabla\colon \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$ *leképezés kovariáns deriválás a* $\mathring{\tau}^*\tau$ *nyalábon, ezt a* $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió által indukált **Berwald-deriválás***nak nevezzük.*
Speciálisan

$$\nabla_{X^\mathsf{v}} \widehat{Y} = 0, \qquad \mathbf{i}\nabla_{X^\mathsf{h}} \widehat{Y} = [X^\mathsf{h}, Y^\mathsf{v}]; \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M); \tag{4.21}$$

$$\nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)^\mathsf{h}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} \underset{(\mathcal{U})}{=} N^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \quad N^i_{jk} := \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} \qquad (j,k \in \{1,\dots,n\}); \tag{4.22}$$

az N^i_{jk} *függvényeket a Berwald-deriválás ((1.11)-ben rögzített) térképre vonatkozó Christoffel-szimbólumainak hívjuk. A*

(4.23)
$$\nabla^\mathsf{h}\colon \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \times \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau), \qquad (\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \longmapsto \nabla^\mathsf{h}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}} \widetilde{Y}$$

leképezést a $\mathcal{H}$ *által származtatott* h-Berwald deriválás*nak nevezzük. Ha*

$$\nabla^\mathsf{v}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}} \widetilde{Y} = \mathbf{j}[\mathbf{i}\widetilde{X}, \mathcal{H}\widetilde{Y}], \qquad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \tag{4.24}$$

akkor a ∇^v *operátor független az Ehresmann-konnexiótól, ezt a* kanonikus vertikális *(vagy* v-kovariáns*)* derivált*nak hívjuk.*

4.2.2. Definíció. *Legyen adva az* M *sokaság fölött egy*

$$\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$$

Ehresmann-konnexió, és tekintsük az általa indukált ∇^h *h-Berwald deriválást. A* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió* **tenzió***ján a kanonikus szelés h-Berwald differenciálját, vagyis a*

$$\mathbf{t} := \nabla^\mathsf{h}\delta\colon \widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longmapsto \mathbf{t}(\widetilde{X}) := \nabla^\mathsf{h}\delta(\widetilde{X}) := \nabla^\mathsf{h}_{\widetilde{X}}\delta = \mathcal{V}[\mathcal{H}\widetilde{X}, C] \tag{4.25}$$

$\binom{1}{1}$*-tenzort értjük. Speciálisan tetszőleges* $X \in \mathfrak{X}(M)$ *vektormező esetén*

$$\mathbf{it}(\widehat{X}) = [X^\mathsf{h}, C]. \tag{4.26}$$

A tenzió eltűnése esetén az Ehresmann-konnexiót **homogén***nek nevezzük.*

Lokális leírás. $\mathbf{t}$ komponensei egy TM-en indukált térképre vonatkozóan a

$$\mathbf{t}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} (y^k N^i_{jk} - N^i_j) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \qquad j \in \{1,\dots,n\} \tag{4.27}$$

relációk által meghatározott

$$t^i_j := y^k N^i_{jk} - N^i_j, \qquad i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{4.28}$$

függvények, ahol N^i_j a $\mathcal{H}$ Christoffel-szimbólumai, $N^i_{jk} = \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k}$ pedig az indukált Berwald-deriválás Christoffel-szimbólumai.
(4.28)-ból közvetlenül adódik, hogy egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió akkor és csak akkor homogén, ha tetszőleges térképre vonatkozó Christoffel-szimbólumai elsőfokú pozitív homogén függvények.

4.2.3. Lemma. *Ha egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió homogén, akkor az $S_{\mathcal{H}}$ csatolt szemispray spray. Megfordítva, ha $S_{\mathcal{H}}$ spray, akkor $\mathbf{t}(\delta) = 0$.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió homogén. Azt kell ellenőriznünk, hogy $[C, S_{\mathcal{H}}] = S_{\mathcal{H}}$.

$$[C, S_{\mathcal{H}}] = \mathbf{h}[C, S_{\mathcal{H}}] + \mathbf{v}[C, S_{\mathcal{H}}] \overset{(4.19)}{=} S_{\mathcal{H}} + \mathbf{i}\mathcal{V}[C, S_{\mathcal{H}}].$$

$\mathcal{H}$ homogenitása miatt $\mathbf{t} = 0$, így speciálisan

$$0 = \mathbf{t}(\delta) := \mathcal{V}[\mathcal{H} \circ \delta, \mathbf{i}\delta] = \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, C],$$

következésképpen $[C, S_{\mathcal{H}}] = S_{\mathcal{H}}$ valóban fennáll.
Megfordítva, ha $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$ spray, akkor

$$\mathbf{t}(\delta) = \mathcal{V}[\mathcal{H} \circ \delta, C] = \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, C] = -\mathcal{V}[C, S_{\mathcal{H}}] \overset{\text{felt.}}{=} -\mathcal{V} \circ S_{\mathcal{H}} = 0.$$

$\square$

4.2.4. Lemma. *[37] Legyen $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió M fölött, $\mathbf{t}$ a tenziója, $\mathcal{V}$ pedig a csatolt vertikális leképezés. Ha ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás, akkor*

$$\nabla\delta = \mathbf{t} \circ \mathbf{j} + \mathcal{V}. \tag{4.29}$$

Bizonyítás. Elegendő azt ellenőrizni, hogy a bal és a jobb oldal ugyanazt az értéket veszi fel vertikális és horizontális lifteken. Legyen tehát $X \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned}\nabla\delta(X^{\mathsf{v}}) &:= \nabla_{X^{\mathsf{v}}}\delta \overset{(4.24)}{=} \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, \mathcal{H} \circ \delta] = \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, S_{\mathcal{H}}] \overset{(3.5)}{=} \\ &= \widehat{X} \overset{(4.4)}{=} \mathcal{V} \circ \mathbf{i}(\widehat{X}) = \mathcal{V}(X^{\mathsf{v}}) = (\mathbf{t} \circ \mathbf{j} + \mathcal{V})(X^{\mathsf{v}})\end{aligned}$$

(hiszen $\mathbf{j}X^{\mathsf{v}} = \mathbf{j} \circ \mathbf{i}\widehat{X} = 0$).
Másrészt

$$\begin{aligned}\nabla\delta(X^{\mathsf{h}}) &= \nabla_{X^{\mathsf{h}}}\delta = \nabla^{\mathsf{h}}_{\widehat{X}}\delta = \nabla^{\mathsf{h}}\delta(\widehat{X}) =: \mathbf{t}(\widehat{X}) \overset{\textbf{Ehr3.}}{=} \\ &= \mathbf{t} \circ \mathbf{j} \circ \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{t} \circ \mathbf{j}(X^{\mathsf{h}}) = (\mathbf{t} \circ \mathbf{j} + \mathcal{V})(X^{\mathsf{h}}),\end{aligned}$$

(4.29) tehát valóban teljesül. $\square$

4.2.5. Következmény. *Egy Ehresmann-konnexió pontosan akkor homogén, ha*

$$\nabla\delta = \mathcal{V},$$

ahol $\mathcal{V}$ *a hozzá csatolt vertikális leképezés,* ∇ *pedig az általa indukált Berwald-deriválás.*

4.2.6. Lemma és definíció. *Egy* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió* **torzió***ján a*

$$\mathbf{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}]; \qquad \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \tag{4.30}$$

$\binom{1}{2}$*-tenzort értjük. Bázikus vektormezők esetén,*

$$\mathbf{i}\mathbf{T}(\widehat{X},\widehat{Y}) = [X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}] - [Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}] - [X,Y]^{\mathsf{v}} \tag{4.31}$$

adódik.

Lokális leírás.

$$\mathbf{T}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}},\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} (N^i_{jk} - N^i_{kj})\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}; \tag{4.32}$$

a

$$T^i_{jk} := N^i_{jk} - N^i_{kj} = \frac{\partial N^i_j}{\partial y^k} - \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j} \tag{4.33}$$

függvények $\mathbf{T}$ komponensei az $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozóan.

4.2.7. Lemma. *Egy szemispray által indukált Ehresmann-konnexió torziója eltűnik.*

Bizonyítás. Legyen S szemispray M fölött, és jelölje $\mathbf{T}$ a $\mathcal{H}_S$ Ehresmann-konnexió (4.1.3. állítás) torzióját. Tetszőleges $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőket véve,

$$\begin{aligned}\mathbf{i}\mathbf{T}(\widehat{X},\widehat{Y}) &= [X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}] - [Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}] - [X,Y]^{\mathsf{v}} = \\ &\overset{(4.12)}{=} \frac{1}{2}[X^{\mathsf{c}},Y^{\mathsf{v}}] - \frac{1}{2}[[S,X^{\mathsf{v}}],Y^{\mathsf{v}}] - \frac{1}{2}[Y^{\mathsf{c}},X^{\mathsf{v}}] + \frac{1}{2}[[S,Y^{\mathsf{v}}],X^{\mathsf{v}}] - [X,Y]^{\mathsf{v}} \overset{(2.17),(*)}{=} \\ &= -\frac{1}{2}[Y,X]^{\mathsf{v}} + \frac{1}{2}[X,Y]^{\mathsf{v}} - [X,Y]^{\mathsf{v}} = 0.\end{aligned}$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben a vektormezők Lie-zárójelére vonatkozó Jacobi-azonosságot alkalmazuk:

$$[[S,Y^{\mathsf{v}}],X^{\mathsf{v}}] + [[Y^{\mathsf{v}},X^{\mathsf{v}}],S] + [[X^{\mathsf{v}},S],Y^{\mathsf{v}}] = [[S,Y^{\mathsf{v}}],X^{\mathsf{v}}] - [[S,X^{\mathsf{v}}],Y^{\mathsf{v}}] = 0.$$

□

4.2.8. Definíció. *Egy* $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ *Ehresmann-konnexió* **erős torzió***ján a*

$$\mathbf{T}^{\mathsf{s}} := \nabla^{\mathsf{h}}\delta + i_\delta \mathbf{T} = \mathbf{t} + i_\delta \mathbf{T} \tag{4.34}$$

τ*-menti* $\binom{1}{1}$*-tenzormezőt értjük, ahol* $i_\delta \mathbf{T}(\widetilde{X}) := \mathbf{T}(\delta, \widetilde{X})$.

Lokális leírás. Tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$\mathbf{T}^{\mathsf{s}}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) \underset{(\mathcal{U})}{=} \mathbf{t}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) + \mathbf{T}\left(y^k \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) \overset{(4.27),(4.32)}{=}$$
$$= (y^k N^i_{jk} - N^i_j)\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} + y^k(N^i_{kj} - N^i_{jk})\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = (y^k N^i_{kj} - N^i_j)\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

tehát $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ komponensei egy indukált térképre vonatkozóan az

$$y^k N^i_{kj} - N^i_j = y^k \frac{\partial N^i_k}{\partial y^j} - N^i_j \qquad (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \tag{4.35}$$

függvények.

4.2.9. Lemma. *Bármely* $\widehat{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ *bázikus vektormező esetén*

$$\mathbf{T}^{\mathsf{s}}(\widehat{X}) = \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}] - \mathbf{j}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}], \tag{4.36}$$

ahol $S_{\mathcal{H}}$ *a* $\mathcal{H}$*-hoz csatolt szemispray.*

Bizonyítás. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{s}}(\widehat{X}) = \mathbf{t}(\widehat{X}) + \mathbf{T}(\delta, \widehat{X}) =$$
$$= \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, C] + \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}] - \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, C] - \mathbf{j}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}] =$$
$$= \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}] - \mathbf{j}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}].$$

□

4.2.10. Lemma és definíció. *Amennyiben* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió az* M *sokaság fölött és* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$*, úgy*

$$\varphi^{\#}\mathcal{H} := \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \tag{4.37}$$

is Ehresmann-konnexió, amelyet $\mathcal{H}$ φ *általi* visszahúzott*jának (pull-backjének) nevezünk. A* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió egy A geometriai adatának* $\varphi^{\#}\mathcal{H}$*-ból* *származó megfelelőjét $\varphi^{\#}A$-val jelölve, érvényesek a következők:*

$$\varphi^{\#}\mathcal{V} = (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ \mathcal{V} \circ \varphi_{**}; \tag{4.38}$$

$$\varphi^{\#}\mathbf{h} = \varphi_{**}^{-1} \circ \mathbf{h} \circ \varphi_{**}; \tag{4.39}$$

$$\varphi^{\#}\mathbf{v} = \varphi_{**}^{-1} \circ \mathbf{v} \circ \varphi_{**}; \tag{4.40}$$

$$\varphi^{\#}\mathcal{H}(\widehat{X}) = (\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, \qquad X \in \mathfrak{X}(M); \tag{4.41}$$

$$\varphi^{\#}\mathbf{t} = \varphi_{\#}^{-1} \circ \mathbf{t} \circ \varphi_{\#}; \tag{4.42}$$

$$\varphi^{\#}\mathbf{T} = \varphi_{\#}^{-1} \circ \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \times \varphi_{\#}); \tag{4.43}$$

$$\varphi^{\#}\mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \varphi_{\#}^{-1} \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_{\#}. \tag{4.44}$$

Bizonyítás. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy $\varphi^{\#}\mathcal{H}$ eleget tesz a **Ehr1.-Ehr4.** feltételek mindegyikének; például **Ehr3.** a következőképpen adódik:

$$\mathbf{j} \circ \varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) = (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ \mathbf{j} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \overset{\mathbf{Ehr3.}}{=}$$
$$= (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ (\varphi_* \times \varphi_*) = 1_{TM \times_M TM}.$$

A felsorolt relációk hasonlóan egyszerűen vezethetők le; példaként (4.41)-(4.43) igazolását mutatjuk be.

(a) Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\varphi^{\#}\mathcal{H}(\widehat{X}) = \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widehat{X} \overset{(2.37)}{=} \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ \varphi_{\#}\widehat{X} \circ \varphi_* =$$
$$= \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ \widehat{\varphi_{\#}X} \circ \varphi_* = \varphi_{**}^{-1} \circ (\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}} \circ \varphi_* = (\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}.$$

(b) Bármely $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőre

$$\varphi^{\#}\mathbf{t}(\widehat{X}) = \varphi^{\#}\mathcal{V}[\varphi^{\#}\mathcal{H}(\widehat{X}), C] \overset{(2.43),(4.41)}{=}$$
$$= (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ \mathcal{V} \circ \varphi_{**} \circ [(\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_{\#}^{-1}C] =$$
$$= (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ \mathcal{V} \circ \varphi_{**} \circ \varphi_{**}^{-1} \circ [(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, C] \circ \varphi_* =$$
$$= (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1}) \circ \mathcal{V}[(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, C] \circ \varphi_* =$$
$$= \varphi_{\#}^{-1}\mathcal{V}[(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, C] = \varphi_{\#}^{-1}\mathbf{t}(\widehat{\varphi_{\#}X}) = \varphi_{\#}^{-1} \circ \mathbf{t} \circ \varphi_{\#}(\widehat{X}).$$

(c) Tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket tekintve

$$\mathbf{i}\varphi^{\#}\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = [\varphi^{\#}\mathcal{H}(\widehat{X}), Y^{\mathsf{v}}] - [\varphi^{\#}\mathcal{H}(\widehat{Y}), X^{\mathsf{v}}] - [X, Y]^{\mathsf{v}} \overset{(2.44),(4.41)}{=}$$
$$= \Big[(\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}Y)^{\mathsf{v}}\Big] -$$
$$- \Big[(\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}Y)^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{v}}\Big] - (\varphi_*)_{\#}^{-1}(\varphi_{\#}[X, Y])^{\mathsf{v}} =$$
$$= (\varphi_*)_{\#}^{-1}\left([(\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_{\#}Y)^{\mathsf{v}}] - [(\varphi_{\#}Y)^{\mathsf{h}}, (\varphi_{\#}X)^{\mathsf{v}}] - (\varphi_{\#}[X, Y])^{\mathsf{v}}\right) =$$
$$= (\varphi_*)_{\#}^{-1}\mathbf{T}(\varphi_{\#}X, \varphi_{\#}Y) = (\varphi_*)_{\#}^{-1} \circ \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \circ \varphi_{\#})(\widehat{X}, \widehat{Y}).$$

□

4.3. Ehresmann-konnexiók különbségtenzora

4.3.1. Lemma és definíció. *Legyenek $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ Ehresmann-konnexiók az M sokaság fölött és tekintsük a hozzájuk csatolt $\mathcal{V}_1$ és $\mathcal{V}_2$ vertikális leképezéseket. A*

$$(\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2)\colon \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$$

leképezés vertikális értékű, és így létezik pontosan egy olyan

$$P\colon \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \operatorname{Sec}(\tau^*\tau)$$

endomorfizmus, hogy

$$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = \mathbf{i} \circ P. \tag{4.45}$$

Ezt a P tenzort a $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ különbségtenzor*ának hívjuk.*
Ekkor $P = \mathcal{V}_2 \circ \mathcal{H}_1$ és ezért

$$\mathbf{i} \circ P = \mathbf{v}_2 \circ \mathcal{H}_1. \tag{4.46}$$

Bizonyítás. Mivel

$$\mathbf{J} \circ (\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2) = \mathbf{i} \circ (\mathbf{j} \circ \mathcal{H}_1 - \mathbf{j} \circ \mathcal{H}_2) = \mathbf{i} \circ (1_{TM \times_M TM} - 1_{TM \times_M TM}) = 0,$$

$\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2$ valóban vertikális értékű, és így előáll $\mathbf{i} \circ P$ alakban, ahol $P\colon \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \operatorname{Sec}(\tau^*\tau)$ egyértelműen meghatározott $\binom{1}{1}$-tenzor. Másrészt

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_2 \circ (\mathbf{j} \circ \mathcal{H}_1) = \mathcal{H}_1 - \mathbf{h}_2 \circ \mathcal{H}_1 = (1 - \mathbf{h}_2) \circ \mathcal{H}_1 = \\ = \mathbf{v}_2 \circ \mathcal{H}_1 = \mathbf{i} \circ (\mathcal{V}_2 \circ \mathcal{H}_1)\end{aligned}$$

miatt (4.46) is teljesül. □

Megjegyzés. A vertikális leképezések különbségtenzora

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = -\mathcal{V}_2 \circ \mathbf{h}_1 \tag{4.47}$$

alakban áll elő.

4.3.2. Állítás (az erős torzió interpretációja). *Tekintsünk egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót és a hozzá csatolt $S_{\mathcal{H}}$ szemisprayt. Ekkor az $S_{\mathcal{H}}$-ból származtatható $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ Ehresmann-konnexió és a $\mathcal{H}$ különbségtenzora a $\mathcal{H}$ erős torziójának $\frac{1}{2}$-szerese:*

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathbf{s}}. \tag{4.48}$$

Bizonyítás. Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges.

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}}(\widehat{X}) &\overset{(4.36)}{=} \mathbf{v}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}] - \mathbf{J}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}] = \\
= \mathbf{v}\left(X^{\mathsf{c}} - 2\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}(\widehat{X})\right) &- \mathbf{J}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}] = \mathbf{v}X^{\mathsf{c}} - 2\mathbf{v}\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}(\widehat{X}) - \mathbf{J}[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}] = \\
&= \mathbf{v}X^{\mathsf{c}} - 2(\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}} - \mathcal{H})(\widehat{X}) + \mathbf{J}[X^{\mathsf{h}}, S_{\mathcal{H}}] \overset{(3.4)}{=} \\
&= \mathbf{J}[\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] + 2(\mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}})(\widehat{X}) + \mathbf{J}[\mathbf{h}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] = \\
&= \mathbf{J}[\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] + 2(\mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}})(\widehat{X}) + \mathbf{J}([X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] - [\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}]) \overset{4.1.3.\ \mathrm{biz.}}{=} \\
&= \mathbf{J}[\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] + 2(\mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}})(\widehat{X}) - \mathbf{J}[\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, S_{\mathcal{H}}] = 2(\mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}})(\widehat{X})
\end{aligned}$$

□

4.3.3. Következmény. *Egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió erős torziója pontosan akkor tűnik el, ha a $\mathcal{H}$-hoz csatolt $S_{\mathcal{H}}$ szemispray által indukált $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ Ehresmann-konnexió megegyezik az adott $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexióval.*

4.3.4. Következmény. *Egy Ehresmann-konnexió erős torziója akkor és csak akkor tűnik el, ha eltűnik a tenziója és a torziója.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ egy Ehresmann-konnexió. Az erős torzió definíciójából közvetlenül látható, hogy eltűnő tenzió és torzió esetén az erős torzió is eltűnik.
Megfordítva, tekintsük az $S_{\mathcal{H}}$ indukált szemisprayt, továbbá az $S_{\mathcal{H}}$-ból származó $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ Ehresmann-konnexiót. Tegyük fel, hogy $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = 0$. A 4.3.2. lemma értelmében $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ és $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ torziója eltűnik (lásd 4.2.7. lemma). Emiatt a $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{t} + i_\delta \mathbf{T}$ relációban $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T} = 0$, amiből $\mathbf{t} = 0$ következik. □

4.3.5. Következmény (Unicitás-tétel.). *Egy Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatározza az erős torziója és az általa indukált szemispray.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ Ehresmann-konnexiók ugyanazzal a $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ erős torzióval és S szemisprayvel rendelkeznek. A 4.3.2. lemma miatt

$$\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathcal{H}_1 - \mathcal{H}_S \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_S,$$

amiből $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2$ következik. □

Megjegyzés. A két utóbbi következmény megtalálható Grifone [22] cikkében (I.56, 56) és a de León-Rodrigues monográfiában ([15]; 4.8.1, 4.8.3) is, különböző bizonyításokkal. Az itt bemutatott tárgyalás eltér mindkét munkáétól; úgy véljük, hogy egyszerűbb és természetesebb. [26] dolgozatunkban szükségünk volt az Ehresmann-konnexiók különbségtenzorának alaposabb vizsgálatára, és ennek során mindegy melléktermékként nyertük ezeket az ismert, fontos tételeket.

4.4. Ehresmann-konnexiók geodetikusai és affinitásai

4.4.1. Definíció. *Egy* $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexió geodetikus*án olyan* $\gamma\colon I \longrightarrow M$ *reguláris görbét értünk, amelyre*

$$\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = 0 \tag{4.49}$$

teljesül, ahol $\mathcal{V}$ *a* $\mathcal{H}$*-hoz csatolt vertikális leképezés.*
Egy $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ *leképezés a* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió* **affinitás**a*, ha megőrzi a geodetikusokat (mint parametrizált görbéket), azaz*

$$\mathcal{V} \circ \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = 0, \qquad \textit{ha } \gamma \textit{ geodetikusa } \mathcal{H}\textit{-nak.} \tag{4.50}$$

$\mathcal{H}$ *összes affinitása csoportot alkot, ezt* $\mathrm{Aff}(\mathcal{H})$*-val jelöljük.*

A definíció úgy is megfogalmazható, hogy $\mathcal{H}$ geodetikusai azok a reguláris M-beli γ görbék, amelyeknek gyorsulása $\mathcal{H}$-ra nézve horizontális $\dot{\gamma}$-menti vektormező, azaz amelyek a

$$\mathbf{h} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma} \tag{4.51}$$

feltételnek tesznek eleget.

4.4.2. Állítás. *Legyen adva egy* $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ *Ehresmann-konnexió.* $\mathcal{H}$ *geodetikusai egybeesnek a* $\mathcal{H}$*-hoz csatolt* $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$ *szemispray geodetikusaival.*

Bizonyítás. Tekintsünk egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbét.
(a) Tegyük fel, hogy γ geodetikusa az $S_{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \circ \delta$ szemispraynek ($\ddot{\gamma} = S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\gamma}$). Ekkor

$$\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = \mathcal{V} \circ S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\gamma} = \mathcal{V} \circ \mathcal{H} \circ \delta \circ \dot{\gamma} = 0,$$

γ tehát geodetikusa $\mathcal{H}$-nak. Megfordítva, legyen γ geodetikusa $\mathcal{H}$-nak. A (4.51) reláció alapján

$$\ddot{\gamma} = \mathbf{h}\ddot{\gamma} = \mathcal{H} \circ \mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} \overset{(2.30)}{=} \mathcal{H} \circ \delta \circ \dot{\gamma} = S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\gamma},$$

γ tehát geodetikusa a $\mathcal{H}$-hoz csatolt $S_{\mathcal{H}}$ szemispraynek. □

4.4.3. Következmény. *Egy Ehresmann-konnexió affinitásai egybeesnek a hozzá csatolt szemispray affinitásaival.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió, $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ és tegyük fel, hogy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ geodetikusa $\mathcal{H}$-nak. Ekkor 4.4.2 értelmében γ $S_{\mathcal{H}}$-nak is geodetikusa, tehát

$$\begin{aligned} S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} &= S_{\mathcal{H}} \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} = \mathcal{H} \circ \delta \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} = \mathcal{H} \circ \varphi_{\#}\delta \circ \varphi_* \circ \dot{\gamma} = \\ &= \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \delta \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \dot{\gamma} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \delta \circ \dot{\gamma} = \\ &= \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \mathcal{H} \circ \mathbf{j} \circ \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma} = \mathbf{h} \circ \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} \overset{\text{felt.}}{=} \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}}. \end{aligned}$$

Megfordítva, ha $\varphi \in \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}})$ és γ geodetikusa $S_{\mathcal{H}}$-nak (és így $\mathcal{H}$-nak is), akkor

$$\mathbf{h} \circ \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} \overset{\text{felt.}}{=} \mathcal{H} \circ \mathbf{j} \circ S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} =$$
$$= \mathcal{H} \circ \delta \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S_{\mathcal{H}} \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} \overset{\text{felt.}}{=} \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}},$$

azaz $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$. □

4.4.4. Lemma. *Ha egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió homogén, akkor $\mathcal{H}$ geodetikusai egybeesnek a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás geodetikusaival.*

Bizonyítás. Vegyük észre, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}))(t) \overset{(1.29)}{=} \nabla_{\ddot{\gamma}(t)}\delta = \nabla\delta(\ddot{\gamma}(t)) \overset{4.2.5.}{=} \mathcal{V} \circ \ddot{\gamma}(t),$$

és így

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}) = \mathcal{V} \circ \ddot{\gamma}.$$

Innen kiolvasható ∇ és $\mathcal{H}$ geodetikusainak egybeesése. □

4.4.5. Következmény. *Homogén $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió esetén*

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\nabla), \tag{4.52}$$

ahol ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás.

4.4.6. Állítás. *Egy Ehresmann-konnexió által indukált Berwald-deriválás geodetikusai akkor és csak akkor esnek egybe az Ehresmann-konnexió geodetikusaival, ha az Ehresmann-konnexióhoz csatolt szemispray spray.*

Bizonyítás. Megtartva az előző lemma jelöléseit, tetszőleges $t \in I$ esetén

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}))(t) \overset{(1.29)}{=} \nabla\delta(\ddot{\gamma}(t)) \overset{(4.29)}{=} (\mathbf{t} \circ \mathbf{j} + \mathcal{V})(\ddot{\gamma}(t)) =$$
$$= \mathcal{V}(\ddot{\gamma}(t)) + \mathbf{t}(\mathbf{j}(\ddot{\gamma}(t))) \overset{(2.30)}{=} \mathcal{V} \circ \ddot{\gamma}(t) + \mathbf{t}(\delta)(\dot{\gamma}(t)).$$

Mivel

$$\mathbf{t}(\delta) = \mathcal{V}[S_{\mathcal{H}}, C] = -\mathcal{V}[C, S_{\mathcal{H}}],$$

következik, hogy

$$\nabla_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}) = \mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} \iff \mathbf{t}(\delta) = 0 \overset{4.2.3.}{\iff} [C, S_{\mathcal{H}}] = S_{\mathcal{H}},$$

amiből adódik az állítás. □

4.5. Ehresmann-konnexiók automorfizmusai

Emlékeztetünk rá, hogy ha $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexió az M sokaság fölött és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $\mathcal{H}$ φ általi visszahúzottja

$$\varphi^{\#}\mathcal{H} = \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$$

(lásd 4.2.10).

4.5.1. Lemma és definíció. *Egy M sokaság fölötti $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió* **automorfizmus***án olyan $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ transzformációt értünk, amelyre $\varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, azaz*

$$\varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*) \tag{4.53}$$

teljesül. $\mathcal{H}$ összes automorfizmusa csoportot alkot a kompozíció műveletével, ezt a csoportot $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$-val jelöljük. △

4.5.2. Állítás. *Megtartva az előző lemma jelöléseit, az alábbi állítások ekvivalensek:*

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \; (\iff \varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*))\,; \tag{4.54}$$

$$(\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \varphi_{**}; \tag{4.55}$$

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}; \tag{4.56}$$

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**}; \tag{4.57}$$

$$(\varphi_*)_{\#} X^{\mathsf{h}} = (\varphi_{\#} X)^{\mathsf{h}}, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{4.58}$$

Bizonyítás. A 4.2.10. lemma alapján az állítás teljesülése nyilvánvaló. □

4.5.3. Állítás. *Legyen $\mathcal{H}$ egy Ehresmann-konnexió és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ automorfizmusa $\mathcal{H}$-nak. Ekkor érvényesek a következő relációk:*

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ \varphi_{\#}; \tag{4.59}$$

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \times \varphi_{\#}); \tag{4.60}$$

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_{\#}. \tag{4.61}$$

Bizonyítás. Egyszerű számolás a 4.2.10. és 4.5.2. állítások alkalmazásával. □

4.5.4. Állítás. *Ha φ automorfizmusa a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, akkor automorfizmusa az általa indukált Berwald-deriválásnak is, következésképpen*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Aut}(\nabla). \tag{4.62}$$

Bizonyítás. A $\mathcal{H}$ által indukált Berwald deriválást meghatározzák a

$$\nabla_{X^{\mathsf{v}}}\widehat{Y}=0,\quad \nabla_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}=\mathcal{V}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]\qquad (X,Y\in\mathfrak{X}(M))$$

formulák (lásd (4.21)), így az 1.6.1.-ben mondottak értelmében $\varphi\in\mathrm{Aut}(\nabla)$ igazolásához elegendő azt megmutatnunk, hogy

$$\nabla_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y}=0\quad \text{és}\quad \varphi_\#(\nabla_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y})=\nabla_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{Y}.$$

Az első reláció közvetlenül adódik (2.38) és (2.44) alapján. Ami a másodikat illeti, a

$$\begin{aligned}\varphi_\#(\nabla_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y})&\overset{(4.21)}{=}(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\mathcal{V}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]\circ\varphi_*^{-1}\overset{(4.55)}{=}\\ &=\mathcal{V}\circ\varphi_{**}\circ[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]\circ\varphi_*^{-1}=\mathcal{V}\circ(\varphi_*)_\#[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]=\\ &=\mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}},(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}]\overset{(4.58)}{=}\mathcal{V}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}},(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}]\overset{(4.21)}{=}\\ &=\nabla_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}}\widehat{\varphi_\# X}\overset{(4.58)}{=}\nabla_{(\varphi_*)_\#(X^{\mathsf{h}})}\varphi_\#\widehat{X}\end{aligned}$$

számolás mutatja, hogy ez is teljesül. □

4.5.5. Állítás. *Ha* $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, *akkor* $\varphi\in\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}})$, *ahol* $S_{\mathcal{H}}:=\mathcal{H}\circ\delta$ *a* $\mathcal{H}$-*hoz csatolt szemispray. Megfordítva, ha* S *szemispray* M *fölött és* $\mathcal{H}_S$ *az* S *által indukált Ehresmann-konnexió (lásd 4.1.3), akkor* $\mathrm{Aut}(S)\subset\mathrm{Aut}(\mathcal{H}_S)$.

Bizonyítás. Ha $\varphi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, akkor

$$\begin{aligned}\varphi_{**}\circ S_{\mathcal{H}}\circ\varphi_*^{-1}&=\varphi_{**}\circ\mathcal{H}\circ\delta\circ\varphi_*^{-1}\overset{(4.54)}{=}\\ &=\mathcal{H}\circ(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\delta\circ\varphi_*^{-1}=\mathcal{H}\circ\delta=S_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

így $\varphi\in\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}})$.
Megfordítva, legyen S szemispray és $\varphi\in\mathrm{Aut}(S)$. Ekkor bármely $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőre,

$$\begin{aligned}\varphi_{**}\circ\mathcal{H}_S(\widehat{X})&\overset{(4.12)}{=}\frac{1}{2}\left(\varphi_{**}\circ X^{\mathsf{c}}+\varphi_{**}\circ[X^{\mathsf{v}},S]\right)=\\ &=\frac{1}{2}\left(\varphi_{**}\circ X^{\mathsf{c}}\circ\varphi_*^{-1}+\varphi_{**}\circ[X^{\mathsf{v}},S]\circ\varphi_*^{-1}\right)\circ\varphi_*=\\ &=\frac{1}{2}\left((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}}+(\varphi_*)_\#[X^{\mathsf{v}},S]\right)\circ\varphi_*=\\ &=\frac{1}{2}\left((\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}+[(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}},(\varphi_*)_\# S]\right)\circ\varphi_*\overset{\text{felt.}}{=}\\ &=\frac{1}{2}\left((\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}+[(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}},S]\right)\circ\varphi_*=\mathcal{H}_S(\widehat{\varphi_\# X})\circ\varphi_*=\\ &=\mathcal{H}_S\circ\varphi_\#\widehat{X}\circ\varphi_*=\mathcal{H}_S\circ(\varphi_*\times\varphi_*)\circ\widehat{X},\end{aligned}$$

és ez bizonyítja az állítás második részét. □

4.5.6. Tétel. *Az M sokaság egy φ diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy M fölötti $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha automorfizmusa az $S_{\mathcal{H}}$ csatolt szemisprayneк, és teljesül a $\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$ reláció.*

Bizonyítás. A 4.5.3. és 4.5.5. állítások alapján a feltétel szükséges. Az elegendőség bizonyításához tekintsünk egy $\varphi \in \mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}})$ leképezést és tegyük fel, hogy $\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$. Ekkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőt véve,

$$\varphi_\# \mathbf{T^s}(\widehat{X}) = \varphi_\# \left(\mathcal{V}\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}\right]\right) =$$
$$= \varphi_\# \circ \mathcal{V}\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\# \left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{h}}\right] \overset{\text{felt.}}{=} \varphi_\# \circ \mathcal{V}\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, (\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H} \circ \widehat{X}\right].$$

Másrészt,

$$\mathbf{T^s}(\varphi_\# \widehat{X}) = \mathbf{T^s}(\widehat{\varphi_\# X}) = \mathcal{V}\left[S_{\mathcal{H}}, (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, \mathcal{H} \circ \widehat{\varphi_\# X}\right] =$$
$$= \mathcal{V}\left[S_{\mathcal{H}}, (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, \mathcal{H} \circ \varphi_\# \circ \widehat{X}\right] \overset{\text{felt.}}{=}$$
$$= \mathcal{V} \circ (\varphi_*)_\# \left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] - \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, \mathcal{H} \circ \varphi_\# \circ \widehat{X}\right].$$

Így a második feltétel ($\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$) az alábbi egyenlőséggé alakítható:

$$\left(\varphi_\# \circ \mathcal{V} - \mathcal{V} \circ (\varphi_*)_\#\right)\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] = \mathbf{j}\left[S_{\mathcal{H}}, \left((\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H} - \mathcal{H} \circ \varphi_\#\right) \widehat{X}\right].$$

Ezzel ekvivalens a következő:

$$\mathbf{i} \circ \left(\varphi_\# \circ \mathcal{V} - \mathcal{V} \circ (\varphi_*)_\#\right)\left[S_{\mathcal{H}}, X^{\mathsf{v}}\right] = \mathbf{J}\left[S_{\mathcal{H}}, \left((\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H} - \mathcal{H} \circ \varphi_\#\right) \widehat{X}\right]. \tag{4.63}$$

Ennek bal oldalát alakítva,

$$\mathbf{i} \circ \left(\varphi_\# \circ \mathcal{V} - \mathcal{V} \circ (\varphi_*)_\#\right) = (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#.$$

(4.63) jobb oldalán a zárójeles kifejezés a következőképpen változik:

$$\left((\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H} - \mathcal{H} \circ \varphi_\#\right) \widehat{X} \overset{(2.24)}{=} \left((\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H} \circ \mathbf{j} - \mathcal{H} \circ \varphi_\# \circ \mathbf{j}\right) X^{\mathsf{c}} \overset{(2.46)}{=}$$
$$= \left((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{h} - \mathbf{h} \circ (\varphi_*)_\#\right) X^{\mathsf{c}} == \left(\mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\# - (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v}\right) X^{\mathsf{c}}.$$

Ezek alapján (4.63) a

$$\left((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#\right)\left[S_{\mathcal{H}}, \mathbf{J} X^{\mathsf{c}}\right] = -\mathbf{J}\left[S_{\mathcal{H}}, \left((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#\right) X^{\mathsf{c}}\right]. \tag{4.64}$$

alakot ölti. Mivel

$$\mathbf{J}\left((\varphi_*)_\# \mathbf{v} X^{\mathsf{c}}\right) = \mathbf{J} \circ \varphi_{**} \circ \mathbf{v} X^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*^{-1} =$$
$$= \varphi_{**} \circ \mathbf{J}(\mathbf{v} X^{\mathsf{c}}) \circ \varphi_*^{-1} = 0,$$

$(\varphi_*)_\#\mathbf{v}X^\mathsf{c}$ vertikális, és emiatt $((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, X^\mathsf{c}$ szintén vertikális. Alkalmazható ily módon a (3.4) Grifone-azonosság, és így azt kapjuk, hogy (4.64) ekvivalens a

$$((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\,[S_\mathcal{H}, \mathbf{J}X^\mathsf{c}] = ((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, X^\mathsf{c} \tag{4.65}$$

relációval. Itt, a 3.1.3 lemmát felhasználva,

$$[S_\mathcal{H}, \mathbf{J}X^\mathsf{c}] = -\,[X^\mathsf{v}, S_\mathcal{H}] = -X^\mathsf{c} - \eta, \qquad \eta \in \mathfrak{X}^\mathsf{v}(TM).$$

$((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, \eta = 0$, mivel bármely $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, Y^\mathsf{v} &= (\varphi_*)_\# Y^\mathsf{v} - \mathbf{v}\,((\varphi_*)_\# Y^\mathsf{v}) = \\ &= (\varphi_\# Y)^\mathsf{v} - \mathbf{v}(\varphi_\# Y)^\mathsf{v} = 0.\end{aligned}$$

Így végül a (4.65) relációt a

$$-\,((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, X^\mathsf{c} = ((\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v} - \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\#)\, X^\mathsf{c}$$

formában írhatjuk fel, amiből következik, hogy $(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{v}X^\mathsf{c} = \mathbf{v} \circ (\varphi_*)_\# X^\mathsf{c}$. Ebből $\varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**}$ adódik, és ez a 4.5.2 alapján ekvivalens azzal, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. □

4.5.7. Következmény. *Ha M egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexióval ellátott sokaság, akkor egy $\varphi\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus pontosan akkor automorfizmusa $\mathcal{H}$-nak, ha $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ és az erős torzióra teljesül a $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^\mathsf{s} = \mathbf{T}^\mathsf{s} \circ \varphi_\#$ feltétel.*

Bizonyítás. Az előző tételre tekintettel csupán azt kell belátni, hogy $\mathrm{Aut}(S_\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$. Ez pedig igaz, ugyanis

$$\mathrm{Aut}(S_\mathcal{H}) \overset{3.2.5.}{=} \mathrm{Aff}(S_\mathcal{H}) \overset{4.4.3.}{=} \mathrm{Aff}(\mathcal{H}).$$

□

Diszkusszió

Legyen $\mathring{D}$ kovariáns deriválás az M sokaságon (vagyis a τ_M érintőnyalábon), a torzióját jelölje $T(\mathring{D})$. Jól ismert a klasszikus elméletből (lásd például [43]), hogy *M-nek egy φ diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa $\mathring{D}$-nak, ha affinitása $\mathring{D}$-nak (azaz „totálgeodetikus transzformáció”) és megőrzi a torziót, vagyis* $\varphi_\# \circ T(\mathring{D}) = T(\mathring{D}) \circ \varphi_\#$. Szakaszunk hátralevő részében azt vizsgáljuk meg, hogy miként kapható vissza ez a fontos tétel az Ehresmann-konnexiókkal kapcsolatban most nyert eredményünkből.

Emlékeztetünk arra, hogy ha $\mathcal{H}$ olyan *homogén* Ehresmann-konnexió M fölött, amely a *teljes értelmezési tartományán* C^1*-osztályú*, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathring{D}$ kovariáns deriválás M-en, hogy tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$(4.66) \qquad (\mathring{D}_X Y)^{\mathsf{v}} = [X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}}] = \mathbf{i}\nabla_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}$$

(∇ a $\mathcal{H}$-ból származó Berwald-deriválás), és $\mathring{D}$ *geodetikusai egybeesnek* $\mathcal{H}$ *geodetikusaival* ([37] 2.32 Prop. 3; lásd még [12], [38]). Ebből azonnal következik, hogy $\mathrm{Aff}(\mathring{D}) = \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$.

Megmutatjuk először is, hogy $\mathring{D}$ *és* $\mathcal{H}$ *automorfizmuscsoportja egybeesik*:

$$(4.67) \qquad \mathrm{Aut}(\mathring{D}) = \mathrm{Aut}(\mathcal{H}).$$

Ha $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$, akkor tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$(\varphi_\# \mathring{D}_X Y)^{\mathsf{v}} = (\varphi_*)_\# (\mathring{D}_X Y)^{\mathsf{v}} \overset{(4.66)}{=} (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i}\nabla_{X^{\mathsf{h}}} Y = \mathbf{i} \circ \varphi_\# (\nabla_{X^{\mathsf{h}}} \widehat{Y}) \overset{4.5.4.}{=}$$
$$= \mathbf{i}\nabla_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}} \varphi_\# \widehat{Y} \overset{(4.58)}{=} \mathbf{i}\nabla_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}} \widehat{\varphi_\# Y} \overset{(4.66)}{=} (\mathring{D}_{\varphi_\# X} \varphi_\# Y)^{\mathsf{v}},$$

ami azt jelenti, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D})$. Ezzel beláttuk, hogy $\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Aut}(\mathring{D})$. A fordított irányú tartalmazás igazolásához tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D})$. Ekkor tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$(\varphi_*)_\# (\mathring{D}_X Y)^{\mathsf{v}} = (\mathring{D}_{\varphi_\# X} \varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}.$$

Tekintettel $\mathring{D}$ definíciójára, ez ekvivalens a

$$(4.68) \qquad [(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} - (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] = 0$$

relációval. Itt a $(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} - (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}$ vektormező vertikális, ugyanis

$$\mathbf{J}((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} - (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}) \overset{(2.47)}{=} (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} X^{\mathsf{h}} - \mathbf{J}(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}} =$$
$$= (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} \circ \mathbf{j} \circ \mathcal{H}(\widehat{X}) - \mathbf{i} \circ \mathbf{j} \circ \mathcal{H}(\varphi_\# X) =$$
$$= (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}(\varphi_\# X) = (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} - (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = 0.$$

Ismert, hogy TM egy vertikális vektormezője pontosan akkor vertikális lift, ha a vertikális liftekkel képzett Lie-zárójelei eltűnnek ([37], 2.4.(6)). Így (4.68)-ból következik, hogy van olyan $Z \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, amelyre

$$(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} - (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}} = Z^{\mathsf{v}}.$$

Ezt felhasználva, $\mathcal{H}$ homogenitása alapján

$$Z^{\mathsf{v}} \overset{(2.19)}{=} [Z^{\mathsf{v}}, C] = [(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, C] - [(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, C] =$$
$$[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# C] - [(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, C] = (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{it}(\widehat{X}) - \mathbf{it}((\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}) = 0$$

adódik, tehát

$$(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Ez 4.5.2. értelmében ekvivalens azzal, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$. Következésképpen $\mathrm{Aut}(\mathring{D}) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ is fennáll, amivel (4.67) bizonyítást nyert.

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy $\mathring{D}$ és $\mathcal{H}$ torziójának kapcsolatát a

$$(T(\mathring{D})(X,Y))^{\mathsf{v}} = \mathbf{i}\mathbf{T}(\widehat{X},\widehat{Y}); \qquad X,Y \in \mathfrak{X}(M) \tag{4.69}$$

reláció adja, így (4.60) figyelembevételével

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \Longrightarrow \varphi_\# \circ T(\mathring{D}) = T(\mathring{D}) \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#). \tag{4.70}$$

Összegezve: amennyiben $\mathcal{H}$ a teljes értelmezési tartományán C^1-osztályú, homogén Ehresmann-konnexió M fölött és $\mathring{D}$ az általa az (4.66) formula szerint meghatározott kovariáns deriválás, akkor érvényesek a következő implikációk:

$$\begin{tikzcd}
\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D}) \arrow[d, leftrightarrow, "(4.67)"'] & \left\{\begin{array}{l} \varphi \in \mathrm{Aff}(\mathring{D}) \\ \varphi_\# \circ T(\mathring{D}) = T(\mathring{D}) \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#) \end{array}\right. \arrow[d] \\
\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \arrow[ur, "(4.70)"] \arrow[r, leftrightarrow, "4.5.7"'] & \left\{\begin{array}{l} \varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\mathring{D}) \\ \varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_\# \end{array}\right.
\end{tikzcd}$$

Innen közvetlenül kiolvasható a diszkusszió elején idézett klasszikus tétel, sőt az is kiderül, hogy ez valójában kis mértékben élesíthető, nevezetesen igaz a

4.5.8. Tétel. *Az M sokaság egy φ diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy M-en adott $\mathring{D}$ kovariáns deriválásnak, ha affinitása $\mathring{D}$-nek és $\varphi_\# \circ i_\delta \mathbf{T} = i_\delta \mathbf{T} \circ \varphi_\#$, ahol $\mathbf{T}$ a (4.69)-cel karakterizálható tenzor.*

Bizonyítás. Az előzőekhez már csak annyit kell hozzátenni, hogy a $\mathring{D}$-hoz tartozó Ehresmann-konnexió erős torziója a homogenitás miatt az $i_\delta \mathbf{T}$ tenzorra redukálódik (v.ö. (4.34)). $\square$

5. fejezet

Vonalelem D-sokaságok

5.1. Regularitás és csatoltság

5.1.1. Definíció. Vonalelem D-sokaság*on olyan (M, D) párt értünk, ahol M egy sokaság, D pedig kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon, vagyis olyan*

$$D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \qquad (\xi, \widetilde{Y}) \longmapsto D_\xi \widetilde{Y}$$

leképezés, amely első változójában tenzoriális, második változójában deriváció. A D-hez tartozó v-kovariáns deriválás*on a*

$$\begin{gathered} D^{\mathsf{v}}\colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \\ (\widetilde{X}, \widetilde{Y}) \longmapsto D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := D_{\mathbf{i}\widetilde{X}} \widetilde{Y} \end{gathered} \tag{5.1}$$

leképezést értjük.

Egy (M, D) vonalelem D-sokaság (vagy egyszerűen a D kovariáns deriválás) *torzió*ja a

$$\begin{gathered} T(D)\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \\ T(D)(\xi, \eta) := D_\xi \mathbf{j}\eta - D_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}\,[\xi, \eta] \end{gathered} \tag{5.2}$$

$\binom{1}{2}$-tenzor. Közvetlenül látható, hogy $T(D)$ ferdeszimmetrikus és mindkét változójában tenzoriális.

D^{v} és a ∇^{v} kanonikus vertikális derivált (lásd (4.24)) különbségtenzora a

$$\mathcal{S}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{X} = \mathbf{j}[\mathbf{i}\widetilde{Y}, \eta] - D_{\mathbf{i}\widetilde{Y}} \widetilde{X} \qquad (\mathbf{j}\eta = \widetilde{X}) \tag{5.3}$$

leképezés, amelyet *Finsler-torzió*nak is szokás nevezni ([16], [37]).

5.1.2. Definíció. *A $\tau^*\tau$ nyalábon adott D kovariáns deriválás* deflexió*ján*

$$\mu\colon \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \qquad \xi \longmapsto \mu(\xi) := D_\xi \delta, \tag{5.4}$$

röviden a $\mu := D\delta$ *leképezést értjük.* D v-deflexiója *a*

$$\mu^{\mathsf{v}} := \mu \circ \mathbf{i} \colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \quad \widetilde{X} \longmapsto \mu^{\mathsf{v}}\widetilde{X} := \mu(\mathbf{i}\widetilde{X}) = D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\delta \tag{5.5}$$

leképezés. A kovariáns deriválást **regulárisnak***, illetve* **erősen regulárisnak** *mondjuk aszerint, amint a v-deflexiója fibrumonként injektív leképezés, illetve* $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ *identikus transzformációja.* D vertikálisan természetes*, ha* $D^{\mathsf{v}} = \nabla^{\mathsf{v}}$*. Ha* D *reguláris, akkor magát a vonalelem* D*-sokaságot is regulárisnak mondjuk.*

Megjegyzés. Ha μ^{v} fibrumonként injektív, akkor egyben bijektív is fibrumonként, mert fibrumonként lineáris transzformáció, és a fibrumok véges dimenziós vektorterek.

5.1.3. Lemma. *Egy* (M, D) *vonalelem* D*-sokaság akkor és csak akkor reguláris, ha a* $\mu = D\delta$ *deflexió nulltere direkt összeadandó* $\mathfrak{X}(TM)$*-ben, mégpedig*

$$\mathrm{Ker}(\mu) \oplus \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM) = \mathfrak{X}(TM). \tag{5.6}$$

Bizonyítás. (1) Tegyük fel, hogy D reguláris. Ha $\xi \in \mathrm{Ker}(\mu) \cap \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$, akkor $\xi = \mathbf{i}\widetilde{X}$ ($\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$) írható, így a $\xi \in \mathrm{Ker}(\mu)$ feltétel azt adja, hogy

$$0 = \mu(\xi) = \mu \circ \mathbf{i}(\widetilde{X}) = \mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}),$$

amiből μ^{v} injektívsége miatt $\widetilde{X} = 0$ következik, és így egyben $\xi = 0$. Ezzel beláttuk, hogy

$$\mathrm{Ker}(\mu) \cap \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM) = \{0\}\,. \tag{$*$}$$

A $\mu^{\mathsf{v}} = \mathbf{i} \circ \mu$ kapcsolat alapján

$$\mu(\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)) = \mu(\mathbf{i}\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)) = \mu^{\mathsf{v}}(\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)) = \mathrm{Sec}(\tau^*\tau),$$

hiszen μ^{v} egyben szürjektív is. Így $\mathrm{rang}(\mathrm{Im}(\mu)) = n$, és ezért egyben $\mathrm{rang}(\mathrm{Ker}(\mu)) = n$. Ez az észrevétel a $(*)$ relációval együtt (5.6) helyességét jelenti.
(2) Megfordítva, tegyük fel (5.6) teljesülését. Ha $\mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}_1) = \mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}_2)$, akkor

$$0 = \mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}_1 - \widetilde{X}_2) = \mu(\mathbf{i}\widetilde{X}_1 - \mathbf{i}\widetilde{X}_2),$$

így $\mathbf{i}\widetilde{X}_1 - \mathbf{i}\widetilde{X}_2 \in \mathrm{Ker}(\mu)$. Ugyanakkor $\mathbf{i}\widetilde{X}_1 - \mathbf{i}\widetilde{X}_2 \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$, ezért a feltétel miatt $\mathbf{i}\widetilde{X}_1 = \mathbf{i}\widetilde{X}_2$, innen pedig $\widetilde{X}_1 = \widetilde{X}_2$ következik. Ezzel beláttuk, hogy μ^{v} injektív; D tehát reguláris. □

5.1.4. Lemma. *Egy vonalelem* D*-sokaság vertikális deflexiója előállítható a*

$$\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta \mathcal{S} \tag{5.7}$$

alakban, ahol $\mathcal{S}$ *a Finsler-torzió.*

Bizonyítás. Tetszőleges $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ esetén

$$i_\delta \mathcal{S}(\widetilde{X}) = \mathcal{S}(\delta, \widetilde{X}) = \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\delta - D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\delta =$$
$$= \mathbf{j}[\mathbf{i}\widetilde{X}, \mathcal{H} \circ \delta] - \mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}) \overset{(3.4)}{=} \widetilde{X} - \mu^{\mathsf{v}}(\widetilde{X}) = (1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - \mu^{\mathsf{v}})(\widetilde{X}),$$

ami a kívánt formula helyességét jelenti. □

5.1.5. Definíció. *A* $D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ *kovariáns deriválás* Moór-Vanstone reguláris, *ha* $(\mu^{\mathsf{v}} - 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)})^2 = 0$.

5.1.6. Következmény. *Ha* (M, D) *vonalelem D-sokaság, akkor*

$$D \text{ vertikálisan természetes} \iff \mathcal{S} = 0, \tag{5.8}$$
$$D \text{ erősen reguláris} \iff i_\delta\mathcal{S} = 0, \tag{5.9}$$
$$D \text{ Moór-Vanstone reguláris} \iff i_\delta\mathcal{S} \circ i_\delta\mathcal{S} = 0, \tag{5.10}$$
$$D \text{ reguláris} \iff (1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}) \text{ bijektív}, \tag{5.11}$$

következésképpen érvényesek az alábbi implikációk:

$$\begin{aligned} &\text{vertikális természetesség} \implies \text{erős regularitás} \implies \\ &\implies \text{Moór-Vanstone regularitás} \implies \text{regularitás.} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Bizonyítás. A (5.8) evidens, (5.9), (5.10) és (5.11) közvetlenül adódik (5.7)-ből. (5.8)–(5.10)-ből a (5.12)-beli első három implikáció kiolvasható.
Végül a Moór-Vanstone regularitás maga után vonja a regularitást, mivel

$$\mu^{\mathsf{v}}(2 \cdot 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - \mu^{\mathsf{v}}) \overset{(5.7)}{=} 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - (i_\delta\mathcal{S})^2 \overset{(5.10)}{=} 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)},$$
$$(2 \cdot 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - \mu^{\mathsf{v}})\mu^{\mathsf{v}} = (1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S})(1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}) = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)},$$

tehát μ^{v} invertálható (inverze a $(2 \cdot 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - \mu^{\mathsf{v}})$ transzformáció) – és így μ^{v} bijektív. □

5.1.7. Definíció. *Legyen* (M, D) *vonalelem D-sokaság, és tegyük fel, hogy* M *fölött adva van egy* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió. Ekkor a*

$$\begin{aligned} D^{\mathsf{h}}\colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) &\longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \\ (\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &\longmapsto D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} \end{aligned} \tag{5.13}$$

leképezést h-kovariáns deriválás*nak nevezzük.*
D kovariáns deriválás $\mathcal{H}$-deflexiója *a*

$$\mu^{\mathcal{H}} := D^{\mathsf{h}}\delta\colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau), \qquad \widetilde{X} \longmapsto \mu^{\mathcal{H}}(\widetilde{X}) := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\delta, \tag{5.14}$$

leképezés. Azt mondjuk, hogy D $\mathcal{H}$-hoz csatolt, *ha*

$$\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H}), \tag{5.15}$$

illetve hogy D erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, *ha*

$$\mu = D\delta = \mathcal{V}. \tag{5.16}$$

Vegyük észre, hogy D $\mathcal{H}$-deflexiója $\mu^{\mathcal{H}} = \mu \circ \mathcal{H}$.

5.1.8. Lemma. *Egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexióból származó Berwald-deriválás akkor és csak akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha $\mathcal{H}$ homogén.*

Bizonyítás. Ez közvetlenül adódik az erős csatoltság definíciójából és 4.2.5-ből. □

5.1.9. Állítás. *Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság, $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió M fölött.*
(1) Ha D pontosan akkor csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha reguláris és eltűnik a $\mathcal{H}$-deflexiója.
(2) D akkor és csak akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha erősen reguláris és eltűnik a $\mathcal{H}$-deflexiója.

Bizonyítás. *(1)* Ha D $\mathcal{H}$-hoz csatolt, és így $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$, akkor $\mathrm{Ker}(\mu) \oplus \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM) = \mathfrak{X}(TM)$, ami 5.1.3. értelmében D regularitását jelenti. Mivel tetszőleges $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ esetén $\mu^{\mathcal{H}}(\widetilde{X}) = \mu \circ \mathcal{H}(\widetilde{X}) = 0$, ekkor D $\mathcal{H}$-deflexiója is eltűnik.
Megfordítva, legyen D reguláris és teljesüljön $\mu^{\mathcal{H}} = 0$. Tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező egyértelműen előállítható a

$$\xi = \mathbf{v}\xi + \mathbf{h}\xi = \mathbf{i}(\mathcal{V}\xi) + \mathcal{H}(\mathbf{j}\xi)$$

alakban. Ha $\xi \in \mathrm{Ker}(\mu)$, akkor

$$0 = \mu(\xi) = \mu \circ \mathbf{i}(\mathcal{V}\xi) + \mu \circ \mathcal{H}(\mathbf{j}\xi) = \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}\xi) + \mu^{\mathcal{H}}(\mathbf{j}\xi) = \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}\xi),$$

amiből μ^{v} injektívsége miatt $\mathcal{V}\xi = 0$, ebből pedig $\mathbf{v}\xi = 0$ következik. Így tehát $\xi = \mathbf{h}\xi \in \mathrm{Im}(\mathcal{H})$. Megfordítva, ha $\xi \in \mathrm{Im}(\mathcal{H})$, akkor $\xi = \mathbf{h}\xi = \mathcal{H}(\mathbf{j}\xi)$, és így

$$\mu(\xi) = \mu \circ \mathcal{H}(\mathbf{j}\xi) = \mu^{\mathcal{H}}(\mathbf{j}\xi) = 0,$$

tehát $\xi \in \mathrm{Ker}(\mu)$ és így $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$.
(2) Ha D a $\mathcal{H}$-hoz erősen csatolt, akkor

$$\mu^{\mathsf{v}} = D\delta \circ \mathbf{i} = \mathcal{V} \circ \mathbf{i} \overset{(4.4)}{=} 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)},$$
$$\mu^{\mathcal{H}} = D\delta \circ \mathcal{H} = \mathcal{V} \circ \mathcal{H} \overset{(4.5)}{=} 0,$$

tehát D valóban erősen reguláris, és $\mu^{\mathcal{H}} = 0$.
Megfordítva, ha D erősen reguláris és a $\mathcal{H}$-deflexiója eltűnik, akkor tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ esetén

$$D\delta(\xi) = D\delta(\mathbf{h}\xi + \mathbf{v}\xi) = D\delta(\mathcal{H} \circ \mathbf{j}\xi) + D\delta(\mathbf{i} \circ \mathcal{V}\xi) =$$
$$= \mu^{\mathcal{H}}(\mathbf{j}\xi) + \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}\xi) = \mathcal{V}\xi,$$

tehát $D\delta = \mathcal{V}$, azaz D $\mathcal{H}$-hoz csatolt. □

Lokális leírás. Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság. Kijelölve M-en egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképet és tekintve TM-en az (1.11) indukált térképet, D *Christoffel-szimbólumai* ($(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$-ra vonatkozóan) a

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \Gamma^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = C^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} \tag{5.17}$$

relációk által egyértelműen meghatározott

$$\Gamma^k_{ij} \colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad C^k_{ij} \colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad i, j, k \in \{1, \dots, n\}$$

sima függvények.

Az (5.3) által értelmezett Finsler-torzió komponensei

$$\mathcal{S}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} - D_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} \overset{(4.21)}{=} -D_{\frac{\partial}{\partial y^k}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} = -C^i_{kj} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

így D *pontosan akkor vertikálisan természetes, ha* $C^i_{jk} = 0$ $(i, j, k \in \{1, \dots, n\})$. Mivel

$$i_\delta \mathcal{S}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right) = \mathcal{S}\left(y^j \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right) = -y^j C^i_{kj} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

(5.9) értelmében *az erős regularitás lokális feltétele*

$$y^k C^i_{jk} = 0 \qquad (i, j, k \in \{1, \dots, n\}) \tag{5.18}$$

teljesülése. (5.7) alapján azt is megállapíthatjuk, hogy

$$\mu^{\mathsf{v}}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) = \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} - i_\delta \mathcal{S}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) = \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} + y^k C^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \left(\delta^i_j + y^k C^i_{jk}\right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

azaz

$$\mu^{\mathsf{v}}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) = \left(\delta^i_j + y^k C^i_{jk}\right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}; \tag{5.19}$$

következésképpen

$$D \text{ reguláris} \iff \det\left(\delta^i_j + y^k C^i_{jk}\right) \neq 0. \tag{5.20}$$

Végül

$$i_\delta \mathcal{S} \circ i_\delta \mathcal{S}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) = i_\delta \mathcal{S}\left(\mathcal{S}\left(y^k \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right)\right) =$$

$$= -i_\delta \mathcal{S}\left(y^k C^r_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^r}}\right) = -y^k C^r_{jk} \mathcal{S}\left(y^l \widehat{\frac{\partial}{\partial u^l}}, \widehat{\frac{\partial}{\partial u^r}}\right) =$$

$$= y^k y^l C^r_{jk} C^s_{rl} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^s}},$$

ezért D *Moór-Vanstone regularitásának lokális feltétele*

$$y^k y^l C^r_{jk} C^s_{rl} = 0; \qquad j, s \in \{1, \ldots, n\} \tag{5.21}$$

teljesülése.

Megjegyzés. A *regularitási feltétel* egyik első megfogalmazásával H. Akbar-Zadeh egy dolgozatában találkozhatunk ([1], lásd még a [2] monográfiát). Az *erős regularitás* feltétele ekvivalens a Matsumoto-elméletben szereplő C_1-feltétellel (lásd [28], Prop.13.4, Def.13.3), bár ez első ránézésre nem nyilvánvaló. A feltétel lokális alakja Matsumotonál $y^j C^i_{jk} = 0$ – ezért C_1! – az eltérés oka az, hogy Matsumoto a konnexióparaméterek bevezetésénél az (5.17)-belitől különböző konvenciót alkalmaz. Végül az általunk *Moór-Vanstone regularitás*ként említett feltétel az (5.21) lokális formában Moór Arthur [29], illetve J. R. Vanstone ehhez kapcsolódó [41] dolgozatában bukkant fel. Ezt a feltételt csak a teljesség kedvéért említettük meg; úgy találtuk, hogy a többi regularitási feltétel egyszerűbben, illetve hatásosabban alkalmazható (a szerzők által vizsgált kérdésekben is).

Tegyük fel, hogy (M, D) vonalelem D-sokaság és legyen $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. Ekkor a 2.3.1-ben mondottaknak megfelelően $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ automorfizmusa $\tau^*\tau$-nak, így tekinthetjük D $\varphi_* \times \varphi_*$ általi *visszahúzott*ját. Ez 1.6.1. értelmében szintén kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ nyalábon, amelyet $(\varphi_* \times \varphi_*)^\# D$ helyett egyszerűen $\varphi^\# D$-vel jelölünk. (1.21) most a

$$(\varphi^\# D)_\xi \widetilde{Y} := \varphi_\#^{-1} D_{(\varphi_*)_\# \xi} \varphi_\# \widetilde{Y}; \qquad \xi \in \mathfrak{X}(TM), \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \tag{5.22}$$

alakot ölti. Ekvivalens módon,

$$D_{(\varphi_*)_\# \xi} \varphi_\# \widetilde{Y} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ (\varphi^\# D)_\xi \widetilde{Y} \circ \varphi_*^{-1}. \tag{5.23}$$

5.1.10. Lemma. *Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság, $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, és tekintsük az $\varphi^\# D$ kovariáns deriválást. Ha $\varphi^\# D$ deflexiója, illetve v-deflexiója $\mu^\#$, illetve $(\mu^{\mathsf{v}})^\#$, akkor*

$$\mu^\# = \varphi_\#^{-1} \circ \mu \circ (\varphi_*)_\#, \tag{5.24}$$

$$(\mu^{\mathsf{v}})^\# = \varphi_\#^{-1} \circ \mu^{\mathsf{v}} \circ \varphi_\#, \tag{5.25}$$

így ha D reguláris, illetve erősen reguláris, akkor $\varphi^\# D$ is ilyen tulajdonságú.

Bizonyítás. Tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén

$$\mu^\#(\xi) := (\varphi^\# D)_\xi \delta = \varphi_\#^{-1} D_{(\varphi_*)_\# \xi} \varphi_\# \delta \overset{(2.39)}{=} \varphi_\#^{-1} D_{(\varphi_*)_\# \xi} \delta =$$
$$= \varphi_\#^{-1} \mu\left((\varphi_*)_\# \xi\right) = \varphi_\#^{-1} \circ \mu \circ (\varphi_*)_\#(\xi),$$

ami igazolja (5.24)-et.
Hasonló módon, ha $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ tetszőleges, akkor

$$(\mu^{\mathsf{v}})^{\#}(\widetilde{X}) := (\varphi^{\#}D)_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\delta = \varphi_{\#}^{-1}D_{(\varphi_*)_{\#}\mathbf{i}\widetilde{X}}\varphi_{\#}\delta \overset{(2.39),(2.45)}{=} \varphi_{\#}^{-1}D_{\mathbf{i}\varphi_{\#}\widetilde{X}}\delta =$$
$$= \varphi_{\#}^{-1}\mu^{\mathsf{v}}(\varphi_{\#}\widetilde{X}) = \varphi_{\#}^{-1} \circ \mu^{\mathsf{v}} \circ \varphi_{\#}(\widetilde{X}),$$

ami (5.25) helyességét jelenti. □

5.2. Reguláris kovariáns deriválás által indukált Ehresmann-konnexió

5.2.1. Tétel és definíció. *Tegyük fel, hogy (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság. Ekkor az*

$$\ell_D\colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM), \qquad X \longmapsto \ell_D(X) := X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$$

leképezés horizontális liftelés (azaz eleget tesz a 4.1.2.-beli feltételeknek) és így meghatároz egy $\mathcal{H}_D\colon \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$ Ehresmann-konnexiót, amelynél

$$\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)). \tag{5.26}$$

Ezt az Ehresmann-konnexiót a D kovariáns deriválás által indukált Ehresmann-konnexió*nak nevezzük.*
A $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális projektor

$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \mu \tag{5.27}$$

(ahol $\mu := D\delta$, illetve $\mu^{\mathsf{v}} := D^{\mathsf{v}}\delta$ a D deflexiója, illetve v-deflexiója).
A $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió képtere megegyezik a μ deflexió nullterével:

$$\mathrm{Im}(\mathcal{H}_D) = \mathrm{Ker}(\mu). \tag{5.28}$$

Amennyiben – speciálisan – D erősen reguláris, úgy

$$\ell_D(X) = \mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta \qquad (X \in \mathfrak{X}(M)) \quad \textit{és} \tag{5.29}$$
$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ \mu. \tag{5.30}$$

Bizonyítás. Először ellenőrizzük, hogy a 4.1.2.-beli feltételek teljesülnek. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező és $f \in C^\infty(M)$ függvény esetén

$$\ell_D(fX) := (fX)^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{(fX)^{\mathsf{c}}}\delta =$$
$$= f^{\mathsf{v}}X^{\mathsf{c}} + f^{\mathsf{c}}X^{\mathsf{v}} - f^{\mathsf{v}}\mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta - f^{\mathsf{c}}\mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{v}}}\delta =$$
$$= f^{\mathsf{v}}\left(X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta\right) + f^{\mathsf{c}}X^{\mathsf{v}} - f^{\mathsf{c}}\mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D\delta(\mathbf{i}\widehat{X}) \overset{D\delta=\mu}{=}$$
$$= f^{\mathsf{v}}\ell_D(X) - f^{\mathsf{c}}(X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}\mu^{\mathsf{v}}\widehat{X}) =$$
$$= f^{\mathsf{v}}\ell_D(X) - f^{\mathsf{c}}(X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}\widehat{X}) = f^{\mathsf{v}}\ell_D(X),$$

és

$$\mathbf{J} \circ \ell_D(X) = \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} - \mathbf{J}\mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta = \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}} = \ell^{\mathsf{v}}(X).$$

A horizontális projektort vizsgálva:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_D(X^{\mathsf{c}}) :=& \mathcal{H}_D \circ \mathbf{j}(X^{\mathsf{c}}) = \mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}(D_{X^{\mathsf{c}}}\delta) = \\ &= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}\mu(X^{\mathsf{c}}) = (1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \mu)(X^{\mathsf{c}}); \\ \mathbf{h}_D(X^{\mathsf{v}}) :=& \mathcal{H}_D \circ \mathbf{j} \circ \mathbf{i}(\widehat{X}) = 0, \end{aligned}$$

és a vertikálisan liftelt vektormezőket (5.30) jobb oldala is eltünteti:

$$\begin{aligned} (1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \mu)(X^{\mathsf{v}}) =& X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}\mu\mathbf{i}(\widehat{X}) = \\ &= X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}\mu^{\mathsf{v}}(\widehat{X}) = X^{\mathsf{v}} - \mathbf{i}\widehat{X} = 0. \end{aligned}$$

Érvényes tehát a $\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \mu$ reláció.
Mivel

$$\begin{aligned} \mu(\mathcal{H}_D(\widehat{X})) &= \mu(X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1}(D_{X^{\mathsf{c}}}\delta)) = \\ &= \mu(X^{\mathsf{c}}) - \mu \circ \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \mu(X^{\mathsf{c}}) = \mu(X^{\mathsf{c}}) - \mu(X^{\mathsf{c}}) = 0, \end{aligned}$$

$\operatorname{Im}(\mathcal{H}_D) \subset \operatorname{Ker}(\mu)$ is teljesül.
Másrészt tetszőleges $\xi \in \operatorname{Ker}(\mu)$ vektormezőt véve, és ξ-t $\xi = \mathbf{h}_D\xi + \mathbf{v}_D\xi$ alakban állítva elő,

$$\begin{aligned} \mu(\xi) = \mu(\mathbf{h}_D\xi) + \mu(\mathbf{v}_D\xi) &= \mu(\mathcal{H}_D \circ \mathbf{j}(\xi)) + \mu(\mathbf{i} \circ \mathcal{V}_D(\xi)) = \\ &= \mu \circ \mathbf{i}(\mathcal{V}_D(\xi)) = \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}_D(\xi)) \end{aligned}$$

folytán

$$\xi \in \operatorname{Ker}(\mu) \quad \Longrightarrow \quad \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}_D(\xi)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{V}_D(\xi) = 0,$$

hiszen a feltevés értelmében μ^{v} bijektív.
$\mathcal{V}_D(\xi) = 0$ miatt egyben $\mathbf{v}_D(\xi) = \mathbf{i} \circ \mathcal{V}_D(\xi) = 0$, és ezért $\xi = \mathbf{h}_D\xi \in \operatorname{Im}(\mathcal{H}_D)$, tehát

$$\xi \in \operatorname{Ker}(\mu) \quad \Longrightarrow \quad \xi \in \operatorname{Im}(\mathcal{H}_D),$$

és így $\operatorname{Ker}(\mu) \subset \operatorname{Im}(\mathcal{H}_D)$. Ezzel a bizonyítás teljes. □

Lokális leírás. Felhasználva a D kovariáns deriválás (5.17)-ben bevezetett Christoffel-szimbólumait, tetszőleges $j \in \{1, \dots, n\}$ indexre

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_D\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}}\right) &:= \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)^{\mathsf{c}}} y^k \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} y^k D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \frac{\partial}{\partial x^j} - y^k \Gamma^i_{jk} \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^j} - y^k \Gamma^i_{jk} \mathbf{i} \tilde{L}^r_i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^r}} = \frac{\partial}{\partial x^j} - y^k \Gamma^i_{jk} \tilde{L}^r_i \frac{\partial}{\partial y^r}\ , \end{aligned}$$

ahol (5.20) alapján

$$(\tilde{L}_i^r) := (L_i^r)^{-1} = (\delta_i^r + y^s C_{is}^r)^{-1}.$$

Így ha $\mathcal{H}_D$ Christoffel-szimbólumainak családja (N_j^r), akkor

$$N_j^r = y^k \Gamma_{jk}^s \tilde{L}_s^r \quad \Longrightarrow \quad N_j^r L_r^i = y^k \Gamma_{jk}^s \delta_s^i = y^k \Gamma_{jk}^i,$$

következésképpen $\mathcal{H}_D$ Christoffel-szimbólumai az

$$N_j^r(\delta_r^i + y^s C_{rs}^i) = y^k \Gamma_{jk}^i; \qquad i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{5.31}$$

relációk által ((5.21) értelmében) egyértelműen meghatározott N_j^r függvények. Ha – speciálisan – D erősen reguláris, akkor (5.19) figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$N_j^i = y^k \Gamma_{jk}^i; \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}. \tag{5.32}$$

5.2.2. Állítás. *Ha D reguláris kovariáns deriválás, akkor pontosan egy olyan $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió létezik, amelynek eltűnik a $\mathcal{H}$-deflexiója. Ez a konnexió a D által indukált $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexiót, $\mathcal{H}$ pedig legyen olyan Ehresmann-konnexió, amelyre

$$D_{\mathcal{H}(\widehat{X})}\delta = 0, \qquad \widetilde{X} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau).$$

Ekkor $\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}_D$ különbségtenzora (4.46) alapján $\mathcal{V}_D \circ \mathcal{H}$, ahol $\mathcal{V}_D$ a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó vertikális leképezés, tehát

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}_D = \mathbf{i} \circ (\mathcal{V}_D \circ \mathcal{H}).$$

Tekintsük D μ^{v} v-deflexióját. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\begin{aligned} \mu^{\mathsf{v}}(\mathcal{V}_D \circ \mathcal{H})(\widehat{X}) &= D_{\mathbf{i}(\mathcal{V}_D \circ \mathcal{H})(\widehat{X})}\delta = D_{(\mathcal{H} - \mathcal{H}_D)(\widehat{X})}\delta = \\ &= D_{\mathcal{H}(\widehat{X})}\delta - D_{\mathcal{H}_D(\widehat{X})}\delta = D_{\mathcal{H}(\widehat{X})}\delta - \mu(\mathcal{H}_D(\widehat{X})) = 0, \end{aligned}$$

hiszen $D_{\mathcal{H}(\widehat{X})}\delta = 0$ a feltétel szerint, és $\mu(\mathcal{H}_D(\widehat{X}))$ is eltűnik (5.28) miatt. A kapott eredményből μ^{v} bijektívsége miatt $\mathcal{V}_D \circ \mathcal{H} = 0$ következik, amiből a kívánt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_D$ reláció adódik. □

5.2.3. Lemma. *Legyen adva egy $\mathcal{H}\colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexió és tekintsük az általa indukált ∇ Berwald-deriválást. A*

$$\ell_\nabla \colon \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM), \qquad X \longmapsto \ell_\nabla(X) := X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}\nabla_{X^{\mathsf{c}}}\delta$$

leképezés egy $\mathcal{H}_\nabla$ Ehresmann-konnexiót határoz meg, amelynél $\mathcal{H}_\nabla(\widehat{X}) = \ell_\nabla(X)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Bizonyítás. ∇ erősen reguláris, ugyanis

$$\nabla^{\mathsf{v}}\delta(\widehat{X}) = \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, \mathcal{H}\circ\delta] = \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, S_{\mathcal{H}}] \overset{(3.5)}{=} \widehat{X};$$

így 5.2.1 értelmében a lemma igaz. □

5.2.4. Tétel (a tenzió interpretációja). *A $\mathcal{H}$ és a $\mathcal{H}_\nabla$ Ehresmann-konnexiók különbségtenzora $\mathcal{H}$ tenziója:*

$$\mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla = \mathbf{i}\circ\mathbf{t}. \tag{5.33}$$

Bizonyítás. Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\nabla(\widehat{X}) &= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}\nabla_{X^{\mathsf{c}}}\delta = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{h}X^{\mathsf{c}}}\delta - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}}\delta = \\ &= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}\nabla_{X^{\mathsf{h}}}\delta - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{i}\circ\mathcal{V}X^{\mathsf{c}}}\delta = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{v}[X^{\mathsf{h}}, C] - \mathbf{J}[\mathbf{v}X^{\mathsf{c}}, \mathcal{H}\circ\delta] \overset{(3.4)}{=} \\ &= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{v}[X^{\mathsf{h}}, C] - \mathbf{v}X^{\mathsf{c}} = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}\mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, C] = \\ &= X^{\mathsf{h}} - \mathbf{i}\mathbf{t}(\widehat{X}) = (\mathcal{H} - \mathbf{i}\circ\mathbf{t})(\widehat{X}),\end{aligned}$$

következésképpen $\mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla = \mathbf{i}\circ\mathbf{t}$. □

Megjegyzés. Ha (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság, és $\mathcal{H}_D$ a D által indukált Ehresmann-konnexió, akkor az $\mathcal{S}$ Finsler-torziót előállíthatjuk $T(D)$ segítségével is az

$$\mathcal{S}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = T(D)(\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}), \quad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \tag{5.34}$$

formula szerint, hiszen

$$\begin{aligned}T(D)(\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}) &= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\mathbf{j}\mathbf{i}\widetilde{Y} - D_{\mathbf{i}\widetilde{Y}}\mathbf{j}\mathcal{H}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}] \overset{(4.24)}{=} \\ &= -D_{\mathbf{i}\widetilde{Y}}\widetilde{X} + \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{Y}}\widetilde{X} = \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} \overset{(5.3)}{=:} \mathcal{S}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}).\end{aligned}$$

5.2.5. Definíció. *Legyen (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság, $\mathcal{H}_D$ a D által indukált Ehresmann-konnexió. A*

(5.35)
$$\mathcal{T}\colon \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \times \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \operatorname{Sec}(\tau^*\tau) \qquad \mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := T(D)(\mathcal{H}_D\widetilde{X}, \mathcal{H}_D\widetilde{Y})$$

tenzort D horizontális torzió*jának nevezzük.*

(5.2) alapján

$$\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = D_{\mathcal{H}_D\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\mathcal{H}_D\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}_D\widetilde{X}, \mathcal{H}_D\widetilde{Y}]. \tag{5.36}$$

Megmutatható (lásd [37]), hogy D torziója előállítható a

$$T(D)(\xi, \eta) = \mathcal{T}(\mathbf{j}\xi, \mathbf{j}\eta) + \mathcal{S}(\mathbf{j}\xi, \mathcal{V}\eta) - \mathcal{S}(\mathbf{j}\eta, \mathcal{V}\xi) \tag{5.37}$$

alakban, ahol $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$ és $\mathcal{V}_D$ a $\mathcal{H}_D$-hez csatolt vertikális leképezés.

A D^{h} és a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó ∇^{h} (lásd (4.23)) h-kovariáns deriválások különbségtenzora a

$$\mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := D_{\mathcal{H}_D \widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}_D \widetilde{X}} \widetilde{Y}, \qquad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^* \tau) \tag{5.38}$$

$\binom{1}{1}$-tenzor.

Azonnal látható, hogy reguláris (M, D) vonalelem D-sokaság esetén az indukált $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexióból származó ∇ Berwald-deriválás pontosan akkor esik egybe D-vel, ha az $\mathcal{S}$ és $\mathcal{P}$ különbségtenzorok eltűnnek.

5.2.6. Lemma. *Ha (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság, akkor a D által indukált $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió erős torziója megkapható a*

$$\mathbf{T^s} = i_\delta \mathcal{T} - i_\delta \mathcal{P}, \tag{5.39}$$

formula szerint.

Bizonyítás. 5.2.2. értelmében D $\mathcal{H}_D$-deflexiója eltűnik. Így, a rövidség kedvéért az $S := \mathcal{H}_D \circ \delta$ jelölést alkalmazva, tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\begin{aligned}
(i_\delta \mathcal{T} - i_\delta \mathcal{P})(\widehat{X}) &= \mathcal{T}(\delta, \widehat{X}) - \mathcal{P}(\delta, \widehat{X}) \overset{(5.36),(5.38)}{=} \\
&= D_S \widehat{X} - D_{X^{\mathsf{h}}} \delta - \mathbf{j}[S, X^{\mathsf{h}}] - D_S \widehat{X} + \mathcal{V}[S, X^{\mathsf{v}}] = \\
&= \mathcal{V}[S, X^{\mathsf{v}}] - \mathbf{j}[S, X^{\mathsf{h}}] \overset{(4.36)}{=} \mathbf{T^s}(\widehat{X}).
\end{aligned}$$

□

5.2.7. Állítás. *Legyen (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság. A $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió akkor és csak akkor származik egy szemisprayből 4.1.3. szerint, ha D horizontális torziója, valamint a $\mathcal{P}$ különbségtenzor között a*

$$\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \mathcal{P}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) \tag{5.40}$$

összefüggés áll fenn.

Bizonyítás. A formulát elegendő $\widehat{X}, \widehat{Y}$ bázikus vektormezőkre ellenőrizni. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) &= D_{X^{\mathsf{h}}} \widehat{Y} - D_{Y^{\mathsf{h}}} \widehat{X} - \mathbf{j}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}], \\
\mathcal{P}(\widehat{X}, \widehat{Y}) &= D_{X^{\mathsf{h}}} \widehat{Y} - \nabla_{X^{\mathsf{h}}} \widehat{Y} = D_{X^{\mathsf{h}}} \widehat{Y} - \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}}], \\
\mathcal{P}(\widehat{Y}, \widehat{X}) &= D_{Y^{\mathsf{h}}} \widehat{X} - \mathcal{V}[Y^{\mathsf{h}}, X^{\mathsf{v}}],
\end{aligned}$$

ahol a horizontális liftelések $\mathcal{H}_D$ szerint értendők. Így

$$\begin{aligned}\mathbf{i}(\mathcal{P}(\widehat{X},\widehat{Y})-\mathcal{P}(\widehat{Y},\widehat{X}))&=\mathbf{i}(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}-D_{Y^{\mathsf{h}}}\widehat{X}-\mathcal{V}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]+\mathcal{V}[Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}])\overset{(4.8)}{=}\\ &=\mathbf{i}(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}-D_{Y^{\mathsf{h}}}\widehat{X}-\mathbf{j}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]+\mathbf{j}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}])-[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]+[Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}]=\\ &=\mathbf{i}\mathcal{T}(\widehat{X},\widehat{Y})+\mathbf{J}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]-[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]+[Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}]\overset{(*)}{=}\\ &=\mathbf{i}\mathcal{T}(\widehat{X},\widehat{Y})+([X,Y]^{\mathsf{v}}-[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}]+[Y^{\mathsf{h}},X^{\mathsf{v}}])\overset{(4.31)}{=}\\ &=\mathbf{i}(\mathcal{T}(\widehat{X},\widehat{Y})-\mathbf{T}(\widehat{X},\widehat{Y})).\end{aligned}$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben azt használtuk fel, hogy

$$\mathbf{J}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]=\mathbf{Jh}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]+\mathbf{Jv}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]=\mathbf{Jh}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{h}}]\overset{(4.9)}{=}\mathbf{J}[X,Y]^{\mathsf{h}}=[X,Y]^{\mathsf{v}}.$$

Ily módon

$$\mathcal{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y})=\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y})-\mathcal{P}(\widetilde{Y},\widetilde{X})+\mathbf{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}),\qquad \widetilde{X},\widetilde{Y}\in\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$$

következésképpen (5.40) akkor és csak akkor teljesül, ha $\mathcal{H}_D$ torziója eltűnik. Ez pedig ekvivalens azzal (lásd például [37]), hogy $\mathcal{H}_D$ a 4.1.3. által leírt módon szemisprayből származik. □

5.3. Vonalelem D-sokaságok geodetikusai és affinitásai

5.3.1. Lemma és definíció. *Legyen (M,D) vonalelem D-sokaság. Tekintsünk egy $\gamma\colon I\longrightarrow M$ görbét, és legyen $c\colon I\longrightarrow TM$ görbe* fedőgörbé*je γ-nak, azaz olyan TM-beli görbe, amelyre $\tau\circ c=\gamma$ teljesül. Ha $X\in\mathfrak{X}(M)$, akkor*

$$\widehat{X}\circ c\colon I\longrightarrow TM\times_M TM,\quad t\longmapsto (c(t),X(\gamma(t)))$$

c-menti szelése a visszahúzott nyalábnak. Amennyiben

$$D_c(\widehat{X}\circ c)=0,$$

úgy azt mondjuk, hogy az X vektormező párhuzamos a γ görbe mentén a c fedőgörbére vonatkozóan. *Ha fedőgörbe gyanánt a γ görbe $\dot{\gamma}\colon I\longrightarrow TM$ sebességvektormezőjét választjuk, akkor*

$$D_{\dot{\gamma}}(\widehat{X}\circ\dot{\gamma})=0$$

teljesülése esetén az X vektormezőt γ mentén párhuzamos*nak nevezzük.*

5.3.2. Lemma. *Legyen (M,D) vonalelem D-sokaság, $\gamma\colon I\longrightarrow M$ egy görbe, $X\in\mathfrak{X}(M)$. X akkor és csak akkor párhuzamos γ mentén γ-nak egy c*

fedőgörbéjére vonatkozóan, ha kiválasztva M-en egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképet, és tekintve TM-en az általa indukált térképet (1.11), a vektormező $X^i := (y^i \circ X) \restriction \mathcal{U}$ komponensfüggvényei eleget tesznek az

$$(X^i \circ \gamma)' + (\Gamma^i_{jk} \circ c)\, {\gamma^j}'\, (X^k \circ \gamma) + (C^i_{jk} \circ c)\, {c^j}'\, (X^k \circ \gamma) = 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \tag{5.41}$$

relációnak, ahol a $\Gamma^i_{jk} \colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ és a $C^i_{jk} \colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények D Christoffel-szimbólumai a választott térképre vonatkozóan,

$$\gamma^i := u^i \circ \gamma, \quad c^i := y^i \circ c; \qquad i \in \{1, \dots, n\}.$$

Speciálisan, X akkor és csak akkor párhuzamos γ mentén, ha

$$(X^i \circ \gamma)' + (\Gamma^i_{jk} \circ \dot\gamma)\, {\gamma^j}'\, (X^k \circ \gamma) + (C^i_{jk} \circ \dot\gamma)\, {\gamma^j}''\, (X^k \circ \gamma) = 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\}) \tag{5.42}$$

Bizonyítás. Jegyezzük meg először, hogy tetszőleges $t \in I$ esetén

$$\dot c(t) = (x^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)} + (y^i \circ c)'(t) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{c(t)}.$$

Itt $x^i \circ c = u^i \circ \tau \circ c = u^i \circ \gamma =: \gamma^i$, tehát

$$\dot c(t) = {\gamma^i}'(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)} + {c^i}'(t) \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{c(t)}.$$

Így

$$\begin{aligned}
\left(D_c(\widehat{X} \circ c)\right)(t) &\overset{(1.27)}{=} D_{\dot c(t)} \widehat{X} = D_{\dot c(t)} (X^k \circ \tau) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \\
&= \dot c(t)(X^k \circ \tau) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} + (X^k \circ \tau)(c(t)) D_{\dot c(t)} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \\
= {\gamma^l}'(t) \frac{\partial (X^k \circ \tau)}{\partial x^l}(c(t)) &\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right)_{c(t)} + X^k(\gamma(t)) D_{{\gamma^j}'(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{c(t)}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} + \\
+ X^k(\gamma(t)) D_{{c^j}'(t)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{c(t)}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} &= {\gamma^l}'(t) \frac{\partial X^k}{\partial u^l}(\gamma(t)) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right)_{c(t)} + \\
&+ (X^k \circ \gamma)(t)\, {\gamma^j}'(t) \Gamma^i_{jk}(c(t)) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)} + \\
&+ (X^k \circ \gamma)(t)\, {c^j}'(t) C^i_{jk}(c(t)) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)} =
\end{aligned}$$

$$= (X^i \circ \gamma)'(t) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)} + \Gamma^i_{jk}(c(t))\, {\gamma^j}'(t)(X^k \circ \gamma)(t) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)} +$$
$$+ C^i_{jk}(c(t))\, {c^j}'(t)(X^k \circ \gamma)(t) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)} =$$
$$= \Big((X^i \circ \gamma)' + (\Gamma^i_{jk} \circ c)\, {\gamma^j}'(X^k \circ \gamma) + (C^i_{jk} \circ c)\, {c^j}'(X^k \circ \gamma)\Big)(t) \left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}\right)_{c(t)},$$

amiből következik az X γ-menti vektormező c-re vonatkozó párhuzamosságának a koordinátás feltétele.
Ha speciálisan $c = \dot\gamma$, akkor $y^i \circ c =: c^i = {\gamma^i}'$, és (5.41) a (5.42) relációhoz vezet.

□

5.3.3. Következmény. *Megtartva az előző lemma feltételeit és jelöléseit, ha az $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőkre $X \circ \gamma = Y \circ \gamma$, akkor teljesül, hogy*

$$D_{\dot\gamma}(\widehat{X} \circ \dot\gamma) = D_{\dot\gamma}(\widehat{Y} \circ \dot\gamma). \tag{5.43}$$

Bizonyítás. Ez közvetlenül adódik (5.42)-ből, mert

$$X \circ \gamma = Y \circ \gamma \iff u^i \circ X \circ \gamma = u^i \circ Y \circ \gamma, \quad i \in \{1, \dots, n\} \iff$$
$$\iff X^i \circ \gamma = Y^i \circ \gamma, \quad i \in \{1, \dots, n\}.$$

□

Emlékeztetünk rá, hogy 1.6.3. értelmében egy vonalelem D-sokaság geodetikusa olyan $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe, amely eleget tesz a $D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma) = 0$ feltételnek. (2.30) alapján közvetlenül adódik, hogy ez pontosan akkor teljesül, ha

$$D_{\dot\gamma}(\mathbf{j} \circ \ddot\gamma) = 0. \tag{5.44}$$

5.3.4. Lemma. *Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság. Tegyük föl, hogy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe, amelynek sebességvektormezője kiterjeszthető, azaz van olyan $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező, hogy $\dot\gamma = X \circ \gamma$. γ akkor és csak akkor geodetikusa D-nek, ha sebességvektormezőjének valamely – és ezért bármely – kiterjesztése párhuzamos γ mentén: ha $\dot\gamma = X \circ \gamma$, $X \in \mathfrak{X}(M)$, akkor*

$$D_{\dot\gamma}(\widehat{X} \circ \dot\gamma) = 0. \tag{5.45}$$

Bizonyítás. 5.3.3. miatt (5.45) független a $\dot\gamma$ kiterjesztésének megválasztásától. Tetszőleges $t \in I$ esetén

$$\widehat{X} \circ \dot\gamma(t) = \widehat{X}(\dot\gamma(t)) = (\dot\gamma(t), X \circ \tau \circ \dot\gamma(t)) =$$
$$= (\dot\gamma(t), X \circ \gamma(t)) = (\dot\gamma(t), \dot\gamma(t)) = \delta \circ \dot\gamma(t),$$

tehát (5.45) ekvivalens azzal, hogy $D_{\dot\gamma}(\delta \circ \dot\gamma) = 0$, vagyis azzal, hogy γ geodetikus.

□

5.3.5. Következmény. *Egy* $\gamma\colon I \longrightarrow M$ *reguláris görbe akkor és csak akkor geodetikusa egy* (M, D) *vonalelem D-sokaságnak, ha tetszőleges* $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ *térképre vonatkozó* $\gamma^i := u^i \circ \gamma$ *koordinátafüggvényei eleget tesznek a*

$$\gamma^{i\,\prime\prime} + (\Gamma^i_{jk} \circ \dot{\gamma})\, \gamma^{j\,\prime}\, \gamma^{k\,\prime} + (C^i_{jk} \circ \dot{\gamma})\, \gamma^{j\,\prime\prime}\, \gamma^{k\,\prime} = 0 \tag{5.46}$$

relációnak, ahol a Γ^i_{jk} *és* C^i_{jk} *függvények D Christoffel-szimbólumai.*

Bizonyítás. Mivel lokális koordinátaelőállításról van szó, nem sértjük az általánosságot, ha föltesszük, hogy $\mathcal{U}$ fölött $X \circ \gamma = \dot{\gamma}$. Ekkor

$$X^i \circ \gamma = y^i \circ X \circ \gamma = y^i \circ \dot{\gamma} = \gamma^{i\,\prime}, \quad (X^i \circ \gamma)' = \gamma^{i\,\prime\prime} \quad (i \in \{1, \ldots, n\}),$$

és így (5.42) (5.46)-ot eredményezi. □

5.3.6. Definíció. *Ha* (M, D) *vonalelem D-sokaság, akkor egy* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ *diffeomorfizmust* **affinitás***nak (vagy* totálgeodetikus transzformáció*nak) nevezünk, ha D tetszőleges* $\gamma\colon I \longrightarrow M$ *geodetikusa esetén* $\varphi \circ \gamma$ *is geodetikusa D-nek, azaz*

$$D_{\overset{\cdot\cdot}{\varphi \circ \gamma}(t)} \delta = 0, \qquad t \in I. \tag{5.47}$$

D affinitásainak csoportját $\mathrm{Aff}(D)$*-vel jelöljük.*

5.3.7. Lemma. *Legyen* (M, D) *reguláris vonalelem D-sokaság,* $\mathcal{H}_D$ *pedig a D-ből származó Ehresmann-konnexió. Ekkor D geodetikusai egybeesnek* $\mathcal{H}_D$ *geodetikusaival.*

Bizonyítás. Legyen egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe geodetikusa D-nek. Ekkor bármely $t \in I$ esetén

$$D_{\ddot{\gamma}(t)} \delta = 0 \iff D\delta(\ddot{\gamma}(t)) = 0 \iff$$
$$\iff \ddot{\gamma}(t) \in \mathrm{Ker}(D\delta) \overset{5.2.1.}{\iff} \ddot{\gamma}(t) \in \mathrm{Im}(\mathcal{H}_D)$$

tehát γ geodetikusa $\mathcal{H}_D$-nek is. □

5.3.8. Következmény. *Ha* (M, D) *reguláris vonalelem D-sokaság, akkor*

$$\mathrm{Aff}(D) = \mathrm{Aff}(\mathcal{H}_D). \tag{5.48}$$

5.4. Vonalelem D-sokaságok automorfizmusai

5.4.1. Definíció. *Legyen* (M, D) *vonalelem D-sokaság és* $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$*. Ha* $\varphi^{\#} D = D$*, akkor azt mondjuk, hogy* φ **automorfizmus***a D-nek. D automorfizmus-csoportját* $\mathrm{Aut}(D)$*-vel jelöljük.*

Az értelmezés szerint tehát

(5.49)
$$\varphi \in \operatorname{Aut}(D) \iff \varphi_\# D_\xi \widetilde{Y} = D_{(\varphi_*)_\# \xi} \varphi_\# \widetilde{Y}; \quad \xi \in \mathfrak{X}(TM),\ \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau).$$

5.4.2. Lemma. *Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság, $\varphi \in \operatorname{Diff}(M)$. Ha φ automorfizmusa D-nek, akkor D deflexiójára, illetve v-deflexiójára*

$$\varphi_\# \circ \mu = \mu \circ (\varphi_*)_\#, \qquad \textit{illetve} \tag{5.50}$$
$$\varphi_\# \circ \mu^{\mathsf{v}} = \mu^{\mathsf{v}} \circ \varphi_\# \tag{5.51}$$

teljesül.

Bizonyítás. A tett észrevételek az 5.1.10 lemmából adódnak. □

5.4.3. Lemma. *Legyen (M, D) vonalelem D-sokaság, $\varphi \in \operatorname{Diff}(M)$. $\varphi^\# D$ és D torziója között fennáll a*

$$\varphi_\# \left(T(\varphi^\# D)(\xi, \eta)\right) = T(D)\left((\varphi_*)_\# \xi, (\varphi_*)_\# \eta\right); \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM) \tag{5.52}$$

összefüggés.

Bizonyítás.

$$\begin{gathered}
\varphi_\# \left(T(\varphi^\# D)(\xi, \eta)\right) = \varphi_\# \left((\varphi^\# D)_\xi \mathbf{j}\eta - (\varphi^\# D)_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}\,[\xi, \eta]\right) = \\
= D_{(\varphi_*)_\# \xi} \varphi_\# (\mathbf{j}\eta) - D_{(\varphi_*)_\# \eta} \varphi_\# (\mathbf{j}\xi) - \mathbf{j}\,[(\varphi_*)_\# \xi, (\varphi_*)_\# \eta] \overset{(2.46)}{=} \\
= D_{(\varphi_*)_\# \xi} \mathbf{j}((\varphi_*)_\# \eta) - D_{(\varphi_*)_\# \eta} \mathbf{j}((\varphi_*)_\# \xi) - \mathbf{j}\,[(\varphi_*)_\# \xi, (\varphi_*)_\# \eta] = \\
= T(D)\left((\varphi_*)_\# \xi, (\varphi_*)_\# \eta\right).
\end{gathered}$$

□

5.4.4. Következmény. *Ha (M, D) vonalelem D-sokaság, és $\varphi \in \operatorname{Aut}(D)$, akkor D torziója invariáns φ-vel szemben, azaz teljesül, hogy*

$$\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#). \tag{5.53}$$

5.4.5. Állítás. *Legyen adva egy (M, D) vonalelem D-sokaság és $\varphi \in \operatorname{Diff}(M)$. φ akkor és csak akkor automorfizmusa D-nek, ha minden olyan $c\colon I \longrightarrow TM$ görbe esetén, amelynek $\dot{c}\colon I \longrightarrow TTM$ sebességvektormezője kiterjeszthető c-menti vektormező, teljesül, hogy*

$$D_{\varphi_* \circ c}(\varphi_\# \widetilde{Y}) \circ (\varphi_* \circ c) = (\varphi_* \times \varphi_*) D_c(\widetilde{Y} \circ c), \quad \widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^*\tau). \tag{5.54}$$

Bizonyítás. *(a)* Tegyük fel, hogy $\varphi \in \operatorname{Aut}(D)$. Legyen $c\colon I \longrightarrow TM$ olyan görbe, hogy
$$\dot{c} = \xi \circ c,$$
ahol ξ az $\operatorname{Im}(c) \subset TM$ képhalmaz egy nyílt környezetében értelmezett vektormező. Ekkor
$$\dot{\overline{\varphi_* \circ c}} = \varphi_{**} \circ \dot{c} = \varphi_{**} \circ \xi \circ c =$$
$$= \varphi_{**} \circ \xi \circ \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* \circ c = (\varphi_*)_\# \xi \circ \varphi_* \circ c,$$
és így tetszőleges $t \in I$-re
$$(D_{\varphi_* \circ c}(\varphi_\# \widetilde{Y}) \circ (\varphi_* \circ c))(t) = D_{\dot{\overline{\varphi_* \circ c}}(t)} \varphi_\# \widetilde{Y} =$$
$$= D_{(\varphi_*)_\# \xi \circ (\varphi_* \circ c)(t)} \varphi_\# \widetilde{Y} = (D_{(\varphi_*)_\# \xi}(\varphi_\# \widetilde{Y}))(\varphi_* \circ c)(t) \overset{\text{felt.}}{=}$$
$$= (\varphi_* \times \varphi_*) \circ D_\xi \widetilde{Y} \circ \varphi_*^{-1} \circ \varphi_* \circ c(t) = (\varphi_* \times \varphi_*) D_\xi \widetilde{Y}(c(t)) =$$
$$= (\varphi_* \times \varphi_*) D_{\xi(c(t))} \widetilde{Y} = (\varphi_* \times \varphi_*)(D_{\dot{c}(t)} \widetilde{Y}) =$$
$$= (\varphi_* \times \varphi_*)(D_c(\widetilde{Y} \circ c))(t);$$
ezzel megkaptuk az (5.54) relációt.
(b) Megfordítva, tegyük fel (5.54) teljesülését. Elegendő azt megmutatnunk, hogy
$$(\varphi_* \times \varphi_*) D_z \widetilde{Y} = D_{\varphi_{**}(z)} \varphi_\# \widetilde{Y} \quad (\widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\tau^* \tau), z \in TTM).$$
Ha $z \in T_v TM$, válasszunk olyan $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt, amelyre $\xi(v) = z$ teljesül. Legyen $c\colon I \longrightarrow TM$ v-ből induló integrálgörbéje ξ-nek; ekkor
$$\xi \circ c = \dot{c}, \quad z = \xi(v) = \xi(c(0)) = \dot{c}(0).$$
Így
$$(\varphi_* \times \varphi_*) D_z \widetilde{Y} = (\varphi_* \times \varphi_*) D_{\dot{c}(0)} \widetilde{Y} = (\varphi_* \times \varphi_*)(D_c(\widetilde{Y} \circ c))(0) \overset{(5.54)}{=}$$
$$= (D_{\varphi_* \circ c}(\varphi_\# \widetilde{Y}) \circ (\varphi_* \circ c))(0) = D_{\dot{\overline{\varphi_* \circ c}}(0)} \varphi_\# \widetilde{Y} =$$
$$= D_{\varphi_{**}(\dot{c}(0))} \varphi_\# \widetilde{Y} = D_{\varphi_{**}(z)} \varphi_\# \widetilde{Y},$$
és ezt kellett belátnunk. □

5.4.6. Következmény. *Ha (M, D) vonalelem D-sokaság, $\varphi \in \operatorname{Aut}(D)$, és $\gamma\colon I \longrightarrow M$ olyan görbe, amelynek $\ddot{\gamma}\colon I \longrightarrow TTM$ gyorsulásvektormezője kiterjeszthető, akkor*

$$D_{\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}}(\varphi_\# \widetilde{Y}) \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = (\varphi_* \times \varphi_*) D_{\dot{\gamma}}(\widetilde{Y} \circ \dot{\gamma}). \tag{5.55}$$

5.4.7. Tétel. *Legyen (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság, $\mathcal{H}_D$ a D által indukált Ehresmann-konnexió, $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. φ akkor és csak akkor automorfizmusa D-nek, ha*
a) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$,
továbbá az $\mathcal{S}$ Finsler-torzió és a $\mathcal{P}$ különbségtenzor invariáns φ-vel szemben:
b) $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$,
és
c) $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$. Ekkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén

$$\begin{aligned}
\varphi_{**} \circ \mathcal{H}_D \circ (\varphi_*^{-1} \times \varphi_*^{-1})(\widehat{X}) &= \varphi_{**} \circ \mathcal{H}_D \circ (\varphi_*^{-1}, \varphi_*^{-1} \circ X \circ \tau) = \\
&= \varphi_{**} \circ \mathcal{H}_D \circ (\varphi_*^{-1}, \varphi_*^{-1} \circ X \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \tau) = \\
&= \varphi_{**} \circ \mathcal{H}_D \circ (\varphi_*^{-1}, \varphi_\#^{-1} X \circ \tau \circ \varphi_*^{-1}) = \\
&= \varphi_{**} \circ \mathcal{H}_D \circ \widehat{\varphi_\#^{-1} X} \circ \varphi_*^{-1} = (\varphi_*)_\# \circ \mathcal{H}_D \circ \widehat{\varphi_\#^{-1} X} = \\
&= (\varphi_*)_\# \circ \left((\varphi_\#^{-1} X)^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{(\varphi_\#^{-1} X)^{\mathsf{c}}} \delta \right) = \\
&= (\varphi_*)_\# \left((\varphi_*^{-1})_\# X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{(\varphi_*^{-1})_\# X^{\mathsf{c}}} \varphi_\#^{-1} \delta \right) \overset{\text{felt.}}{=} \\
&= X^{\mathsf{c}} - (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \varphi_\#^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}} \delta = \\
&= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i} \circ \varphi_\# \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \varphi_\#^{-1} \circ D_{X^{\mathsf{c}}} \delta \overset{(5.51)}{=} \\
&= X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i} \circ (\mu^{\mathsf{v}})^{-1} \circ \varphi_\# \circ \varphi_\#^{-1} \circ D_{X^{\mathsf{c}}} \delta = \mathcal{H}_D(\widehat{X}),
\end{aligned}$$

következésképpen $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$, tehát a) teljesül. A Finsler-torzió és $\mathcal{P}$ különbségtenzor invarianciája szintén közvetlen számolással ellenőrizhető.
Legyen $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned}
\varphi_\#(\mathcal{S}(\widehat{X}, \widehat{Y})) &= -\varphi_\#(D_{Y^{\mathsf{v}}} \widehat{X}) - \varphi_\# \circ \mathbf{j}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}}] \overset{\text{felt.}}{=} \\
&= -D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}} \varphi_\# \widehat{X} - \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}] \overset{\text{a)}}{=} \\
&= -D_{(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}} \widehat{\varphi_\# X} - \mathbf{j}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}] = \\
&= \mathcal{S}(\widehat{\varphi_\# X}, \widehat{\varphi_\# Y}) = \mathcal{S}(\varphi_\# \widehat{X}, \varphi_\# \widehat{Y}),
\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}
\varphi_\#(\mathcal{P}(\widehat{X}, \widehat{Y})) &= \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{v}}} Y) - \varphi_\# \circ \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}}] \overset{\text{felt.}}{=} \\
&= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}} \varphi_\# \widehat{Y} - \varphi_\# \circ \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{v}}] \overset{\text{a)}}{=} \\
&= D_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}} \widehat{\varphi_\# Y} - \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}] = \\
&= D_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}} \varphi_\# \widehat{Y} - \mathcal{V}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, (\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] = \\
&= \mathcal{P}(\widehat{\varphi_\# X}, \widehat{\varphi_\# Y}) = \mathcal{P}(\varphi_\# \widehat{X}, \varphi_\# \widehat{Y}).
\end{aligned}$$

megkaptuk tehát az a), b) és c) relációt.
Megfordítva, tegyük fel, hogy az a), b) és c) feltételek teljesülnek.
Legyen $X \in \mathfrak{X}(M)$. Ekkor egyrészt

$$\begin{aligned}\varphi_\# \circ \mathcal{S}(\widehat{X},\widehat{Y}) &= -\varphi_\#(D_{Y^{\mathsf{v}}}\widehat{X}) - \varphi_\# \circ \mathbf{j}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}] = \\ &= -\varphi_\#(D_{Y^{\mathsf{v}}}\widehat{X}) - \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}},(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}],\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\circ(\varphi_\#\widehat{X},\varphi_\#\widehat{Y}) &= -D_{(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{X} - \mathbf{j}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}},(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] \overset{\text{a)}}{=} \\ &= -D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{X} - \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}},(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}],\end{aligned}$$

így b) alapján következik, hogy

$$(*) \qquad \varphi_\#(D_{Y^{\mathsf{v}}}\widehat{X}) = D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{X}.$$

Hasonló módon,

$$\begin{aligned}\varphi_\# \circ \mathcal{P}(\widehat{X},\widehat{Y}) &= \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}) - \varphi_\# \circ \mathcal{V}[X^{\mathsf{h}},Y^{\mathsf{v}}] \overset{\text{a)}}{=} \\ &= \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}) - \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}},(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}],\end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\varphi_\#\widehat{X},\varphi_\#\widehat{Y}) &= D_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{Y} - \mathcal{V}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{h}},(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] \overset{\text{felt.}}{=} \\ &= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{Y} - \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}},(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}],\end{aligned}$$

és így c) miatt

$$(**) \qquad \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y}) = D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{Y}.$$

$(*)$ és $(**)$ alapján következik, hogy

$$(+) \qquad \varphi_\#(D_\xi\widehat{Y}) = D_{(\varphi_*)_\#\xi}\varphi_\#\widehat{Y}$$

minden $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ esetén teljesül. Meg kell még mutatni, hogy tetszőleges $F \in C^\infty(TM)$ függvényt véve,

$$(++) \qquad \varphi_\#(D_\xi(F\widehat{Y})) = D_{(\varphi_*)_\#\xi}\varphi_\# F\widehat{Y}$$

is fennáll, ebből ugyanis következik, hogy a kívánt reláció bármely $\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ szelésre teljesül.
A Leibniz-szabály és (1.2) alapján (++) bal oldala

$$\varphi_\#(D_\xi(F\widehat{Y})) = \varphi_\#((\xi F)\widehat{Y} + FD_\xi\widehat{Y}) = ((\xi F)\circ\varphi_*^{-1})\varphi_\#\widehat{Y} + (F\circ\varphi_*^{-1})\varphi_\#(D_\xi\widehat{Y}),$$

a jobb oldala pedig

$$D_{(\varphi_*)_\#\xi}\varphi_\#(F\widehat{Y}) = (\varphi_*)_\#\xi(F\circ\varphi_*^{-1})\varphi_\#\widehat{Y} + (F\circ\varphi_*^{-1})D_{(\varphi_*)_\#\xi}\varphi_\#\widehat{Y}.$$

Mivel $(\varphi_*)_\# \xi \underset{\varphi_*^{-1}}{\sim} \xi$, (1.8) alapján

$$(\xi F) \circ \varphi_*^{-1} = (\varphi_*)_\# \xi (F \circ \varphi_*^{-1}),$$

és így (+) figyelembevételével következik (++) teljesülése. □

5.4.8. Állítás. *Ha (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság, akkor*

$$\mathrm{Aut}(D) \subset \mathrm{Aff}(D). \tag{5.56}$$

Bizonyítás. Legyen $\gamma\colon I \longrightarrow M$ a D kovariáns deriválás geodetikusa, azaz teljesüljön $D_{\ddot{\gamma}(t)}\delta = 0$, minden $t \in I$-re. Belátjuk, hogy tetszőleges $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ esetén $D_{\ddot{\overline{\varphi\circ\gamma}}(t)}\delta = 0$. $D_{\ddot{\overline{\varphi\circ\gamma}}(t)}\delta = D_{\varphi_{**}\circ\ddot{\gamma}(t)}\delta$, és mivel γ geodetikus, (5.48) alapján $\ddot{\gamma} = \mathbf{h} \circ \ddot{\gamma}$ írható, ahol – a rövidség kedvéért – $\mathbf{h}$ a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális projektor. Így $\varphi_{**} \circ \ddot{\gamma}(t) = \varphi_{**} \circ \mathbf{h} \circ \ddot{\gamma}(t)$.
Az 5.4.7. tétel miatt φ $\mathcal{H}_D$-nek is automorfizmusa, ezért $\varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}$.
Ily módon, felhasználva azt is, hogy D $\mathcal{H}_D$-deflexiója eltűnik,

$$\begin{aligned} D_{\ddot{\overline{\varphi\circ\gamma}}(t)}\delta = D_{\mathbf{h}\circ\varphi_{**}\circ\ddot{\gamma}(t)}\delta = D_{\mathcal{H}_D\circ\mathbf{j}\circ\ddot{\overline{\varphi\circ\gamma}}(t)}\delta = \\ = (D\delta \circ \mathcal{H}_D)(\mathbf{j} \circ \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}}(t)) = \mu^{\mathcal{H}_D}(\mathbf{j} \circ \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}}(t)) = 0 \end{aligned}$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy $\varphi \circ \gamma$ geodetikusa D-nek, tehát $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$. □

5.4.9. Tétel. *Ha (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ teljesülésének szükséges és elegendő feltétele a következő relációk egyidejű érvényessége:*

a) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$,

b) $\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$,

c) $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$,

d) $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$,

ahol $\mathbf{T^s}$ a $\mathcal{H}_D$ indukált Ehresmann-konnexió erős torziója.

Bizonyítás. (1) Tegyük fel először, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$. Ekkor 5.4.7. miatt c) és d) automatikusan teljesül, fennáll továbbá, hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$. Ebből 4.5.6. alapján adódik, hogy b) is érvényes, és hogy $\varphi \in \mathrm{Aut}(S)$, ahol $S := \mathcal{H}_D \circ \delta$. Azonban

$$\varphi \in \mathrm{Aut}(S) \overset{3.2.5.}{\Longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Aff}(S) \overset{4.4.3.}{\Longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H}_D) \overset{5.3.8.}{\Longleftrightarrow} \varphi \in \mathrm{Aff}(D),$$

amivel igazoltuk a) teljesülését.
(2) Megfordítva, tegyük fel, hogy fennállnak az a)–d) relációk. Ekkor a

$\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$ a) feltétel iménti meggondolásunk szerint ekvivalens azzal, hogy $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$. $\varphi \in \mathrm{Aff}(S)$ és b) miatt pedig 4.5.6.-ra tekintettel $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$ következik. $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$ valamint a c) és a d) feltétel a 5.4.7. tétel alapján biztosítja a kívánt $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$ reláció teljesülését. $\square$

5.4.10. Következmény. *Legyen (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$. φ pontosan akkor automorfizmusa D-nek, ha teljesülnek a következők:*

a) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$,

b') $\varphi_\# \circ i_\delta \mathcal{T} = i_\delta \mathcal{T} \circ \varphi_\#$,

c) $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$,

d) $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.

Bizonyítás. A tétel igazolásához csupán annyit kell belátni, hogy a 5.4.9.-beli *b)* feltétel kicserélhető a *b')* feltételre.
Elsőként tegyük fel a 5.4.9. tételbeli feltételek teljesülését. Ekkor tetszőleges $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőket véve,

$$\varphi_\# \circ i_\delta \mathcal{T}(\widehat{X}) \overset{(5.39)}{=} \varphi_\# \circ (\mathbf{T^s}(\widehat{X}) + i_\delta \mathcal{P}(\widehat{X})) \overset{\text{felt.}}{=}$$
$$= \mathbf{T^s}(\varphi_\# \widehat{X}) + \mathcal{P}(\varphi_\# \delta, \varphi_\# \widehat{X}) \overset{(2.39)}{=} \mathbf{T^s}(\varphi_\# \widehat{X}) + i_\delta \mathcal{P}(\varphi_\# \widehat{X}) \overset{(5.39)}{=} i_\delta \mathcal{T} \circ \varphi_\#(\widehat{X});$$

tehát megkaptuk a *b')* feltételt.
Megfordítva, ha az 5.4.10. tétel feltételei teljesülnek, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\varphi_\# \mathbf{T^s}(\widehat{X}) \overset{(5.39)}{=} \varphi_\#(i_\delta \mathcal{T}(\widehat{X}) - i_\delta \mathcal{P}(\widehat{X})) \overset{b')}{=}$$
$$= i_\delta \mathcal{T}(\varphi_\# \widehat{X}) - i_\delta \mathcal{P}(\varphi_\# \widehat{X}) = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#(\widehat{X}),$$

vagyis érvényes 5.4.9.(b). Ezzel a megállapítást igazoltuk. $\square$

Legyen (M, D) reguláris vonalelem D-sokaság és $\mathcal{H}_D$ a D által indukált Ehresmann-konnexió. A D kovariáns deriválás *vertikális torzió*ja a

$$T^{\mathsf{v}}(D)(\xi, \eta) = D_\xi \mathcal{V}\eta - D_\eta \mathcal{V}\xi - \mathcal{V}[\xi, \eta], \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM) \tag{5.57}$$

leképezés, ahol $\mathcal{V}$ a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó vertikális leképezés.
A vertikális torzió segítségével a $\mathcal{P}$ különbségtenzor leírható a

$$\mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}_D \widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}), \quad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^* \tau) \tag{5.58}$$

formula szerint, ugyanis

$$T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}_D \widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}) = D_{\mathcal{H}_D \widetilde{X}} \mathcal{V}\mathbf{i}\widetilde{Y} - D_{\mathbf{i}\widetilde{Y}} \mathcal{V}\mathcal{H}_D \widetilde{X} - \mathcal{V}[\mathcal{H}_D \widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y}] \overset{(4.23)}{=}$$
$$= D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} \overset{(5.38)}{=:} \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}).$$

5.4.11. Tétel. *Legyen (M,D) reguláris vonalelem D-sokaság. $\varphi\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus pontosan akkor automorfizmusa a D kovariáns deriválásnak, ha*

A) $\varphi \in \operatorname{Aff}(D)$,

B) $\varphi_\# \circ T^{\mathsf{v}}(D) = T^{\mathsf{v}}(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$,

C) $\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $\varphi \in \operatorname{Aut}(D)$. Már tudjuk, hogy ekkor $\varphi \in \operatorname{Aff}(D)$. Megmutatjuk, hogy B) és C) is teljesül, a relációk bal és jobb oldalát $(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}})$, $(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}})$ és $(X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}})$ $(X, Y \in \mathfrak{X}(M))$ alakú párokon értékelve ki.
Szükségesség.
B) ellenőrzése.

$$
\begin{aligned}
\varphi_\# \circ T(D)(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}) =& \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}Y^{\mathsf{v}} - D_{Y^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}X^{\mathsf{v}} - \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}]) \overset{(2.21),(2.16)}{=} 0,\\
T(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}) =& D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} -\\
&- \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}] = D_{(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}} -\\
&- D_{(\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}}\mathbf{j}(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}} - \mathbf{j}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}, (\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_\# \circ T(D)(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}}) =& \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{v}}}\widehat{Y} - \mathbf{j}[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}}]) = \varphi_\# D_{X^{\mathsf{v}}}\widehat{Y} \overset{\text{felt.}}{=}\\
&= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y},\\
T(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}) =& D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\mathbf{j}(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} -\\
&- \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}] \overset{5.4.7.}{=} D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y} -\\
&- \mathbf{j}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}, (\varphi_\# Y)^{\mathsf{h}}] = D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi_\# \circ T(D)(X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}) =& \varphi_\#(D_{X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y} - D_{Y^{\mathsf{h}}}\widehat{X} - \mathbf{j}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}]) \overset{\text{felt.}}{=}\\
&= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{Y} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{X} -\\
&- \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}]q,\\
T(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}) =& D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} -\\
&- \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}] = D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\widehat{Y} -\\
&- D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\widehat{X} - \mathbf{j}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}].
\end{aligned}
$$

C) ellenőrzése.

$$\begin{aligned}
\varphi_\# T^{\mathsf{v}}(D)(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}) =&\varphi_\#(D_{X^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}Y^{\mathsf{v}} - D_{Y^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}X^{\mathsf{v}} - \mathcal{V}[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{v}}]) \overset{\text{felt.}}{=} \\
&= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\widehat{X}, \\
T^{\mathsf{v}}(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}) =&D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} - \\
&- \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}] = D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}\circ \mathbf{i}\circ\varphi_\# Y - \\
&- D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}\circ\mathbf{i}\circ\varphi_\# X - \mathcal{V}[(\varphi_\# X)^{\mathsf{v}}, (\varphi_\# Y)^{\mathsf{v}}] = \\
&= D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\varphi_\#\widehat{Y} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{v}}}\widehat{X}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_\#\circ T^{\mathsf{v}}(D)(X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}}) =&\varphi_\#(-D_{Y^{\mathsf{h}}}\widehat{X} - \mathcal{V}[X^{\mathsf{v}}, Y^{\mathsf{h}}]) \overset{5.4.7., \text{ felt.}}{=} \\
&= -D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{X} - \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}], \\
T^{\mathsf{v}}(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}) =&D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}}\mathcal{V}\circ(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}} - D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\mathcal{V}\circ(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} - \\
&- \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}] \overset{5.4.7.}{=} -D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\varphi_\#\widehat{X} - \\
&- \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_\#\circ T^{\mathsf{v}}(D)(X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}) =&\varphi_\#(-\mathcal{V}[X^{\mathsf{h}}, Y^{\mathsf{h}}]) \overset{5.4.7.}{=} -\mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}], \\
T^{\mathsf{v}}(D)((\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}) =&D_{(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}}\mathcal{V}\circ(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}} - \\
&- D_{(\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}}\mathcal{V}\circ(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} - \mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}] = \\
&= -\mathcal{V}[(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}}, (\varphi_*)_\# Y^{\mathsf{h}}].
\end{aligned}$$

Elegendőség. Ha a tételbeli feltételek teljesülnek, akkor azonnal következik, hogy

$$\begin{aligned}
\varphi_\#\circ i_\delta\mathcal{T} &= i_\delta\mathcal{T}\circ\varphi_\#, \\
\varphi_\#\circ\mathcal{S} &= \mathcal{S}\circ(\varphi_\#\times\varphi_\#), \\
\varphi_\#\circ\mathcal{P} &= \mathcal{P}\circ(\varphi_\#\times\varphi_\#),
\end{aligned}$$

hiszen mindhárom torzió $T^{\mathsf{v}}(D)$-ből vagy $T(D)$-ből származtatható (lásd 5.35, 5.34, 5.58), így 5.4.10. alapján adódik az állítás. □

6. fejezet

Appendix: a koordinátás nézőpont

6.1. Térképcsere

(1) Az $\mathbb{R}^n$ valós vektortér kanonikus bázisára az $(e_i)_{i=1}^n$ jelölést használjuk, ennek duálisa $(e^i)_{i=1}^n$; ekkor $e^i(e_j) = \delta^i_j$ $(i, j \in \{1, \ldots, n\})$.
Az alapulvett M sokaságon és a hozzá kapcsolódó vektornyalábokon végzett koordinátás számoláshoz M egy p pontja körül rögzítünk egy

$$(\mathcal{U}, u) = (\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n); \qquad u^i := e^i \circ u \qquad (i \in \{1, \ldots, n\}) \tag{6.1}$$

térképet.

Bázis-tétel (O'Neill). A (6.1) térkép rögzítése után tetszőleges $v \in T_pM$ érintővektor egyértelműen előállítható

$$v = v(u^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_p \tag{6.2}$$

alakban.

Láncszabály parciális deriváltakra (Spivak I) Ha φ sima leképezése az M sokaságnak egy N sokaságba, $f\colon N \longrightarrow \mathbb{R}$ sima függvény, $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép egy $p \in M$ pont körül, $(\mathcal{V}, (z^j)_{j=1}^m)$ pedig térkép $\varphi(p)$ körül, akkor

$$\frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial u^i}(p) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial z^j}(\varphi(p))\frac{\partial(z^j \circ \varphi)}{\partial u^i}(p), \qquad i \in \{1, \ldots, n\}\,. \tag{6.3}$$

(2) Legyen

$$(\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{u}) = (\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^n) \tag{6.4}$$

további térkép a $p \in M$ pont körül. A (6.1) és (6.4) közötti átmenetleképezés

$$\varphi := \tilde{u} \circ u^{-1} \colon u(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \tilde{u}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}) \subset \mathbb{R}^n.$$

Ennek koordinátafüggvényei

$$\varphi^i := e^i \circ \varphi, \qquad i \in \{1, \dots, n\}\,; \tag{6.5}$$

segítségükkel az „új térkép" koordinátafüggvényei a

$$\tilde{u}^i = \varphi^i \circ u \tag{6.6}$$

alakban adhatók meg. A (6.1), illetve (6.4) térképhez tartozó koordinátavektormezőket a

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i} = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^j}, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.7}$$

transzformációs szabály köti össze. Ez közvetlenül adódik a bázis-tétel alapján, eszerint ugyanis tetszőleges $q \in \mathcal{U}$ esetén

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\right)_q = \left(\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\right)_q u^j\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_q = \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(q) \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right)_q.$$

Az itt fellépő $\left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}(q)\right)$ mátrix invertálható (hiszen báziscsere mátrixa), az inverze $\left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}(q)\right)$, így fennáll a

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} \tag{6.8}$$

összefüggés is.

Duálisan, minden $\omega \in T_p^* M$ kovektor egyértelműen előállítható

$$\omega = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(du^i)_p \tag{6.9}$$

alakban. (6.7) és (6.9) közvetlen következményeként kapjuk, hogy a (6.1)$\rightsquigarrow$(6.4) térképcsere esetén a koordináta 1-formák a

$$d\tilde{u}^i = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} du^j, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.10}$$

„kovariáns szabály" szerint transzformálódnak.

Szintén azonnal adódik, hogy a $\frac{\partial}{\partial u^i}$ koordinátavektormezők által származtatott $\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \frac{\partial}{\partial u^i} \circ \tau$ bázikus vektormezők a

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}} = \left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} \circ \tau\right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} \tag{6.11}$$

összefüggés szerint transzformálódnak.

(3) Tekintsük az M sokaság $\tau\colon TM \longrightarrow M$ érintőnyalábját. A (6.1) térkép által *indukált térkép* TM-en

$$\left(\tau^{-1}(\mathcal{U}), (x^i, y^i)_{i=1}^n\right), \qquad x^i := u^i \circ \tau,\ y^i := (u^i)^{\mathsf{c}} \tag{6.12}$$

(lásd (1.11)-et és a 2.1. szakasz elejét). Áttérve a (6.1) térképről a (6.4) térképre, az indukált térképek koordinátafüggvényeinek kapcsolatát a

$$\tilde{x}^i = \tilde{u}^i \circ \tau \overset{(6.6)}{=} \varphi^i \circ u \circ \tau, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.13}$$

és

$$\tilde{y}^i = \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau\right) y^j, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.14}$$

relációk adják. Ez utóbbi igazolására legyen $v \in \tau^{-1}(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}})$ tetszőleges. Ekkor

$$\begin{aligned}\tilde{y}^i(v) &:= (\tilde{u}^i)^{\mathsf{c}}(v) := (d\tilde{u}^i)_{\tau(v)}(v) \overset{(6.10)}{=} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j}(\tau(v)) du^j(v) = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau\right)(v) y^j(v) = \left(\left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau\right) y^j\right)(v),\end{aligned}$$

ami (6.14) helyességét jelenti. A (6.3) láncszabály alkalmazásával

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} &\overset{(6.13)}{=} \frac{\partial (\tilde{u}^i \circ \tau)}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} \circ \tau\right) \frac{\partial (u^k \circ \tau)}{\partial x^j} = \\ &= \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} \circ \tau\right) \delta_j^k = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau \overset{(6.14)}{=} \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j},\end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau = \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}. \tag{6.15}$$

Hasonló módon

$$\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial y^j} = 0; \tag{6.16}$$

míg

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} &\overset{(6.14)}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} \circ \tau\right) y^k\right) \overset{(6.15)}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} y^k\right) = \\ &= \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} y^k + \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} y^k,\end{aligned}$$

tehát

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} = \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} y^k. \tag{6.17}$$

Itt

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial x^j \partial x^k} \overset{(6.15)}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k} \circ \tau\right) \overset{(6.3)}{=} \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}^i}{\partial u^l \partial u^k} \circ \tau\right) \frac{\partial (u^l \circ \tau)}{\partial x^j} =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}^i}{\partial u^l \partial u^k} \circ \tau\right) \delta^l_j = \frac{\partial^2 \tilde{u}^i}{\partial u^j \partial u^k} \circ \tau,$$

így

$$\frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial x^j} = \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}^i}{\partial u^j \partial u^k} \circ \tau\right) y^k \tag{6.18}$$

is írható. Ha $p \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$, $v \in T_pM$ tetszőleges, akkor a bázis-tétel alapján

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_v = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right)_v + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial x^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}\right)_v, \tag{6.19}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_v = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial y^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right)_v + \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i}(v) \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j}\right)_v, \tag{6.20}$$

így (6.15)-(6.18) felhasználásával a

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} \circ \tau\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} + \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}^j}{\partial u^i \partial u^k} \circ \tau\right) y^k \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \tag{6.21}$$

és

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial \tilde{y}^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} = \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i} \circ \tau\right) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} \tag{6.22}$$

transzformációs szabályok adódnak.

6.2. Szemispray-koefficiensek és konnexió-paraméterek transzformációs szabályai

(1) Legyen $S\colon TM \longrightarrow TTM$ szemispray. (3.1) értelmében

$$S \underset{(\mathcal{U})}{=} y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad S \underset{(\tilde{\mathcal{U}})}{=} \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} - 2\tilde{G}^i \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}$$

így $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ fölött

$$\begin{aligned}
S = \tilde{y}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} - 2\tilde{G}^j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^j} &\overset{(6.19),(6.22)}{=} \\
= \tilde{y}^j \left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) - 2\tilde{G}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} \frac{\partial}{\partial y^i} &= \\
= \tilde{y}^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \frac{\partial}{\partial x^i} + \left(\tilde{y}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^j} - 2\tilde{G}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i} &\overset{(6.15)}{=} \\
= \tilde{y}^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^j} \circ \tau \right) \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(2\tilde{G}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} - \tilde{y}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i} &\overset{(6.14)}{=} \\
= y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \left(2\tilde{G}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} - \tilde{y}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^j} \right) \frac{\partial}{\partial y^i}&,
\end{aligned}$$

következésképpen térképcsere esetén S koefficiensei a

$$G^i = \tilde{G}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^j} - \frac{1}{2} \tilde{y}^j \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^j}, \qquad i \in \{1, \dots, n\} \tag{6.23}$$

transzformációs szabály szerint változnak.

(2) Tekintsünk egy $\mathcal{H} \colon TM \times_M TM \longrightarrow TTM$ Ehresmann-konnexiót. Ennek paraméterei a (6.1), illetve a (6.4) térképre vonatkozóan a

$$\mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right) \underset{(\mathcal{U})}{=} \frac{\partial}{\partial x^j} - N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \text{illetve a} \quad \mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}} \right) \underset{(\tilde{\mathcal{U}})}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j} - \tilde{N}^i_j \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}$$

relációk által meghatározott $N^i_j \colon \tau^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}$, illetve $\tilde{N}^i_j \colon \tau^{-1}(\tilde{\mathcal{U}}) \longrightarrow \mathbb{R}$ függvények; $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (lásd 4.14).
Mivel egyrészt tetszőleges $l \in \{1, \dots, n\}$-re

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^l}} \right) \underset{(\tilde{\mathcal{U}})}{=} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^l} - \tilde{N}^k_l \frac{\partial}{\partial \tilde{y}^k} \underset{(\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}})}{\overset{(6.19),(6.22)}{=}} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial}{\partial x^j} + \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial}{\partial y^i} - \tilde{N}^k_l \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^k} \frac{\partial}{\partial y^i} = \\
= \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial}{\partial x^j} - \left(\tilde{N}^k_l \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^k} - \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^l} \right) \frac{\partial}{\partial y^i},
\end{aligned}$$

másrészt

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^l}} \right) \overset{(6.11)}{=} \mathcal{H}\left(\left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^l} \circ \tau \right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right) = \left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^l} \circ \tau \right) \mathcal{H}\left(\widehat{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right) = \\
= \left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^l} \circ \tau \right) \frac{\partial}{\partial x^j} - \left(\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^l} \circ \tau \right) N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i} \overset{(6.15)}{=} \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^l} \frac{\partial}{\partial x^j} - \frac{\partial y^j}{\partial \tilde{y}^l} N^i_j \frac{\partial}{\partial y^i},
\end{aligned}$$

következésképpen a különböző térképekre vonatkozó Christoffel-szimbólumok közötti transzformációs szabály

$$\frac{\partial y^j}{\partial \tilde{y}^l} N^i_j = \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^k} \tilde{N}^k_l - \frac{\partial y^i}{\partial \tilde{x}^l}, \qquad i, l \in \{1, \dots, n\}. \tag{6.24}$$

(3) Legyen

$$D\colon \mathfrak{X}(TM)\times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)\longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau),\qquad (\xi,\widetilde{Y})\longmapsto D_\xi\widetilde{Y}$$

kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon, és tekintsük D (5.17)-ben bevezetett

$$\Gamma^k_{ij}\colon \tau^{-1}(\mathcal{U})\longrightarrow \mathbb{R},\qquad C^k_{ij}\colon \tau^{-1}(\mathcal{U})\longrightarrow \mathbb{R};\quad i,j,k\in\{1,\dots,n\}$$

Christoffel-szimbólumait. Ekkor $\mathcal{U}\cap\tilde{U}$ fölött

$$C^i_{jk}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} := D_{\frac{\partial}{\partial y^j}}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} \overset{(6.11),(6.22)}{=} D_{\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} =$$
$$= \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\left(\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\right)\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}D_{\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} = \tilde{C}^i_{rs}\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^i}} \overset{(6.11),(6.22)}{=}$$
$$= \tilde{C}^i_{rs}\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^l}{\partial\tilde{y}^i}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^l}} = \tilde{C}^l_{rs}\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$$

(felhasználva, hogy $\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k} \overset{(6.15)}{=} \frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\left(\frac{\partial\tilde{u}^s}{\partial u^k}\circ\tau\right)=0$), így a konnexióparaméterek második családja a

$$C^i_{jk} = \tilde{C}^l_{rs}\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l},\qquad i,j,k\in\{1,\dots,n\} \tag{6.25}$$

tenzori transzformációs szabály szerint ($\binom{1}{2}$-tenzorként) transzformálódik. Hasonló módon, de kicsit hosszabb számolással:

$$\Gamma^i_{jk}\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = D_{\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^r}+\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} =$$
$$= \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}D_{\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^r}}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}D_{\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} =$$
$$= \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\tilde{\Gamma}^l_{rs}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^l}} + \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\tilde{C}^l_{rs}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^l}} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial\tilde{y}^r}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^s}} =$$
$$= \left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\tilde{\Gamma}^l_{rs} + \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial^2\tilde{x}^l}{\partial x^k\partial x^m} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\tilde{C}^l_{rs}\right)\widehat{\frac{\partial}{\partial\tilde{u}^l}} =$$
$$= \left(\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\tilde{\Gamma}^l_{rs} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\tilde{C}^l_{rs} + \frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^r}\frac{\partial^2\tilde{x}^l}{\partial x^k\partial x^m}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\right)\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} \overset{(*)}{=}$$
$$= \left(\frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\tilde{\Gamma}^l_{rs} + \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial\tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\tilde{C}^l_{rs} + \frac{\partial^2\tilde{x}^l}{\partial x^k\partial x^j}\frac{\partial y^i}{\partial\tilde{y}^l}\right)\widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$$

a $(*)$-gal jelölt lépésben azt használva fel, hogy

$$\frac{\partial\tilde{x}^r}{\partial x^j}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^r} \overset{(6.15)}{=} \frac{\partial\tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial y^m}{\partial\tilde{y}^r} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial y^m}{\partial\tilde{y}^r}\tilde{y}^r\right) - \frac{\partial}{\partial y^j}\left(\frac{\partial u^m}{\partial\tilde{u}^r}\circ\tau\right)\tilde{y}^r \overset{(6.14),(6.15)}{=} \frac{\partial y^m}{\partial y^j} = \delta^m_j.$$

Így a konnexióparaméterek első családja között a

$$\Gamma^i_{jk} = \tilde{\Gamma}^l_{rs}\frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial y^j}\frac{\partial \tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^l} + \tilde{C}^l_{rs}\frac{\partial \tilde{y}^r}{\partial x^j}\frac{\partial \tilde{y}^s}{\partial y^k}\frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^l} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^l}{\partial x^j \partial x^k}\frac{\partial y^i}{\partial \tilde{y}^l} \tag{6.26}$$

transzformációs szabály adódik.

(4) Legyen $D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ kovariáns deriválás a $\pi\colon E \longrightarrow M$ k-rangú vektornyalábon, és tekintsük ennek az (1.20) által értelmezett $\Gamma^\alpha_{i\beta}\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(\alpha, \beta \in \{1, \dots, k\},\ i \in \{1, \dots, n\})$ Christoffel-szimbólumait. Válasszunk egy további $(\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u})^n_{i=1})$ térképet $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \neq \emptyset$ feltétellel, és $\mathrm{Sec}(\pi)$-nek egy $(\tilde{\sigma})^k_{\alpha=1}$ $\tilde{\mathcal{U}}$ fölötti lokális bázisát. Ez utóbbiakra vonatkozóan D Christoffel-szimbólumait a

$$D_{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}}\tilde{\sigma}_\beta = \tilde{\Gamma}^\alpha_{i\beta}\tilde{\sigma}_\alpha$$

relációk értelmezik. Egyértelműen létezik olyan

$$\left(\tilde{F}^\beta_\alpha\right) : \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}} \longrightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{R})$$

leképezés, hogy tetszőleges $q \in \mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ pontban

$$\sigma_\alpha(q) = \tilde{F}^\beta_\alpha(q)\tilde{\sigma}_\beta(q).$$

Ennek segítségével egyrészt

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\sigma_\alpha := \Gamma^\gamma_{i\alpha}\sigma_\gamma = \Gamma^\gamma_{i\alpha}\tilde{F}^\lambda_\gamma\tilde{\sigma}_\lambda$$

írható, másrészt

$$D_{\frac{\partial}{\partial u^i}}\sigma_\alpha \overset{(6.8)}{=} D_{\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}}\tilde{F}^\beta_\alpha\tilde{\sigma}_\beta =$$
$$= \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}\tilde{F}^\beta_\alpha D_{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}}\tilde{\sigma}_\beta + \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}\frac{\partial \tilde{F}^\beta_\alpha}{\partial \tilde{u}^j}\tilde{\sigma}_\beta \overset{(6.8)}{=} \left(\frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}\tilde{F}^\beta_\alpha\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta} + \frac{\partial \tilde{F}^\lambda_\alpha}{\partial u^i}\right)\tilde{\sigma}_\lambda.$$

A két relációt összevetve, a Christoffel-szimbólumok közötti

$$\Gamma^\gamma_{i\alpha}\tilde{F}^\lambda_\gamma = \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^i}\tilde{F}^\beta_\alpha\tilde{\Gamma}^\lambda_{j\beta} + \frac{\partial \tilde{F}^\lambda_\alpha}{\partial u^i} \tag{6.27}$$

transzformációs szabályhoz jutunk.

6.3. A Varga Ottó-féle invariáns differenciál

Alapulvéve egy M n-dimenziós sima sokaságot, [23] dolgozatában M. Hashiguchi bizonyos feltételeknek eleget tevő Christoffel-szimbólumok kijelölésével értelmezett *„affin konnexiót"*. Az előírásai a következők:

(i) M tetszőleges $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térképe esetén adottak olyan

$$C^i_{jk}\colon \mathring{\tau}^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \Gamma^i_{jk}\colon \mathring{\tau}^{-1}(\mathcal{U}) \longrightarrow \mathbb{R}; \quad i,j,k \in \{1,\dots,n\}$$

sima függvények, amelyek egy $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n) \longrightarrow (\tilde{\mathcal{U}}, (\tilde{u}^i)_{i=1}^n)$ térképcsere esetén a (6.25), illetve (6.26) transzformációs szabályok szerint változnak.

(ii) A C^i_{jk} függvények (-1)-edfokú, a Γ^i_{jk} függvények nulladfokú pozitív homogének:

$$\frac{\partial C^i_{jk}}{\partial y^r} y^r = -C^i_{jk}, \qquad \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial y^r} y^r = 0.$$

(iii) $C^i_{jk} y^k = 0$ („erős regularitás”, v.ö. (5.18))

Ha

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} := \Gamma^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} := C^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \qquad j,k \in \{1,\dots,n\},$$

akkor így egy jól definiált, erősen reguláris

$$D\colon \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$$

kovariáns deriváláshoz jutunk, amely rendelkezik a következő homogenitási tulajdonsággal: tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ és $\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$ esetén

$$D_{(h_\lambda)_\# \xi}(\tilde{h}_\lambda \circ \widetilde{Y} \circ h_\lambda^{-1}) = \tilde{h}_\lambda \circ \left(D_\xi \widetilde{Y}\right) \circ h_\lambda^{-1},$$

ahol tetszőleges λ pozitív valós szám esetén

$$h_\lambda\colon v \in TM \longmapsto \lambda v \in TM;$$
$$\tilde{h}_\lambda\colon (u,v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\lambda u, v) \in TM \times_M TM.$$

Ez a homogenitási feltétel a Finsler-geometriai alkalmazásokban fontos, disszertációnkban erre nem volt szükség.
Varga Ottó [42] dolgozatában másként jár el: az ún. *invariáns differenciál*ra ír elő axiómákat. Eljárása mai nyelven a következőképpen interpretálható: Egy

$$D\colon \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{C^\infty(\mathring{T}M)}(\mathfrak{X}(\mathring{T}M), \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)), \quad \widetilde{X} \longmapsto D\widetilde{X}$$

leképezés **invariáns differenciál**, ha eleget tesz az alábbi feltételeknek:

ID1 Tetszőleges M-en adott $(\mathcal{U}, (u^i)_{i=1}^n)$ térkép és $\widetilde{X} \underset{(\mathcal{U})}{=} \widetilde{X}^i \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}}$ $\mathcal{U}$ fölötti szelés esetén

$$D\widetilde{X} \underset{(\mathcal{U})}{=} \left(d\widetilde{X}^i + \omega^i_j \widetilde{X}^j\right) \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} =: (D\widetilde{X})^i \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

ahol d a külső differenciál operátora TM-en, ω^i_j $(i,j \in \{1,\dots,n\})$ 1-formák $\mathring{\tau}^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathring{T}M$ fölött (az ún. *konnexió 1-formák*).

ID2 Végrehajtva egy $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n) \rightsquigarrow (\tilde{\mathcal{U}},(\tilde{u}^i)_{i=1}^n)$ térképcserét, ha $D\widetilde{X} \underset{(\mathcal{U})}{=} \left(\widetilde{D\widetilde{X}}\right)^i \otimes \widehat{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}}$, akkor $\mathcal{U} \cap \tilde{\mathcal{U}}$ fölött

$$\left(\widetilde{D\widetilde{X}}\right)^i = (D\widetilde{X})^j \left(\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} \circ \tau\right) \left(\overset{(6.15)}{=} (D\widetilde{X})^j \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j} = (D\widetilde{X})^j \frac{\partial \tilde{y}^i}{\partial y^j}\right).$$

ID3 A $(D\widetilde{X})^i = d\widetilde{X}^i + \omega^i_j \widetilde{X}^j$ 1-formák nulladfokú pozitív homogének.

ID4 Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$(D\delta)(X^{\mathsf{v}}) = \widehat{X}$$

(*erős regularitás*; v.ö. (5.5)).

Egy $(\tau^{-1}(\mathcal{U}),(x^i,y^i)_{i=1}^n)$ indukált térkép fölött az ω^i_j 1-formák az

$$\omega^i_k = \bar{\Gamma}^i_{jk} dx^j + \bar{C}^i_{jk} dy^j, \quad \left(\bar{\Gamma}^i_{jk}, \bar{C}^i_{jk} \in C^\infty(\mathring{\tau}^{-1}(\mathcal{U}))\right)$$

alakban állíthatók elő. **ID3** értelmében az ω^i_j formák nulladfokú pozitív homogének, ami definíció szerint azt jelenti, hogy

$$\mathcal{L}_C \omega^i_j = 0,$$

ahol $\mathcal{L}_C$ a C szerinti Lie-deriválás operátora TM-en. Ez ekvivalens azzal (lásd például [15], p.189), hogy a $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ függvények nulladfokú, a $\bar{C}^i_{jk}$ függvények (-1)-edfokú pozitív homogének. A D invariáns differenciál birtokában kovariáns deriválást a

$$(\xi, \widetilde{Y}) \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M) \times \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau) \longmapsto D_\xi \widetilde{Y} := (D\widetilde{Y})(\xi) \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$$

előírással értelmezhetünk. Ennek az $(\mathcal{U},(u^i)_{i=1}^n)$ térképre vonatkozó, a

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = \Gamma^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}, \quad \text{illetve} \quad D_{\frac{\partial}{\partial y^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} = C^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}$$

relációk által meghatározott Γ^i_{jk}, C^i_{jk} $(i,j,k \in \{1,\dots,n\})$ Christoffel-szimbólumai megegyeznek az ω^i_j 1-formák komponensfüggvényeivel, nevezetesen

$$\Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk}, \quad C^i_{jk} = \bar{C}^i_{jk}; \qquad i,j,k \in \{1,\dots,n\}.$$

Valóban, például

$$\Gamma^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}} := \left(D\widehat{\frac{\partial}{\partial u^k}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \overset{\mathbf{ID1}}{=}$$

$$= \omega^i_s \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \delta^s_k \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \omega^i_k \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} =$$

$$= \bar{\Gamma}^i_{sk} dx^s \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \bar{\Gamma}^i_{sk} \delta^s_j \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}} = \bar{\Gamma}^i_{jk} \widehat{\frac{\partial}{\partial u^i}},$$

tehát $\Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk}$, minden szóbajövő indexre.

Következik az elmondottakból, hogy mind a Hashiguchi-féle, Christoffel-szimbólumokkal alkalmazó megközelítés, mind a Varga Ottó-féle invariáns differenciál, mind pedig a tárgyalásunkban alkalmazott Koszul-féle definíció (lásd 5.1.1. definíció és 1.6. szakasz) ugyanahhoz a differenciáloperátorhoz vezet.

7. fejezet

Összefoglaló

7.1. Vektornyalábok és kovariáns deriválás

Az első fejezetben rögzítjük jelöléseinket, megállapodásainkat és emlékeztetünk néhány olyan alapvető fogalomra és tényre, amelyeket a disszertációban állandóan alkalmazni fogunk.

(a) *Sokaság*on egy véges (de nem nulla) dimenziójú, Hausdorff, összefüggő, megszámlálható bázisú sima sokaságot értünk. $C^\infty(M)$ az M sokaságon értelmezett valós értékű sima függvények gyűrűje, $\mathrm{Diff}(M)$ jelöli az M sokaság összes diffeomorfizmusai által alkotott csoportot.

(b) Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ sima szürjekció *k-rangú valós vektornyaláb*, ha
(1) tetszőleges $E_p := \pi^{-1}(p)$ *fibrum*a k-dimenziós valós vektortér;
(2) minden $p \in M$ ponthoz megadható p-nek egy $\mathcal{U}$ környezete, valamint egy $\varphi\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ diffeomorfizmus úgy, hogy bármely $q \in \mathcal{U}$ esetén a

$$v \in \mathbb{R}^k \longmapsto \varphi(q, v) \in E_q$$

leképezés lineáris izomorfizmus.
Ekkor E-t, M-et, illetve π-t rendre *totáltér*nek, *bázissokaság*nak, illetve *projekció*nak nevezzük. Egy $\sigma\colon M \longrightarrow E$ leképezés *szelés*e π-nek, ha $\pi \circ \sigma = 1_M$. Ha $\mathcal{U} \subset M$ nyílt halmaz, $\sigma\colon \mathcal{U} \longrightarrow E$ sima leképezés és $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$, akkor σ-t $\mathcal{U}$ fölötti *lokális szelés*nek hívjuk. π szeléseinek $C^\infty(M)$-modulusát $\mathrm{Sec}(\pi)$-vel jelöljük.

Ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ k-rangú valós vektornyaláb, akkor minden $p \in M$ pontnak létezik olyan $\mathcal{U}$ környezete, amely fölött megadható lokális szelések egy $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ sorozata úgy, hogy az

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}), \qquad \left(q, \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix}\right) \longmapsto \nu^1\sigma_1(q) + \cdots + \nu^k\sigma_k(q)$$

leképezés diffeomorfizmus. Ez egy karakterisztikus tulajdonsága a vektornyaláboknak, amelyet a disszertációban definiáló tulajdonságként kezelünk.

(c) Egy $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M_1$ és $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M_2$ vektornyaláb közötti *nyalábleképezés*en olyan (F,f) leképezéspárt értünk, ahol $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ és $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ sima leképezések, amelyekre $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$ teljesül, és bármely $p \in M_1$ pont esetén az $F \restriction (E_1)_p$ leszűkítés ($\mathbb{R}$-) lineáris leképezés $(E_1)_p$-ből $(E_2)_{f(p)}$-be. Egy (F,f) nyalábleképezést *nyalábizomorfizmus*nak hívunk, ha F diffeomorfizmus. Egy vektornyaláb önmagára való nyalábizomorfizmusát *nyalábautomorfizmus*nak nevezzük.

(d) Legyenek $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M$ és $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M$ közös bázissokasággal rendelkező vektornyalábok. Egy $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ leképezést *erős nyalábleképezés*nek mondunk, ha $(F, 1_M)$ nyalábleképezés π_1-ből π_2-be. A disszertációban gyakran alkalmazzuk *az erős nyalábleképezések alaplemmá*ját (1.2.2.): egy $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2)$ leképezés akkor és csak akkor $C^\infty(M)$-lineáris, ha létezik olyan $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ erős nyalábleképezés, amelyre $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$ teljesül, minden $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi_1)$ esetén.

(e) Ha (F,f) nyalábautomorfizmusa a $\pi\colon E \longrightarrow M$ vektornyalábnak, akkor egy $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ szelés F általi *előretolt*ja a

$$F_\# \sigma := F \circ \sigma \circ f^{-1}$$

szelés. Bármely $h \in C^\infty(M)$ függvény esetén teljesül, hogy

$$F_\#(h\sigma) = (h \circ f^{-1}) F_\# \sigma.$$

(f) Egy M n-dimenziós sokaság *érintőnyaláb*ja az a $\tau\colon TM \longrightarrow M$ (olykor τ_M-mel jelölt) vektornyaláb, ahol tetszőleges $p \in M$ pont fibruma a T_pM érintőtér. Ha $\varphi\colon M \longrightarrow N$ sima leképezés, akkor φ *érintőleképezés*e vagy *derivált*ja az a $\varphi_*\colon TM \longrightarrow TN$ leképezés, amelyet a

$$(\varphi_*)(v)(h) := v(h \circ \varphi); \qquad v \in T_pM,\ h \in C^\infty(N)$$

előírás értelmez. (φ_*, φ) nyalábleképezése τ_M-nek τ_N-re, és így

$$\tau_N \circ \varphi_* = \varphi \circ \tau_M, \qquad \tau_{TN} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}.$$

(g) $\mathfrak{X}(M) := \mathrm{Sec}(\tau_M)$ jelöli az M-en értelmezett *vektormező*k $C^\infty(M)$-modulusát; $[X,Y]$ az $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezők *Lie-zárójel*e. Egy $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező és egy TM-en értelmezett A $\binom{1}{1}$-tenzor $[\xi, A]$ *Frölicher-Nijenhuis zárójel*én az

$$[\xi, A]\eta := [\xi, A\eta] - A[\xi, \eta], \qquad \eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

előírással definiált $\binom{1}{1}$-tenzort értjük.

(h) Az $X \in \mathfrak{X}(M)$ és az $Y \in \mathfrak{X}(N)$ vektormezőt *φ-megfelelő*nek nevezzük egy $\varphi\colon M \longrightarrow N$ sima leképezésre vonatkozóan, ha $\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi$; ekkor az $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ jelölést használjuk. $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ esetén $\varphi_\# X$ (lásd (e)) az az egyetlen vektormező M-en, amely φ-megfelelésben áll X-szel.

(i) Az $\mathbb{R}$ sokaság szokásos $(\mathbb{R}, r) := (\mathbb{R}, 1_\mathbb{R})$ térképéhez tartozó koordinátavektormezőt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$-rel jelöljük. Egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ (sima) görbe *sebességvektormező*je a $\dot\gamma := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$, *gyorsulásvektormező*je a

$$\ddot\gamma := \dot{\dot\gamma} = \dot\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$$

γ-, illetve $\dot\gamma$-menti vektormező. Ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_* \circ \dot\gamma, \qquad \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_{**} \circ \ddot\gamma.$$

(j) Egy $\pi\colon E \longrightarrow M$ vektornyalábon adott *kovariáns deriválás*on olyan

$$D\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi), \qquad (X, \sigma) \longmapsto D_X\sigma$$

leképezést értünk, amely az első változójában tenzoriális, a másodikban pedig deriváció. Ha (F, f) automorfizmusa π-nek, és

$$(F^\# D)_X \sigma := F_\#^{-1} D_{f_\# X} F_\# \sigma,$$

akkor $F^\# D$ szintén kovariáns deriválás π-n, ezt D F általi *visszahúzottjá*nak hívjuk. $F^\# D = D$ esetén azt mondjuk, hogy F *automorfizmus*a D-nek, a D automorfizmusai által alkotott csoportot $\mathrm{Aut}(D)$-vel jelöljük.

(k) Ha $\pi\colon E \longrightarrow M$ egy vektornyaláb és $c\colon I \longrightarrow M$ egy sima görbe, akkor egy $s\colon I \longrightarrow E$ sima leképezést *c-menti szelés*nek mondunk, ha $\pi \circ s = c$. A c-menti szelések egy $C^\infty(I)$-modulust alkotnak, amelyet $\mathrm{Sec}_c(\pi)$-vel jelölünk. Ha D kovariáns deriválás π-n, akkor egyértelműen létezik olyan $D_c\colon \mathrm{Sec}_c(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}_c(\pi)$ $\mathbb{R}$-lineáris leképezés, amely eleget tesz a következő feltételeknek:
(1) bármely $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ és $f \in C^\infty(I)$ esetén $D_c(fs) = f's + fD_cs$,
(2) ha $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ és $s := \sigma \circ c$, akkor $(D_cs)(t) = D_{\dot c(t)}\sigma$, $t \in I$.
A D_c leképezést a D-hez csatolt *c-menti kovariáns deriválás*nak nevezzük.

(l) A τ_M érintőnyaláb τ fölötti *visszahúzott*ja (pull-backje) az a $\tau^*\tau$ vektornyaláb, amelynek totáltere

$$TM \times_M TM := \{(v, w) \in TM \times TM \mid \tau(v) = \tau(w)\},$$

és projekciója a $(v, w) \in TM \times TM \longmapsto v \in TM$ leképezés. Szükségünk van arra a $\mathring{\tau}^*\tau$ visszahúzott nyalábra is, ahol $\mathring{\tau}\colon \mathring{T}M \longrightarrow M$ a τ a hasított érintőnyaláb:

$\mathring{T}M := TM \setminus o(M)$ ($o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező), $\mathring{\tau} := \tau \restriction \mathring{T}M$.

$\tau^*\tau$ szeléseinek $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulusát generálják az

$$\widehat{X}\colon v \in TM \longmapsto \widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \in TM \times_M TM, \quad X \in \mathfrak{X}(M)$$

bázikus vektormezők. A $\delta\colon v \in TM \longmapsto \delta(v) := (v, v) \in TM \times_M TM$ szelést $\tau^*\tau$ *kanonikus szelés*ének hívjuk.

(m) Egy $D\colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ kovariáns deriválás *geodetikus*án olyan $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbét értünk, amely eleget tesz a $D_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}) = 0$ feltételnek; ami ekvivalens a $D_{\ddot{\gamma}(t)}\delta = 0$, $t \in I$ feltétellel (lásd (k)/(2)).

7.2. Struktúrák az érintőnyalábon

Ebben a fejezetben röviden összefoglaljuk a τ_M érintőnyalábon értelmezhető alapvető kanonikus objektumokat, és leírjuk, hogyan változnak egy előretolás hatására.

(a) $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$ és $f^{\mathsf{c}}\colon v \in TM \longmapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ egy $f \in C^\infty(M)$ függvény *vertikális*, illetve *teljes lift*je. Ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor $(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*$.

(b) Egy TM-en értelmezett ξ vektormezőt *vertikális*nak mondunk, ha $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$; a vertikális vektormezők $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ algebrája részalgebrája az $\mathfrak{X}(TM)$ Lie-algebrának. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező *vertikális lift*je az az egyértelműen létező X^{v} vertikális vektormező, amely eleget tesz a $X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ feltételnek, bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén. Létezik egy kitüntetett vertikális vektormező TM-en, a C-vel jelölt *Liouville-vektormező*, amelyet azzal jellemezhetünk, hogy $Cf^{\mathsf{v}} = 0$ és $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$ ($f \in C^\infty(M)$).

(c) Tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező, amelyre $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ és $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}$ teljesül bármely $f \in C^\infty(M)$ esetén; ezt a vektormezőt X *teljes lift*jének nevezzük. Ekkor $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$, és $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ maga után vonja $X^{\mathsf{c}} \underset{\varphi_*}{\sim} Y^{\mathsf{c}}$ teljesülését (2.1.3. lemma). Ha $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}$.

(d) Fontos szerepet játszik a

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0,$$

kanonikus egzakt sorozat, ahol $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ az alábbiak szerint van értelmezve:

$$\mathbf{i}(v, w) := \dot{c}(0);\ c(t) := v + tw\ (t \in \mathbb{R}); \qquad \mathbf{j}(z) := (\tau_{TM}(z), \tau_*(z)).$$

A $\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$ leképezést TTM *vertikális endomorfizmus*ának hívjuk. A 7.1./(d)-ben mondottak alapján $\mathbf{i}$ és $\mathbf{j}$ $C^\infty(TM)$-homomorfizmusokat indukál a megfelelő szelések modulusai között, ezeket szintén $\mathbf{i}$-vel és $\mathbf{j}$-vel jelöljük. Hasznosak a következő relációk:

$$C = \mathbf{i}\delta, \qquad [C, \mathbf{J}] = -\mathbf{J};$$
$$\mathbf{j}X^{\mathsf{c}} = \widehat{X}, \quad \mathbf{j} \circ X^{\mathsf{v}} = 0, \quad \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}}, \quad [X^{\mathsf{v}}, \mathbf{J}] = [X^{\mathsf{c}}, \mathbf{J}] = 0, \quad (X \in \mathfrak{X}(M)).$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ sima görbe esetén $\mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \delta \circ \dot{\gamma}$ (2.2.1. lemma).

(e) Ha $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, és $\varphi_* \times \varphi_*$ jelöli a

$$(u, v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\varphi_*(u), \varphi_*(v)) \in TM \times_M TM$$

leképezést, akkor $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ nyalábautomorfizmusa $\tau^*\tau$-nak. $\varphi_\# \widetilde{X}$-mal jelöljük egy $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ szelés $\varphi_* \times \varphi_*$ általi előretoltját; ekkor (v.ö. 7.1./(e))

$$\varphi_\# \widetilde{X} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1}.$$

Speciálisan, *tetszőleges M-en adott X vektormező esetén* $\varphi_\# \widehat{X} = \widehat{\varphi_\# X}$ (2.3.2. lemma), *teljesül továbbá, hogy* $\varphi_\# \delta = \delta$.

2.3.3. Lemma. *Ha $\varphi\colon M \longrightarrow M$ sima leképezés, akkor*

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*), \qquad (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**}, \qquad \varphi_{**} \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \varphi_{**}.$$

Amennyiben φ diffeomorfizmus, úgy (2.3.4. következmény)

$$(\varphi_*)_\# C = C, \qquad (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}} \quad (X \in \mathfrak{X}(M));$$

továbbá (2.3.5. következmény)

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_\#, \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\#, \qquad (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ (\varphi_*)_\#.$$

7.3. Spray-sokaságok

Ebben a fejezetben definiáljuk a másodrendű vektormezőket és legfontosabb variánsaikat. Felidézzük és összegyűjtjük a hozzájuk kapcsolódó alapvető tényeket, és megtesszük első észrevételeinket az affinitásaik és automorfizmusaik kapcsolatára vonatkozóan.

(a) Egy $\mathring{T}M$ fölött sima $S\colon TM \longrightarrow TTM$ leképezés *szemispray*, ha $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, zérusvektort zérusvektorba visz, és eleget tesz a $\mathbf{j}S = \delta$ (vagy – ekvivalens módon – a $\mathbf{J}S = C$) feltételnek. Egy szemisprayt *másodrendű vektormező*nek mondunk, ha a teljes értelmezési tartományán sima. *Spray*n olyan C^1-osztályú szemisprayt értünk, amely másodfokú pozitív homogén abban az értelemben, hogy $[C, S] = S$. Egy C^2-osztályú sprayt *affin spray*nek nevezünk.

(b) Ha S szemispray TM-en, akkor tetszőleges $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$, illetve $X \in \mathfrak{X}(M)$ esetén $\mathbf{J}[\mathbf{J}\xi, S] = \mathbf{J}\xi$ (Grifone-reláció), teljesül továbbá, hogy $[X^{\mathsf{v}}, S] = X^{\mathsf{c}} + \eta$, ahol $\eta \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$.

(c) Egy reguláris $\gamma\colon I \longrightarrow M$ görbe *geodetikus*a egy S szemispraynek, ha a sebességvektormezője integrálgörbéje S-nek, azaz ha $S \circ \dot\gamma = \ddot\gamma$. Egy $\varphi\colon M \longrightarrow M$ diffeomorfizmus *affinitás*a (vagy *totálgeodetikus transzformáció*ja) egy S szemispraynek, ha megőrzi a geodetikusokat (mint parametrizált görbéket), vagyis ha

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}, \qquad \textit{minden } \gamma\colon I \longrightarrow M \textit{ geodetikus esetén.}$$

Egy S szemispray affinitásai Lie-csoportot alkotnak, amelyet $\mathrm{Aff}(S)$-sel jelölünk.

(d) Ha S szemispray és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor $(\varphi_*)_\# S$ szintén szemispray, és – speciálisan – spray, ha S is spray. φ-t S *automorfizmus*ának hívjuk, ha $(\varphi_*)_\# S = S$, azaz ha $\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*$. $\mathrm{Aut}(S)$ jelöli S automorfizmusainak csoportját.

(e) *Ha S szemispray és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, akkor tetszőleges $\gamma\colon I \longrightarrow M$ geodetikus esetén*

$$(\varphi_{**} \circ S - S \circ \varphi_*) \circ \dot\gamma = 0 \qquad (3.2.2.);$$

teljesül továbbá, hogy

$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aut}(S) \qquad (3.2.5.).$$

7.4. Ehresmann-konnexiók

Ebben a fejezetben az Ehresmann-konnexiókat vizsgáljuk. Egyrészt néhány fontos ismert tételt igazolunk új eszközök és ötletek segítségével (4.1.3., 4.3.2.-4.3.5.), másrészt pedig – és ez a fejezet fő eredménye – egy Ehresmann-konnexió automorfizmusait jellemezzük az affinitásai és az erős torziója segítségével (4.5.7.). Mindez, egy gondos diszkusszió révén, lehetővé teszi annak a klasszikus tételnek egy élesítését, amely szerint 'egy sokaság diffeomorfizmusa pontosan akkor automorfizmusa egy kovariáns deriválásnak, ha affinitás és megőrzi a torziót'.

(a) Egy M sokaság fölötti $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexió*n a 7.3./(d)-beli kanonikus egzakt sorozat olyan jobboldali hasítását értjük, amely $\mathring{T}M \times_M TM$ fölött sima, és amelyre tetszőleges $p \in M$, $v \in T_pM$ esetén $\mathcal{H}(o(p), v) := (o_*)_p(v)$ teljesül, ahol $o \in \mathfrak{X}(M)$ a zérus vektormező. $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$, $\mathbf{v} := 1_{TTM} - \mathbf{h}$, $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$

és $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$ rendre a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexióhoz csatolt *horizontális projektor*, *vertikális projektor*, *vertikális leképezés* és *szemispray*. Egy $X \in \mathfrak{X}(M)$ vektormező ($\mathcal{H}$ szerinti) *horizontális lift*je az $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$ vektormező.

(b) Ha S szemispray M fölött, akkor egyértelműen létezik olyan $\mathcal{H}_S$ Ehresmann-konnexió, hogy

$$\mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [X^{\mathsf{v}}, S]) \qquad \text{bármely } X \in \mathfrak{X}(M)\text{-re} \qquad (\textit{Crampin}).$$

A $\mathcal{H}$-hoz tartozó horizontális projektor

$$\mathbf{h}_S = \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S, \mathbf{J}]) \qquad (\textit{Grifone})$$

(4.1.3. állítás).

(c) Legyen $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió az M sokaság fölött. Ha

$$\nabla_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathcal{H}\widetilde{Y}] + \mathcal{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}]; \qquad \xi \in \mathfrak{X}(TM),\ \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau),$$

akkor ∇ kovariáns deriválás $\mathring{\tau}^*\tau$-n, amelyet a $\mathcal{H}$ által indukált *Berwald-deriválás*nak hívunk. A

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \quad \text{illetve a} \quad \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} := \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}} \widetilde{Y} \qquad (\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$$

formulával értelmezett ∇^{h}, illetve ∇^{v} operátor a ($\mathcal{H}$-hoz tartozó) *h-Berwald deriválás*, illetve (*kanonikus*) *vertikális deriválás*. (Könnyen látható, hogy ∇^{v} nem függ az Ehresmann-konnexió megválasztásától.) Egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió $\mathbf{t}$ *tenzió*ja, $\mathbf{T}$ *torzió*ja, és $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$ *erős torzió*ja rendre a $\mathbf{t} := \nabla^{\mathsf{h}}\delta$, $\mathbf{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{Y}} \widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathcal{H}\widetilde{Y}]$ ($\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau)$) és $\mathbf{T}^{\mathsf{s}} := \mathbf{t} + i_\delta \mathbf{T}$ tenzor. $\mathcal{H}$ *homogén*, ha a tenziója eltűnik. *Homogén esetben az $S_{\mathcal{H}}$ csatolt szemispray spray. Megfordítva, ha $S_{\mathcal{H}}$ spray, akkor* $\mathbf{t}(\delta) = 0$ (4.2.3. lemma).

4.3.2. Állítás. $\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$*, ahol az $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ Ehresmann-konnexió az $S_{\mathcal{H}}$ szemisprayből származik* (lásd (b)).

Következményként adódik (4.3.3., 4.3.4.), hogy *egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót tekintve az alábbi három feltétel ekvivalens: (i) $\mathcal{H}$ erős torziója eltűnik. (ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$. (iii) $\mathbf{t} = 0$ és $\mathbf{T} = 0$.*

Ugyancsak 4.3.2. alapján nyerhető a

4.3.5. Következmény (*Unicitás-tétel*). *Egy Ehresmann-konnexiót egyértelműen meghatározza az erős torziója és az általa indukált szemispray.*

(d) Amennyiben $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió M fölött és $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, úgy $\varphi^{\#}\mathcal{H} := \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$ szintén Ehresmann-konnexió, $\mathcal{H}$ φ általi *visszahúzottja*. Ha $\varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, és így $\varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$, akkor φ-t $\mathcal{H}$ *automorfizmus*ának nevezzük. $\mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ jelöli $\mathcal{H}$ automorfizmusainak csoportját.

A következő állítások ekvivalensek:

$$\text{(i)}\ \varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}), \qquad \text{(ii)}\ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \varphi_{**},$$
$$\text{(iii)}\ \varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}, \quad \text{(iv)}\ \varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**},$$
$$\text{(v)}\ (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{h}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{h}}, \quad \textit{minden } X \in \mathfrak{X}(M)\textit{-re}$$

(4.5.2. állítás). *Ha (i)-(v) valamelyike, és ezért bármelyike teljesül, akkor* $\mathbf{t}$*,* $\mathbf{T}$ *és* $\mathbf{T}^{\mathbf{s}}$ *eleget tesz a*

$$\varphi_\# \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ \varphi_\#, \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#), \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_\#$$

felcserélési relációknak (4.5.3. állítás).

4.5.4. és 4.5.5. Állítások. *Legyen* $\mathcal{H}$ *egy* M *sokaság fölötti Ehresmann-konnexió, és legyen* ∇ *a* $\mathcal{H}$ *által indukált Berwald-deriválás. Ekkor*

$$\mathrm{Aut}(\mathcal{H}) \subset \mathrm{Aut}(\nabla) \cap \mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}).$$

Megfordítva, ha S *szemispray* M *fölött, akkor*

$$\mathrm{Aut}(S) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_S).$$

4.5.6. Tétel. *Az* M *sokaság egy* φ *diffeomorfizmusa akkor és csak akkor automorfizmusa egy (*M *fölötti)* $\mathcal{H}$ *Ehresmann-konnexiónak, ha automorfizmusa* $S_{\mathcal{H}}$*-nak és eleget tesz a* $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_\#$ *relációnak.*

(e) Egy $\gamma\colon I \longrightarrow M$ reguláris görbe *geodetikus*a a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha $\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = 0$, vagy – ekvivalens módon – $\mathbf{h} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. *$\mathcal{H}$ geodetikusai egybeesnek a csatolt $S_{\mathcal{H}}$ szemispray geodetikusaival* (4.4.2. állítás). *$\mathcal{H}$ homogenitása esetén $\mathcal{H}$-nak és az általa indukált Berwald-deriválásnak ugyanazok a geodetikusai* (4.4.4. lemma). *Ez a tulajdonság pontosan akkor teljesül, ha $S_{\mathcal{H}}$ spray* (4.4.6. állítás).

(f) Egy $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ leképezés *affinitás*a egy (M sokaság fölötti) $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha megőrzi a geodetikusokat mint parametrizált görbéket (v.ö. 7.3./(c)). A $\mathcal{H}$ összes affinitása által alkotott csoportot $\mathrm{Aff}(\mathcal{H})$-val jelöljük. Ugyanígy definiálhatjuk egy $\tau^*\tau$-n értelmezett D és egy M-en adott $\mathring{D}$ kovariáns deriválás $\mathrm{Aff}(D)$ és $\mathrm{Aff}(\mathring{D})$ affinitáscsoportját. Az (e) pontban tett észrevételekből azonnal adódik, hogy

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}}) \qquad \text{(4.4.3. következmény);}$$

és hogy

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\nabla), \quad \textit{ha } \mathcal{H} \textit{ homogén} \qquad \text{(4.4.5. következmény).}$$

Mivel $\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}})$ (lásd 3.2.5.), a 4.5.6. tétel a következő fontos eredményhez vezet:

4.5.7. Következmény. *φ pontosan akkor automorfizmusa a $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiónak, ha affinitása $\mathcal{H}$-nak és $\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$.*

Végül, tekintve egy $\mathring{D}$ kovariáns deriválást az M sokaságon, új jellemzését adjuk a $\mathring{D}$-automorfizmusoknak.

4.5.8. Tétel. *$\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D})$ pontosan akkor teljesül, ha $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathring{D})$ és $\varphi_\# \circ i_\delta \mathbf{T} = i_\delta \mathbf{T} \circ \varphi_\#$, ahol $\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \mathbf{i}^{-1}(T(\mathring{D})(X,Y))^{\mathsf{v}}$, $T(\mathring{D})$ $\mathring{D}$ torziója és $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

7.5. Vonalelem D-sokaságok

Ebben a fejezetben a $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválásokat vizsgálunk. Többféle regularitás-fogalmat vezetünk be és jellemezzük ezeket. Megmutatjuk, hogy bármely $\tau^*\tau$-on adott reguláris kovariáns deriválásból kanonikusan származtatható egy Ehresmann-konnexió. Konstrukcióink egy Ehresmann-konnexió tenziójának új interpretációjához is elvezetnek. A fejezet fő eredményei (5.4.7., 5.4.9., 5.4.11.) korábbi állítások (4.5.6., 4.5.8.) általánosításai a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon adott reguláris kovariáns deriválásokra.

(a) *Vonalelem D-sokaság*on olyan (M, D) párt értünk, ahol M egy sima sokaság, D pedig kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon. A D-hez tartozó D^{v} *v-kovariáns deriválás*t a $D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$ előírással értelmezzük. D *torzió*ja a

$$T(D)(\xi, \eta) := D_\xi \mathbf{j}\eta - D_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}[\xi, \eta]; \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$$

formulával definiált $T(D)$ $\binom{1}{2}$-tenzor. Az

$$\mathcal{S}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}; \qquad \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$$

előírással adott $\mathcal{S}$ különbségtenzort D *Finsler-torzió*jaként is említjük. Ha egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexiót is kijelölünk M fölött, akkor a D kovariáns deriválás $\mathcal{T}$ ($\mathcal{H}$-) *horizontális torzió*ját, $T^{\mathsf{v}}(D)$ ($\mathcal{H}$-) *vertikális torzió*ját, és $\mathcal{P}$ *horizontális különbségtenzor*át rendre a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\mathcal{H}\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathcal{H}\widetilde{Y}], \\
T^{\mathsf{v}}(D)(\xi, \eta) &:= D_\xi \mathcal{V}\eta - D_\eta \mathcal{V}\xi - \mathcal{V}[\xi, \eta], \\
\mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &:= D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}.
\end{aligned}$$

formulákkal vezetjük be, ahol $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$, $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM)$. Megjegyezzük, hogy $\mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}\widetilde{X}, \mathbf{i}\widetilde{Y})$.

(b) Legyen D kovariáns deriválás $\tau^*\tau$-n. A $\mu := D\delta$, illetve $\mu^{\mathsf{v}} := \mu \circ \mathbf{i}$ $\binom{1}{1}$-tenzort D *deflexió*jának, illetve *v-deflexió*jának nevezzük. D *reguláris*, ha μ^{v} fibrumonként injektív; *erősen reguláris*, ha $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)}$; *vertikálisan természetes*, ha $D^{\mathsf{v}} = \nabla^{\mathsf{v}}$.

5.1.4. Lemma. $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta \mathcal{S}$.

5.1.6. Következmény. *Egy kovariáns deriválás pontosan akkor vertikálisan természetes, erősen reguláris, illetve reguláris, ha* $\mathcal{S} = 0$, $i_\delta\mathcal{S} = 0$, *illetve ha* $1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$ *bijektív. A vertikális természetesség maga után vonja az erős regularitást, az erős regularitásból pedig következik a regularitás.*

(c) Legyen D kovariáns deriválás $\tau^*\tau$-n és legyen $\mathcal{H}$ M fölötti Ehresmann-konnexió. Ha $D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, akkor azt mondjuk, hogy D^{h} a $\mathcal{H}$-hoz tartozó *h-kovariáns deriválás*. D $\mathcal{H}$-*deflexiója* a $\mu^{\mathcal{H}} := D^{\mathsf{h}}\delta = \mu \circ \mathcal{H}$ $\binom{1}{1}$-tenzor. D *$\mathcal{H}$-hoz csatolt*, ha $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$; D *erősen csatolt a $\mathcal{H}$-hoz*, ha $\mu = \mathcal{V}$. Megmutatjuk a következőket:
– *egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió által indukált Berwald-deriválás pontosan akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha $\mathcal{H}$ homogén* (5.1.8.);
– *D akkor és csak akkor csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha reguláris és $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9./(1));
– *D pontosan akkor erősen csatolt $\mathcal{H}$-hoz, ha erősen reguláris és $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9./(2)).

(d) Legyen D reguláris kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ visszahúzott nyalábon. A 5.2.1. tétel, 5.2.2. és 5.2.7 állítások eredményeit a következőképpen foglalhatjuk össze: *Egyértelműen létezik olyan $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexió, hogy D $\mathcal{H}_D$-deflexiója eltűnik. Bázikus vektormezőkön $\mathcal{H}_D$ hatását a*

$$\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

összefüggés adja meg. A $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális projektor a

$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1} D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$$

leképezés, és $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_D) = \mathrm{Ker}(\mu)$. *$\mathcal{H}_D$ akkor és csak akkor származik szemi-sprayből* a 7.4./(b) szerinti értelemben, *ha* $\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \mathcal{P}(\widetilde{Y}, \widetilde{X})$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, *ahol $\mathcal{T}$ és $\mathcal{P}$ a $\mathcal{H}_D$-hez tartozó horizontális torzió, illetve különbségtenzor. Ha – speciálisan – D erősen reguláris, akkor* $\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$, $\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ \mu$.
$\mathcal{H}_D$-t a D által indukált Ehresmann-konnexió*nak nevezzük.*

(e) Legyen adott egy $\mathcal{H}$ Ehresmann-konnexió, és legyen ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás. Ekkor tekinthetjük a ∇ által indukált $\mathcal{H}_\nabla$ Ehresmann-konnexiót, és a következő eredményhez jutunk:

A tenzió interpretációja (5.2.4.) **:** $\mathbf{it} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla$.

(f) A dolgozat fő részét lezáró 5. fejezetben többféle jellemzést adunk egy $\tau^*\tau$-n értelmezett D reguláris kovariáns deriválás automorfizmusaira. Az 5.4.7., 5.4.9. és 5.4.11. tételek eredményei az alábbiakban foglalhatók össze.

Tekintve a D által indukált $\mathcal{H}_D$ Ehresmann-konnexiót, és képezve erre vonatkozóan a $\mathbf{T}^{\mathsf{s}}$, $\mathcal{T}$ és $T^{\mathsf{v}}(D)$ torziókat, valamint a $\mathcal{P}$ különbségtenzort, egy $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ diffeomorfizmusra a következő állítások ekvivalensek:

(i) $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$.
(ii) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$, *és* φ *eleget tesz a* $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$ *relációknak.*
(iii) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$, *és* φ *eleget tesz a* $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_\#$, $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$ *relációknak.*
(iv) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$, *és* φ *eleget tesz a* $\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$, $\varphi_\# \circ T^{\mathsf{v}}(D) = T^{\mathsf{v}}(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$ *relációknak.*

7.6. Appendix: a koordinátás nézőpont

Az Appendixben levezetjük egy szemispray koefficienseinek, egy Ehresmann-konnexió és egy, a $\tau^*\tau$ nyalábon adott kovariáns deriválás, valamint egy tetszőleges π vektornyalábon adott kovariáns deriválás Christoffel-szimbólumainak transzformációs szabályát térképcsere esetén. Mai nyelven történő (de koordinátás) leírását adjuk a Varga Ottó által bevezetett invariáns differenciálnak. Kiderül, hogy ez az operátor azonosítható a Hashiguchi-féle „vonalelem-sokaságon adott affin konnexió"-val, és hogy mindkét differenciálási eljárás a disszertációban szereplő, a $\tau^*\tau$ nyalábon értelmezett kovariáns deriválás egy-egy lokális megjelenítésének tekinthető.

8. fejezet

Summary

8.1. Vector bundles and covariant differentiation

The aim of the first chapter is to fix our notation, conventions, and to recall some basic concepts and facts which will be used throughout the Thesis.

(a) By a *manifold* we always mean a connected, Hausdorff, second countable smooth manifold of finite (positive) dimension. $C^\infty(M)$ is the ring of smooth real-valued functions on a manifold M, $\mathrm{Diff}(M)$ denotes the group of diffeomorphisms of M.

(b) A real *vector bundle* of rank k over a manifold M is a smooth map $\pi\colon E \longrightarrow M$ such that
(1) each *fibre* $E_p := \pi^{-1}(p)$, $p \in M$ is a k-dimensional real vector space;
(2) for each $p \in M$ there is a neighbourhood $\mathcal{U}$ of p in M and a diffeomorphism $\varphi\colon \mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U})$ such that for each $q \in \mathcal{U}$, the map

$$v \in \mathbb{R}^k \longmapsto \varphi(q, v) \in E_q$$

is a linear isomorphism.
Then E, M and π are called the *total space*, the *base manifold* and the *projection*, respectively. A smooth map $\sigma\colon M \longrightarrow E$ is a *section* of π if $\pi \circ \sigma = 1_M$. More generally, a section over an open subset $\mathcal{U} \subset M$ is a smooth map $\sigma\colon \mathcal{U} \longrightarrow E$ with $\pi \circ \sigma = 1_{\mathcal{U}}$. $\mathrm{Sec}(\pi)$ denotes the $C^\infty(M)$-module of sections of π.

If $\pi\colon E \longrightarrow M$ is a real vector bundle of rank k, then for each point $p \in M$ there exists a neighbourhood $\mathcal{U}$ of p and a family $(\sigma_\alpha)_{\alpha=1}^k$ of sections over $\mathcal{U}$ such that the map

$$\mathcal{U} \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \pi^{-1}(\mathcal{U}), \qquad \left(q, \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_k \end{pmatrix}\right) \longmapsto \nu^1\sigma_1(q) + \cdots + \nu^k\sigma_k(q)$$

is a diffeomorphism. This is a characteristic property of vector bundles, used in the Thesis as the defining property.

(c) If $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M_1$ and $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M_2$ are two vector bundles, then a *bundle map* of π_1 into π_2 is a pair (F, f) of smooth maps $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ and $f\colon M_1 \longrightarrow M_2$ such that $\pi_2 \circ F = f \circ \pi_1$, and for each $p \in M_1$ the restriction $F \restriction (E_1)_p$ is an ($\mathbb{R}$-) linear map of $(E_1)_p$ into $(E_2)_{f(p)}$. A bundle map (F, f) is called an *isomorphism* if F is a diffeomorphism. An *automorphism* of a vector bundle is an isomorphism of the bundle onto itself.

(d) Let $\pi_1\colon E_1 \longrightarrow M$ and $\pi_2\colon E_2 \longrightarrow M$ be vector bundles with common base manifold. Then a smooth map $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ is said to be a *strong bundle map* if $(F, 1_M)$ is a bundle map of π_1 into π_2. Throughout the Thesis is (tacitly) used the *fundamental lemma of strong bundle maps* (1.2.2): a map $\mathcal{F}\colon \mathrm{Sec}(\pi_1) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi_2)$ is $C^\infty(M)$-linear, if and only if, there is a strong bundle map $F\colon E_1 \longrightarrow E_2$ such that $\mathcal{F}(\sigma) = F \circ \sigma$, for all $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi_1)$.

(e) If (F, f) is an automorphism of the vector bundle $\pi\colon E \longrightarrow M$, then the *push-forward of a section* $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ by F is the section

$$F_\# \sigma := F \circ \sigma \circ f^{-1}.$$

Then for any function $h \in C^\infty(M)$ we have

$$F_\#(h\sigma) = (h \circ f^{-1}) F_\# \sigma.$$

(f) The *tangent bundle* of an n-dimensional manifold M is the vector bundle $\tau\colon TM \longrightarrow M$ (denoted also by τ_M) whose fibre at a point $p \in M$ is the tangent space T_pM. If $\varphi\colon M \longrightarrow N$ is a smooth map, then its *tangent map* or *derivative* $\varphi_*\colon TM \longrightarrow TN$ is given by

$$(\varphi_*)(v)(h) := v(h \circ \varphi); \qquad v \in T_pM,\ h \in C^\infty(N).$$

Then (φ_*, φ) is a bundle map of τ_M into τ_N, and hence

$$\tau_N \circ \varphi_* = \varphi \circ \tau_M, \qquad \tau_{TN} \circ \varphi_{**} = \varphi_* \circ \tau_{TM}.$$

(g) $\mathfrak{X}(M) := \mathrm{Sec}(\tau_M)$ is the $C^\infty(M)$-module of *vector fields* on M; $[X, Y]$ is the *Lie bracket* of $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. If $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ and $A\colon \mathfrak{X}(TM) \longrightarrow \mathfrak{X}(TM)$ is a type $\binom{1}{1}$ tensor on TM, then their *Frölicher-Nijenhuis bracket* is the $\binom{1}{1}$ tensor $[\xi, A]$ given by

$$[\xi, A]\eta := [\xi, A\eta] - A[\xi, \eta], \qquad \eta \in \mathfrak{X}(TM).$$

(h) Two vector fields $X \in \mathfrak{X}(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ are called *φ-related* with respect to a smooth map $\varphi\colon M \longrightarrow N$ if $\varphi_* \circ X = Y \circ \varphi$; then we write $X \underset{\varphi}{\sim} Y$. If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $\varphi_\# X$ (see (e)) is the unique vector field on M which is

φ-related to X.

(i) We denote by $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$ the canonical vector field on $\mathbb{R}$ arising from the usual chart $(\mathbb{R}, r) := (\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$. The *velocity field* of a (smooth) curve $\gamma \colon I \longrightarrow M$ is $\dot{\gamma} := \gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}$, the *acceleration field* of γ is

$$\ddot{\gamma} := \dot{\dot{\gamma}} = \dot{\gamma}_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} = \left(\gamma_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)_* \circ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} .$$

If $\varphi \colon M \longrightarrow M$ is a smooth map, then

$$\dot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_* \circ \dot{\gamma}, \qquad \ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = \varphi_{**} \circ \ddot{\gamma}.$$

(j) A *covariant derivative* in a vector bundle $\pi \colon E \longrightarrow M$ is a map

$$D \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathrm{Sec}(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\pi), \qquad (X, \sigma) \longmapsto D_X \sigma$$

such that D is tensorial in X and a derivation in σ. If (F, f) is an automorphism of π, and

$$(F^{\#} D)_X \sigma := F_{\#}^{-1} D_{f_{\#} X} F_{\#} \sigma,$$

then $F^{\#} D$ is also a covariant derivative in π, the *pull-back of* D via F. If $F^{\#} D = D$, then F is called an *automorphism of* D. $\mathrm{Aut}(D)$ denotes the group of automophisms of the covariant derivative D.

(k) Let $\pi \colon E \longrightarrow M$ be a vector bundle, and $c \colon I \longrightarrow M$ a smooth curve. A smooth map $s \colon I \longrightarrow E$ is said to be a *section along* c if $\pi \circ s = c$. The sections along c form a $C^\infty(I)$-module denoted by $\mathrm{Sec}_c(\pi)$. If D is a covariant derivative in π, then there is a unique $\mathbb{R}$-linear map $D_c \colon \mathrm{Sec}_c(\pi) \longrightarrow \mathrm{Sec}_c(\pi)$ such that
(1) if $s \in \mathrm{Sec}_c(\pi)$ and $f \in C^\infty(I)$, then $D_c(fs) = f's + fD_c s$,
(2) if $\sigma \in \mathrm{Sec}(\pi)$ and $s := \sigma \circ c$, then $(D_c s)(t) = D_{\dot{c}(t)} \sigma$, $t \in I$.
D_c is called the *covariant derivative along* c.

(l) The *pull-back of* τ_M *over* τ is the vector bundle $\tau^*\tau$ with total space $TM \times_M TM := \{(v, w) \in TM \times TM \mid \tau(v) = \tau(w)\}$, and projection $(v, w) \in TM \times TM \longmapsto v \in TM$. We also consider the vector bundle $\mathring{\tau}^* \tau$, where $\mathring{\tau} \colon \mathring{T}M \longrightarrow M$ is the deleted bundle for τ, i.e., $\mathring{T}M := TM \setminus o(M)$, $o \in \mathfrak{X}(M)$ is the zero vector field, and $\mathring{\tau} := \tau \restriction \mathring{T}M$.

The $C^\infty(TM)$-module $\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ is generated by the *basic vector fields*

$$\widehat{X} \colon v \in TM \longmapsto \widehat{X}(v) := (v, X(\tau(v))) \in TM \times_M TM, \quad X \in \mathfrak{X}(M).$$

The section $\delta \colon v \in TM \longmapsto \delta(v) := (v, v) \in TM \times_M TM$ is called the *canonical section* of $\tau^*\tau$.

(m) By a *geodesic of a covariant derivative* $D \colon \mathfrak{X}(TM) \times \mathrm{Sec}(\tau^*\tau) \longrightarrow \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ we mean a regular curve $\gamma \colon I \longrightarrow M$ satisfying the condition $D_{\dot{\gamma}}(\delta \circ \dot{\gamma}) = 0$. Equivalently (see (k)/(2)), γ is a geodesic of D, if and only if, $D_{\ddot{\gamma}(t)} \delta = 0$, for all $t \in I$.

8.2. Structures on the tangent bundle

In this chapter we offer a brief summary of the basic canonical objects living on the tangent bundle τ_M. In particular, we describe, how these objects change under a push-forward operation.

(a) $f^{\mathsf{v}} := f \circ \tau$ and $f^{\mathsf{c}} \colon v \in TM \longmapsto f^{\mathsf{c}}(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ are the *vertical* and the *complete lift of a function* $f \in C^\infty(M)$, respectively. If $\varphi \colon M \longrightarrow M$ is a smooth map, then $(f \circ \varphi)^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}} \circ \varphi_*$.

(b) A vector field ξ on TM is called *vertical*, if $\xi \underset{\tau}{\sim} 0$; the vertical vector fields form a subalgebra $\mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM)$ of the Lie algebra $\mathfrak{X}(TM)$. The *vertical lift* of a vector field X on M is the unique vertical vector field X^{v} which satisfies $X^{\mathsf{v}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ for all $f \in C^\infty(M)$. We have a canonical vertical vector field, the *Liouville vector field* C on TM. It may be characterized by the two conditions $Cf^{\mathsf{v}} = 0$ and $Cf^{\mathsf{c}} = f^{\mathsf{c}}$, for all $f \in C^\infty(M)$.

(c) The *complete lift of a vector field* $X \in \mathfrak{X}(M)$ is the unique vector field $X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(TM)$ satisfying $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{v}} = (Xf)^{\mathsf{v}}$ and $X^{\mathsf{c}} f^{\mathsf{c}} = (Xf)^{\mathsf{c}}$ for all $f \in C^\infty(M)$. Then $X^{\mathsf{c}} \underset{\tau}{\sim} X$, and $X \underset{\varphi}{\sim} Y$ implies $X^{\mathsf{c}} \underset{\varphi_*}{\sim} Y^{\mathsf{c}}$ (Lemma 2.1.3). If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $(\varphi_*)_\# X^{\mathsf{c}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{c}}$.

(d) We have the *canonical exact sequence*

$$0 \longrightarrow TM \times_M TM \xrightarrow{\mathbf{i}} TTM \xrightarrow{\mathbf{j}} TM \times_M TM \longrightarrow 0$$

of strong bundle maps defined by

$$\mathbf{i}(v,w) := \dot{c}(0);\ c(t) := v + tw\ (t \in \mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \mathbf{j}(z) := (\tau_{TM}(z), \tau_*(z)).$$

$\mathbf{J} := \mathbf{i} \circ \mathbf{j}$ is said to be the *vertical endomorphism* of TTM. By 8.1/(d), $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ induce $C^\infty(TM)$-homomorphisms at the level of sections, which we denote by the same symbols. We have the relations

$$C = \mathbf{i}\delta, \qquad [C, \mathbf{J}] = -\mathbf{J};$$

and, for each $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathbf{j}X^{\mathsf{c}} = \widehat{X}, \qquad \mathbf{j} \circ X^{\mathsf{v}} = 0, \qquad \mathbf{J}X^{\mathsf{c}} = X^{\mathsf{v}}, \qquad [X^{\mathsf{v}}, \mathbf{J}] = [X^{\mathsf{c}}, \mathbf{J}] = 0.$$

It is easy to check that $\mathbf{j} \circ \ddot{\gamma} = \delta \circ \dot{\gamma}$, for any smooth curve $\gamma \colon I \longrightarrow M$ (Lemma 2.2.1).

(e) If $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, and $\varphi_* \times \varphi_*$ denotes the map

$$(u,v) \in TM \times_M TM \longmapsto (\varphi_*(u), \varphi_*(v)) \in TM \times_M TM,$$

then $(\varphi_* \times \varphi_*, \varphi_*)$ is an automorphism of $\tau^*\tau$. We denote by $\varphi_\# \widetilde{X}$ the push-forward of a section $\widetilde{X} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$ by $\varphi_* \times \varphi_*$; then (confer 8.1/(e))

$$\varphi_\# \widetilde{X} = (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \widetilde{X} \circ \varphi_*^{-1}.$$

We have, in particular, *for any vector field X on M, $\varphi_\# \widehat{X} = \widehat{\varphi_\# X}$* (Lemma 2.3.2), *and $\varphi_\# \delta = \delta$.*

Lemma 2.3.3. *If $\varphi\colon M \longrightarrow M$ is a smooth map, then*

$$\varphi_{**} \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ (\varphi_* \times \varphi_*), \qquad (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ \varphi_{**}, \qquad \varphi_{**} \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ \varphi_{**}.$$

If φ is a diffeomorphism, then (Corollary 2.3.4)

$$(\varphi_*)_\# C = C, \qquad (\varphi_*)_\# X^{\mathsf{v}} = (\varphi_\# X)^{\mathsf{v}} \quad (X \in \mathfrak{X}(M));$$

furthermore (Corollary 2.3.5)

$$(\varphi_*)_\# \circ \mathbf{i} = \mathbf{i} \circ \varphi_\#, \qquad \varphi_\# \circ \mathbf{j} = \mathbf{j} \circ (\varphi_*)_\#, \qquad (\varphi_*)_\# \circ \mathbf{J} = \mathbf{J} \circ (\varphi_*)_\#.$$

8.3. Spray manifolds

In this chapter we define the second-order vector fields and their most important mutations. We collect some basic facts on semisprays, and we have a first look at their affinity and automorphism groups.

(a) A map $S\colon TM \longrightarrow TTM$, smooth on $\overset{\circ}{T}M$, is said to be a *semispray*, if $\tau_{TM} \circ S = 1_{TM}$, it sends zeros to zeros, and satisfies the condition $\mathbf{j}S = \delta$ (or, equivalently, $\mathbf{J}S = C$). A semispray is called a *second-order vector field*, if it is smooth on its whole domain. By a *spray* we mean a semispray of class C^1, which is positive-homogeneous of degree two in the sense that $[C, S] = S$. An *affine spray* is a spray of class C^2.

(b) If S is a semispray on TM, then

$$\mathbf{J}[\mathbf{J}\xi, S] = \mathbf{J}\xi \quad \text{for all } \xi \in \mathfrak{X}(TM) \qquad - \qquad \textit{Grifone's relation};$$
$$[X^{\mathsf{v}}, S] = X^{\mathsf{c}} + \eta,\ \eta \in \mathfrak{X}^{\mathsf{v}}(TM), \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M).$$

(c) A regular curve $\gamma\colon I \longrightarrow M$ is a *geodesic* of a semispray S if its velocity field is an integral curve of S, i.e., $S \circ \dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. A diffeomorphism $\varphi\colon M \longrightarrow M$ is an *affinity* (or *totally geodesic transformation*) of S if it preserves the geodesics considered as parametrized curves, i.e., if

$$\ddot{\overline{\varphi \circ \gamma}} = S \circ \dot{\overline{\varphi \circ \gamma}}, \qquad \text{for all geodesic } \gamma\colon I \longrightarrow M.$$

The affinities of a semispray S form a Lie group, denoted by $\mathrm{Aff}(S)$.

(d) If S is a semispray and $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then $(\varphi_*)_\# S$ is also a semispray, which remains a spray, if S is spray. φ is called an *automorphism of* S, if $(\varphi_*)_\# S = S$, i.e., $\varphi_{**} \circ S = S \circ \varphi_*$. $\mathrm{Aut}(S)$ denotes the group of automorphisms of S.

(e) We have the following simple results (3.2.2, 3.2.5): *if S is a semispray and $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$, then*

$$(\varphi_{**} \circ S - S \circ \varphi_*) \circ \dot{\gamma} = 0, \qquad \textit{for all geodesics } \gamma\colon I \longrightarrow M;$$
$$\mathrm{Aff}(S) = \mathrm{Aut}(S).$$

8.4. Ehresmann connections

This chapter is devoted to our investigations on Ehresmann connections. On the one hand, using new ideas and tools, we reproduce some important known results (4.1.3, 4.3.2-4.3.5). On the other hand, and this is the main result of the chapter, we characterize the automorphisms of an Ehresmann connection in terms of its affinities and strong torsion (4.5.7). After a careful discussion, we obtain a strengthening of the classical theorem: 'a diffeomorphism is an automorphism of a covariant derivative on a manifold, if and only if, it is an affinity and preserves the torsion'.

(a) Roughly speaking, an *Ehresmann connection* $\mathcal{H}$ over a manifold M is a left splitting of the canonical exact sequence in 8.2/(d), smooth only on $\mathring{T}M \times_M TM$, and given on $o(M) \times_M TM$ by $\mathcal{H}(o(p), v) := (o_*)_p(v)$; $p \in M$, $v \in T_pM$. We associate to any Ehresmann connection $\mathcal{H}$ the *horizontal projector* $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}$, the *vertical projector* $\mathbf{v} = 1_{TTM} - \mathbf{h}$, the *vertical map* $\mathcal{V} := \mathbf{i}^{-1} \circ \mathbf{v}$ and the *semispray* $S_{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \circ \delta$. The *horizontal lift* of a vector field $X \in \mathfrak{X}(M)$ with respect to $\mathcal{H}$ is $X^{\mathsf{h}} := \mathcal{H}(\widehat{X}) = \mathbf{h}X^{\mathsf{c}} \in \mathfrak{X}(\mathring{T}M)$.

(b) If S is a semispray over M, then there is a unique Ehresmann connection $\mathcal{H}_S$ such that

$$\mathcal{H}_S(\widehat{X}) = \frac{1}{2}(X^{\mathsf{c}} - [X^{\mathsf{v}}, S]) \qquad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M) \qquad (\textit{Crampin}),$$

with horizontal projector

$$\mathbf{h}_S = \frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)} - [S, \mathbf{J}]) \qquad (\textit{Grifone})$$

(Proposition 4.1.3).

(c) Let $\mathcal{H}$ be an Ehresmann connection over M. If

$$\nabla_\xi \widetilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathcal{H}\widetilde{Y}] + \mathcal{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\widetilde{Y}]; \qquad \xi \in \mathfrak{X}(TM),\ \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau),$$

then ∇ is a covariant derivative in $\mathring{\tau}^*\tau$, called the *Berwald derivative* induced by $\mathcal{H}$. The operators ∇^{h} and ∇^{v} defined by

$$\nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} \quad \text{and} \quad \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := \nabla_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\widetilde{Y} \qquad (\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$$

are called the *h-Berwald derivative* (belonging to $\mathcal{H}$) and the (*canonical*) *vertical derivative*, respectively. The latter does not depend on the choice of the Ehresmann connection. The *tension* $\mathbf{t}$, the *torsion* $\mathbf{T}$, and the *strong torsion* $\mathbf{T}^{\mathbf{s}}$ of $\mathcal{H}$ are defined, respectively, by $\mathbf{t} := \nabla^{\mathsf{h}}\delta$, $\mathbf{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla^{\mathsf{h}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}]$ $(\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \operatorname{Sec}(\mathring{\tau}^*\tau))$ and $\mathbf{T}^{\mathbf{s}} := \mathbf{t} + i_\delta\mathbf{T}$. $\mathcal{H}$ is called *homogeneous* if its tension vanishes. *In the homogeneous case the associated semispray $S_{\mathcal{H}}$ is a spray. Conversely, if $S_{\mathcal{H}}$ is a spray, then* $\mathbf{t}(\delta) = 0$ (Lemma 4.2.3).

Proposition 4.3.2. $\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$, *where $\mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$ is the Ehresmann connection determined by $S_{\mathcal{H}}$ accoroding to (b).*

As a corollary, we obtain that *the following three conditions concerning an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ are equivalent: (i) the strong torsion of $\mathcal{H}$ vanishes. (ii) $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{S_{\mathcal{H}}}$. (iii)* $\mathbf{t} = 0$ *and* $\mathbf{T} = 0$ (4.3.3, 4.3.4). 4.3.2 also implies

Corollary 4.3.5 (*unicity theorem*). *An Ehresmann connection is uniquely determined by its strong torsion and associated semispray.*

(d) If $\mathcal{H}$ is an Ehresmann connection over M and $\varphi \in \operatorname{Diff}(M)$, then $\varphi^{\#}\mathcal{H} := \varphi_{**}^{-1} \circ \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$ is also an Ehresmann connection, the *pull back of $\mathcal{H}$ via φ*. If $\varphi^{\#}\mathcal{H} = \mathcal{H}$, and hence $\varphi_{**} \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ (\varphi_* \times \varphi_*)$, then φ is called an *automorphism of* $\mathcal{H}$. $\operatorname{Aut}(\mathcal{H})$ denotes the group of automorphisms of $\mathcal{H}$. *The following are equivalent:*

$$\begin{gathered}(i)\ \ \varphi \in \operatorname{Aut}(\mathcal{H}), \qquad (ii)\ \ (\varphi_* \times \varphi_*) \circ \mathcal{V} = \mathcal{V} \circ \varphi_{**}, \\ (iii)\ \ \varphi_{**} \circ \mathbf{h} = \mathbf{h} \circ \varphi_{**}, \quad (iv)\ \ \varphi_{**} \circ \mathbf{v} = \mathbf{v} \circ \varphi_{**}, \\ (v)\ \ (\varphi_*)_{\#}X^{\mathsf{h}} = (\varphi_{\#}X)^{\mathsf{h}}, \quad \text{for all } X \in \mathfrak{X}(M)\end{gathered}$$

(Proposition 4.5.2). *If one, and hence all of these conditions are satisfied, then* $\mathbf{t}$, $\mathbf{T}$ *and* $\mathbf{T}^{\mathbf{s}}$ *satisfy the relations*

$$\varphi_{\#} \circ \mathbf{t} = \mathbf{t} \circ \varphi_{\#}, \qquad \varphi_{\#} \circ \mathbf{T} = \mathbf{T} \circ (\varphi_{\#} \times \varphi_{\#}), \qquad \varphi_{\#} \circ \mathbf{T}^{\mathbf{s}} = \mathbf{T}^{\mathbf{s}} \circ \varphi_{\#}$$

(Proposition 4.5.3).

Propositions 4.5.4 and 4.5.5. *Let $\mathcal{H}$ be an Ehresmann connection over M, and let ∇ be the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$. Then*

$$\operatorname{Aut}(\mathcal{H}) \subset (\operatorname{Aut}(\nabla) \cap \operatorname{Aut}(S_{\mathcal{H}}))\,.$$

Conversely, if S is a semispray over M, then

$$\operatorname{Aut}(S) \subset \operatorname{Aut}(\mathcal{H}_S).$$

Theorem 4.5.6. *A diffeomorphism φ of M is an automorphism of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M, if and only if, $\varphi \in \operatorname{Aut}(S_{\mathcal{H}})$ and satisfies the* *relation* $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_\#$.

(e) A regular curve $\gamma: I \longrightarrow M$ is said to be a *geodesic of an Ehresmann connection* $\mathcal{H}$ if $\mathcal{V} \circ \ddot{\gamma} = 0$, or, equivalently, if $\mathbf{h} \circ \ddot{\gamma} = \ddot{\gamma}$. *The geodesics of* $\mathcal{H}$ *coincide with the geodesics of the associated semispray* $S_{\mathcal{H}}$ (Proposition 4.4.2). *If* $\mathcal{H}$ *is homogeneous, then* $\mathcal{H}$ *and the Berwald derivative induced by* $\mathcal{H}$ *have the same geodesics* (Lemma 4.4.4). *The latter property holds, if and only if,* $S_{\mathcal{H}}$ *is a spray* (Proposition 4.4.6).

(f) A map $\varphi \in \mathrm{Diff}(M)$ is said to be an *affinity* of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M, if it preserves the geodesics as parametrized curve (cf. 8.3/(c)). $\mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ denotes the group of affinities of $\mathcal{H}$. We define in the same way the affinity groups $\mathrm{Aff}(D)$ and $\mathrm{Aff}(\mathring{D})$ of a covariant derivative D in $\tau^*\tau$ and a covariant derivative $\mathring{D}$ on M, respectively. Our observations in (e) imply immediately the following corollaries:

$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}}) \qquad \text{(Corollary 4.4.3);}$$
$$\mathrm{Aff}(\mathcal{H}) = \mathrm{Aff}(\nabla), \quad \textit{if } \mathcal{H} \textit{ is homogeneous} \qquad \text{(Corollary 4.4.5).}$$

Since $\mathrm{Aut}(S_{\mathcal{H}}) = \mathrm{Aff}(S_{\mathcal{H}})$ by 3.2.5, Theorem 4.5.6 leads to the important

Corollary 4.5.7. $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H})$ *if and only if* $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathcal{H})$ *and* $\varphi_\# \circ \mathbf{T}^{\mathsf{s}} = \mathbf{T}^{\mathsf{s}} \circ \varphi_\#$.

Finally, we consider a covariant derivative $\mathring{D}$ on the manifold M, and give a new characterization of $\mathring{D}$-automorphisms.

Theorem 4.5.8. $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathring{D})$ *if and only if* $\varphi \in \mathrm{Aff}(\mathring{D})$ *and* $\varphi_\# \circ i_\delta \mathbf{T} = i_\delta \mathbf{T} \circ \varphi_\#$, *where* $\mathbf{T}(\widehat{X}, \widehat{Y}) = \mathbf{i}^{-1}(T(\mathring{D})(X,Y))^{\mathsf{v}}$ *(*$T(\mathring{D})$ *is the torsion of* $\mathring{D}$*;* $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$*).*

8.5. D-manifolds with line-elements

In this chapter we consider covariant derivatives in the pull-back bundle $\tau^*\tau$*. We define various regularity concepts and characterize them. We show that any regular covariant derivative in* $\tau^*\tau$ *gives rise to canonically an Ehresmann connection. These constructions lead naturally to a new interpretation of the tension. The main results of the chapter (5.4.7, 5.4.9, 5.4.11) generalize our previous results (4.5.6, 4.5.8) to this context.*

(a) By a *D-manifold with line-elements* we mean a pair (M, D) consisting of a manifold M and a covariant derivative D in $\tau^*\tau$. The *v-covariant derivative* D^{v} belonging to D is given by $D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = D_{\mathbf{i}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ $(\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$. The *torsion* $T(D)$ of D is defined by

$$T(D)(\xi, \eta) := D_\xi \mathbf{j}\eta - D_\eta \mathbf{j}\xi - \mathbf{j}[\xi, \eta]; \qquad \xi, \eta \in \mathfrak{X}(TM).$$

The difference tensor $\mathcal{S}$ given by

$$\mathcal{S}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := \nabla^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X} - D^{\mathsf{v}}_{\widetilde{Y}}\widetilde{X}; \qquad \widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$$

is mentioned as the *Finsler torsion* of D. In the presence of an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ we define the ($\mathcal{H}$-) *horizontal torsion* $\mathcal{T}$, the ($\mathcal{H}$-) *vertical torsion* $T^{\mathsf{v}}(D)$, and the *horizontal difference tensor* $\mathcal{P}$ as follows: for each $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$; $\xi,\eta \in \mathfrak{X}(TM)$,

$$\mathcal{T}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - D_{\mathcal{H}\widetilde{Y}}\widetilde{X} - \mathbf{j}[\mathcal{H}\widetilde{X},\mathcal{H}\widetilde{Y}],$$
$$T^{\mathsf{v}}(D)(\xi,\eta) := D_\xi\mathcal{V}\eta - D_\eta\mathcal{V}\xi - \mathcal{V}[\xi,\eta],$$
$$\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y} - \nabla_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}.$$

We note that $\mathcal{P}(\widetilde{X},\widetilde{Y}) = T^{\mathsf{v}}(D)(\mathcal{H}\widetilde{X},\mathbf{i}\widetilde{Y})$.

(b) Let D be a covariant derivative in $\tau^*\tau$. The $\binom{1}{1}$ tensors $\mu := D\delta$ and $\mu^{\mathsf{v}} := \mu\circ\mathbf{i}$ are said to be the *deflection* and the *v-deflection* of D, respectively. We say that D is *regular*, if μ^{v} is fibrewise injective; *strongly regular*, if $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)}$; *vertically natural*, if $D^{\mathsf{v}} = \nabla^{\mathsf{v}}$.

Lemma 5.1.4. $\mu^{\mathsf{v}} = 1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$.

Corollary 5.1.6. *D is vertically natural $\iff$ $\mathcal{S} = 0$; D is strongly regular $\iff$ $i_\delta\mathcal{S} = 0$; D is regular $\iff$ $1_{\mathrm{Sec}(\tau^*\tau)} - i_\delta\mathcal{S}$ is bijective. Vertical naturality implies strong regularity, strong regularity implies regularity.*

(c) Let a covariant derivative D in $\tau^*\tau$ and an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ over M be given. Define the *h-covariant derivative* D^{h} by $D^{\mathsf{h}}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} := D_{\mathcal{H}\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ for all $\widetilde{X},\widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau)$. Then $\mu^{\mathcal{H}} := D^{\mathsf{h}}\delta = \mu\circ\mathcal{H}$ is said to be the *$\mathcal{H}$-deflection of D*. D is *associated to* $\mathcal{H}$, if $\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{Im}(\mathcal{H})$; D is *strongly associated to* $\mathcal{H}$, if $\mu = \mathcal{V}$. We show:
– *the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$ is strongly associated to $\mathcal{H}$, if and only if, $\mathcal{H}$ is homogeneous* (5.1.8);
– *D is associated to $\mathcal{H}$, if and only if, D is regular and $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9/(1));
– *D is strongly associated to $\mathcal{H}$, if and only if, D is strongly regular and $\mu^{\mathcal{H}} = 0$* (5.1.9/(2)).

(d) Let D be a regular covariant derivative in $\tau^*\tau$. The results of Theorem 5.2.1 and Propositions 5.2.2, 5.2.7 may be summarized as follows.
There is a unique Ehresmann connection $\mathcal{H}_D$ such that the $\mathcal{H}_D$-deflection of D vanishes. On basic vector fields $\mathcal{H}_D$ acts by

$$\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

The horizontal projector associated to $\mathcal{H}_D$ is

$$\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i}(\mu^{\mathsf{v}})^{-1}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta;$$

and $\mathrm{Im}(\mathcal{H}_D) = \mathrm{Ker}(\mu)$. $\mathcal{H}_D$ *is generated by a semispray according to 8.4/(b), if and only if,* $\mathcal{T}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \mathcal{P}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) - \mathcal{P}(\widetilde{Y}, \widetilde{X}) \quad (\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \mathrm{Sec}(\tau^*\tau))$, *where* $\mathcal{T}$ *and* $\mathcal{P}$ *are the horizontal torsion and difference tensors with respect to* $\mathcal{H}_D$. *If, in particular, D is strongly regular, then* $\mathcal{H}_D(\widehat{X}) = X^{\mathsf{c}} - \mathbf{i}D_{X^{\mathsf{c}}}\delta$, $\mathbf{h}_D = 1_{\mathfrak{X}(TM)} - \mathbf{i} \circ \mu$. $\mathcal{H}_D$ is said to be the *Ehresmann connection induced by D.*

(e) Let an Ehresmann connection $\mathcal{H}$ be given, and let ∇ be the Berwald derivative induced by $\mathcal{H}$. Then we may consider the Ehresmann connection $\mathcal{H}_\nabla$ induced by ∇, and obtain the following

Interpretation of the tension (5.2.4): $\mathbf{it} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_\nabla$.

(f) Finally, we turn to the various characterizations of the automorphisms of a regular covariant derivative D in $\tau^*\tau$, and summarize the result of Theorems 5.4.7, 5.4.9, 5.4.11. We consider the induced Ehresmann connection $\mathcal{H}_D$, and form the torsions $\mathbf{T^s}$, $\mathcal{T}$, $T^{\mathsf{v}}(D)$ and the difference tensor $\mathcal{P}$ with respect to $\mathcal{H}_D$. *For a diffeomorphism φ of M the following are equivalent:*

(i) $\varphi \in \mathrm{Aut}(D)$.

(ii) $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{H}_D)$ *and φ satisfies the relations* $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.

(iii) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$ *and φ satisfies the relations* $\varphi_\# \circ \mathbf{T^s} = \mathbf{T^s} \circ \varphi_\#$, $\varphi_\# \circ \mathcal{S} = \mathcal{S} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$, $\varphi_\# \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \circ (\varphi_\# \times \varphi_\#)$.

(iv) $\varphi \in \mathrm{Aff}(D)$ *and φ satisfies the relations* $\varphi_\# \circ T(D) = T(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$, $\varphi_\# \circ T^{\mathsf{v}}(D) = T^{\mathsf{v}}(D) \circ ((\varphi_*)_\# \times (\varphi_*)_\#)$.

8.6. Appendix: a coordinate view

We deduce the rules of transformation under a change of the chart of the functions (semispray coefficients, Christoffel symbols) which describe locally, i.e., in a chart, our basic objects. We present a modern interpretation of the invariant differential introduced by Ottó Varga [42]. It turns out that this operator, as well as Hashiguchi's 'affine connection in a manifold with line elements' ([23]) are just different sides of the same coin, a covariant derivative operator in $\tau^*\tau$ in the sense of the Thesis.

Tudományos munkásság

Referált kiadványokban megjelent, illetve elfogadott dolgozatok

1. R. L. Lovas, J. Pék and J. Szilasi, Ehresmann connections, metrics and good metric derivatives, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **48** (2007), Finsler Geometry, Sapporo 2005 – In Memory of Makoto Matsumoto, 263–308.

2. J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of Ehresmann connections, *Acta Math. Hungar.*, 2008, DOI: 10.1007/s10474-008-9139-X (17 oldal)

Előkészítés alatt

J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of line-element D-manifolds

TDK-dolgozat

Pék Johanna, Differenciálgeometriai vizsgálatok az érintőnyaláb-projekció mentén. Tudományos diákköri dolgozat; Debrecen, 2004. (38 oldal)

Előadások

1. Differenciálgeometriai vizsgálatok az érintőnyaláb-projekció mentén. Országos Tudományos Diákköri Konferencia; Budapest, 2005. március 21.

2. Automorphisms of Ehresmann connections. XXIIIrd International Workshop on Differential Geometric Methods in Theoretical Mechanics; Balatonföldvár, 2008. augusztus 24-30.

3. Ehresmann-konnexiók automorfizmusai. Debrecen-Szeged geometriai találkozó, 2008. szeptember 5.

Irodalomjegyzék

[1] H. Akbar-Zadeh, Les espaces de Finsler et certains de leurs généralisations, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)*, **80** (1963), 1–79.

[2] H. Akbar-Zadeh, *Initiation to Global Finslerian Geometry*, Elsevier, Amsterdam, 2006.

[3] W. Ambrose, R. S. Palais and I. M. Singer, Sprays, *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, **32** (1960), 163–178.

[4] W. Ballmann, *Vector Bundles and Connections*, http://www.math.uni-bonn.de/people/hwbllmnn/archiv/concurvb.ps

[5] M. Berger, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[6] F. Brickell, On the differentiability of affine and projective transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 567–574.

[7] F. Brickell and R. S. Clark, *Differentiable Manifolds*, Van Nostrand Reinhold, London, 1970.

[8] E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et le théorie de le relativité généralisée, *Ann. École Norm. Sup.* **40** (1923), 325–412; **41** (1924), 1–25; **42** (1925), 17–88.

[9] E. Cartan, *Les espaces de Finsler*; Paris, Hermann, 1934.

[10] M. Crampin, On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold, *J. London Math. Soc., (2)* **3** (1971), 178–182.

[11] M.Crampin, On the differential geometry of the Euler – Lagrange equation and the inverse problem of Lagrangian dynamics, *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** (1981), 2567–2575.

[12] M. Crampin, Generalized Bianchi identities for horizontal distributions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **94** (1983), 125–132.

[13] M.Crampin, Connections of Berwald type, *Publ. Math. Debrecen* **57** (2000), 455–473.

[14] P. Dazord, *Propriétés globales des géodésiques des espaces de Finsler*, Thèse(575), Publ. Dép. Math. (Lyon, 1969).

[15] M. de León and P. R. Rodrigues, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[16] J.-G. Diaz, Etude des tenseurs de courbure en géométrie finslérienne, *Thése de 3éme cycle*, **118** (1972)

[17] P. Dombrowski, MR **37** # 3469

[18] C. Ehresmann, Les connexions inifinitésimales dans un espace fibré différentiable, *Coll. Top. (Espaces Fibrés)*, Bruxelles, 1950, 29–55, Masson, Paris, 1951.

[19] W. Goldmann and M. W. Hirsch, The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **286** (1984), 629–649.

[20] W. Greub, S. Halperin and J. R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol.I, Academic Press, New York, 1972.

[21] W. Greub, S. Halperin and J. R. Vanstone, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol.II, Academic Press, New York, 1973.

[22] J. Grifone, Structure presque tangente et connexions I, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **22** (1972), 287–334.

[23] M. Hashiguchi, On parallel displacements in Finsler spaces, *J. Math. Soc. Japan* **10** (4) (1958), 365–379.

[24] S. Lang, *Fundamentals of Differential Geometry*, Springer-Verlag, New York, 2001.

[25] O. Loos, Automorphism Groups of Second Order Differential Equations, *Mh. Math.*, **96** (1983), 195–207.

[26] R. L. Lovas, J. Pék and J. Szilasi, Ehresmann connections, metrics and good metric derivatives, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **48** (2007), Finsler Geometry, Sapporo 2005 – In Memory of Makoto Matsumoto, 263–308.

[27] M. Matsumoto, *The theory of Finsler connections*, Publ. of the Study Group of Geometry, **5**, Department of Math. Okayama Univ., 1970.

[28] M. Matsumoto, *Foundations of Finsler geometry and special Finsler spaces*, Kaiseisha Press, Saikawa, Otsu, 1986.

[29] A. Moór, Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **17** (1956), 85–120.

[30] P. T. Nagy, On the theory of Finsler connections and their equivalence, *Acta Sci. Math. Szeged*, **37** (1975), 331–338.

[31] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[32] J. Pék and J. Szilasi, Automorphisms of Ehresmann connections, *Acta Math. Hungar.*, 2008, DOI: 10.1007/s10474-008-9139-X (17 oldal)

[33] Gy. Soós, Über Gruppen von Automorphismen in affinzusammenhängenden Räumen von Linienelementen, *Publ. Math. Debrecen*, **4** (1956), 249–302.

[34] M. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol.II (2nd Edition), Publish or Perish, 1979.

[35] Z. I. Szabó, Über Zusammenhänge vom Finsler-Typ, *Publ. Math. Debrecen*, **27** (1980), 77–88.

[36] Szilasi József, *Bevezetés a differenciálgeometriába*, Kossuth Egyetemi Kiadó, Debrecen, 1998.

[37] J. Szilasi, *A Setting for Spray and Finsler Geometry.* In: P. L. Antonelli (ed.): Handbook of Finsler Geometry, Vol.2, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003., 1182–1426.

[38] J. Szilasi, Calculus along the tangent bundle projection and projective metrizability, *In: Differential Geometry and its Applications - Proceedings of the 10th International Conference on DGA2007*, World Scientific, Singapore, 2008., 527–546.

[39] J. Szilasi and Á. Győry, A generalization of a theorem of H. Weyl, *Rep. Math. Phys.*, **53** (2004), 261–273.

[40] L. Tamássy, Zur metrisierbarkeit der affinzusammenhängenden Räum, *Demonstratio Mathematica*, VI (1973), 851–859.

[41] J. R. Vanstone, A generalization of Finsler geometry, *Canad. J. Math.* **14** (1962), 87–112.

[42] O. Varga, Über affinzusammenhängende Mannigfaltigkeiten von Linienelementen insbesondere deren Äquivalenz, *Publ. Math. Debrecen*, **1** (1949), 7–17.

[43] J. Vilms, Totally geodesic maps, *J. Differential Geometry*, **4** (1970), 73–79.

[44] H. Weyl, Reine infinitesimalgeometrie, *Math. Z.*, **2** (1918), 384-411.

[45] H. Whitney, Differentiable manifolds, *Annals of Math.*, **27** (1936), 645–680.

[46] K. Yano and A. Ledger, Linear connections on tangent bundles, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 495–500.