DIFFERENCIÁLGEOMETRIAI VIZSGÁLATOK AZ ÉRINTŐNYALÁB-PROJEKCIÓ MENTÉN

- TENZIÓ, TORZIÓ, REGULÁRIS ÉS METRIKUS DERIVÁLTAK -

Tudományos diákköri dolgozat

Debrecen, 2004.

Készítette:
Pék Johanna
V. matematika – ábrázoló geometria
(DE-TTK)

Témavezető:
Dr. Szilasi József
egyetemi docens
(DE-TTK Geometria Tanszék)

TARTALOM

BEVEZETÉS

1. A dolgozat olyan kérdéseket tárgyal, amelyek elsősorban MOÓR ARTHUR és J. R. VANSTONE ún. általánosított Finsler-metrikákkal foglalkozó, s ma már klasszikusnak számító [10], [11], [14] dolgozatainak tanulmányozása kapcsán vetődtek föl. Vizsgálataink azonban, némiképp váratlanul, néhány olyan általánosabb eredményhez, illetve ismert tételek új, egyszerűbb bizonyításához is elvezettek, amelyek túlmutatnak a forrásmunkák problémakörén.

2. Annak előzetes megvilágítására, hogy mi is értendő „általánosított Finsler-metrika" alatt, tekintsük egy M sima sokaság τ: $TM \to M$ érintőnyalábját. Ha g olyan leképezés, amely minden $v \in TM$ érintővektorhoz egy g_v: $T_{\tau(v)}M \times T_{\tau(v)}M \to \mathbb{R}$ nemelfajuló szimmetrikus bilineáris formát rendel, eleget téve egy természetes simasági feltételnek, akkor azt mondjuk, hogy g *általánosított Finsler-metrika* M-en. Tömören fogalmazva (ld. majd *2.4.* és *5.1.*): g pszeudoriemann-metrika az érintőnyaláb τ fölötti pullbackjén. Az általánosítás abban áll a Finsler-esethez képest, hogy g nem föltétlenül származik egy L: $TM \to \mathbb{R}$ Lagrange-függvény (az ún. alapfüggvény) négyzete felének Hesse-tenzoraként. (Egy Finsler-alapfüggvénynek természetesen további feltételnek is eleget kell tennie; ezek a pozitivitás, a pozitív homogenitás; TM fölött C^1-osztályú, a nemzérus érintővektorok nyílt részsokasága fölött C^∞-osztályú differenciálhatóság. Ha L TM fölött C^2-osztályú, akkor visszajutunk a Riemann-geometriához.) Az általánosítást az indokolta, hogy a metrikus tenzor Hesse-tenzorként való származtatása fontos fizikai alkalmazásokban teljesíthetetlen feltételként jelentkezett. Moór Arthur [10] dolgozatában célul tűzte ki az ilyen általánosított metrikus tenzorra alapozott geometriák elméletének szisztematikus kiépítését, s amennyire meg tudjuk ítélni, valóban jelentős lépéseket sikerült megtennie. Munkájának elolvasása, megértése, motivációinak felfogása és eredményeinek interpretálása azonban a mai olvasótól túlzás nélkül rendkívülinek mondható erőfeszítést igényel. Ennek oka elsősorban talán az, hogy kizárólag a klasszikus tenzorkalkulus nyelvezetét és technikáit alkalmazza, és az indexek dzsungeléből sokszor csak igen nehezen hámozható ki a geometriai tartalom. Vonatkozik ez a megállapítás Vanstone [14] dolgozatára is. Érdekes, hogy később, mint azt a W. Greubbal és S. Halperinnel közösen írt [4] monográfiájuk tanúsítja, Vanstone teljesen elhagyta a klasszikus tenzorkalkulus világát, s az említett munkájában megkezdett vizsgálatokhoz tudomásunk szerint sohasem tért vissza. Ugyanakkor, s ez aligha véletlen, az idézett monográfiában található egy olyan algebrai észrevétel (ld. majd **5.2.**-t), amely jelen kontextusban is igen hatásosnak bizonyult, és további alkalmazhatóságában is biztosak vagyunk. (Eredetileg a klasszikus Ricci-lemma bizonyítására lett felhasználva.)

3. Az általánosított Finsler-metrikán alapuló geometria kiépítése során mind Moór Arthur [10], mind pedig Vanstone szorosan ehhez kapcsolódó [14] dolgozatában az első lépést egy alkalmas kovariáns deriválás bevezetése jelenti. Az „alkalmas" jelző itt leginkább arra utal, hogy a deriválás *metrikus*, azaz hogy a metrikus tenzor kovariáns differenciálja eltűnik. Manapság ezt a lépést már csupár technikainak érezzük, bár egyik szerző eljárásáról sem mondhatjuk el, hogy kézenfekvő és könnyen áttekinthető. Moór Arthur és Vanstone dolgozatainak megjelenése óta, koncentráltan az 1980-as években, számos olyan publikáció született, főleg a Finsler-geometria kontextusában, amelyekben bizonyos feltételeknek eleget tevő összes metrikus kovariáns deriválás került leírásra, szintén elsősorban a klasszikus tenzorkalkulus eszközeivel. Ebben a témában elsősorban a Finsler-geometria román művelői mutattak komoly aktivitást, élükön RADU MIRON akadémikussal. Kiderült azonban, s ez már a fentebb említett Greub-Halperin-Vanstone monográfiában is megtalálható, de sokak figyelmét elkerülhette, hogy az összes metrikus kovariáns deriválás leírásának sémája, akár pszeudoriemann-vektornyalábok általánosságában is, valójában rendkívül egyszerű. Dolgozatunkban a Greub-Halperin-Vanstone-féle konstrukciót kombináltuk a román geométerek kedvelt eljárásával, az ún. *Obata-operátor* alkalmazásával. Az ő megközelítésükben (ld. pl. [8]), a g_{ij} ($1\leq i,j\leq n:=\dim M$) komponensfüggvényekkel rendelkező g általánosított Finsler-metrika Obata-operátora az

$$\Omega^{ir}_{sj}=\frac{1}{2}(\delta^i_s\delta^r_j-g_{sj}g^{ir})$$

komponensekkel megadott tenzormező ($(g^{ij}):=(g_{ij})^{-1}$, δ^i_j a Kronecker-szimbólum). Észrevettük, hogy ez működtethető pszeudoriemann-vektornyalábok általánosságában, és hogy nem más, mint *a ferdeszimmetrizálás operátora egy alkalmas moduluson*. Ez vezetett a dolgozat **2.9.** tételéhez.

4. A Finsler-geometriának a fibrált nyalábok elméletét felhasználó, modern megalapozása az 1960-as években indult meg, s a leglényegesebb dolgok tisztázása mintegy egy évtized alatt megtörtént. A modern megközelítésben kulcsfontosságú szerep jut az ún. *nemlineáris konnexiók*nak vagy *horizontális struktúrák*nak. Egy horizontális struktúra megadása TTM vertikális résznyalábja egy direkt komplementerének kijelölését jelenti. Ez technikailag sokféleképpen lehetséges. Dolgozatunkban ún. *horizontális leképezés*ek alkalmazását láttuk célszerűnek (**3.7.**), egyes esetekben azonban igen hasznosnak bizonyult a **3.9.** lemma, amelynek segítségével egy horizontális struktúra megadása alkalmas feltételeknek eleget tevő ún. *horizontális lifelés* révén valósítható meg. Egy $L\colon TM\to\mathbb{R}$ Finsler-alapfüggvény birtokában horizontális struktúra kanonikus módon (és igen elegánsan) származtatható. Képezve az $E:=\frac{1}{2}L^2$ ún. energiafüggvényt, létezik egy és csak egy olyan $\xi\colon TM\to TTM$ másodfokú homogén másodrendű vektormező, ún. spray, hogy $i_\xi dd_J E=-dE$ (ld. pl. [13], 1386. old.). ξ-ből, mint minden másodrendű vektormezőből (ld. **3.13.**-at s az azt követő megjegyzést), kanonikus módon horizontális struktúra konstruálható.

5. Az általánosított Finsler-metrikák elméletében az egyik fő nehézséget az okozza, hogy nem áll rendelkezésre a metrikus tenzorból kanonikusan leszármaztatható horizontális struktúra. Ahhoz, hogy ilyen struktúra létezését biztosíthassuk, a metrikára további feltételt/feltételeket kell előírni (a [9] dolgozat számos ilyen feltételt tárgyal), s egyenlőre nem világos, hogy melyik út a legcélravezetőbb. Egy lehetséges, és meglehetősen kézenfekvő eljárást Moór Arthur és Vanstone dolgozata is jelez. Ez a mi nyelvünkön a következőképpen fogalmazható meg. Tekintsük a

$$\delta\colon v\in TM\mapsto \delta(v):=(v,v)\in TM\times_M TM$$

ún. kanonikus vektormezőt, s legyen $L:=\sqrt{g(\delta,\delta)}$. Ha ez a Finsler-alapfüggvény, akkor nevezzük g-t *Moór-Vanstone-reguláris*nak. Ebben az esetben L-ből – s így közvetve g-ből – kanonikus módon egy $\mathcal{H}_L\colon TM\times_M TM\to TTM$ horizontális leképezés, s ezáltal horizontális struktúra származtatható. – Megjegyezzük, hogy Moór Arthurnál és Vanstone-nál horizontális struktúrák explicite egyáltalán nem szerepelnek, csupán közvetve, s nagyon rejtett módon jutnak szóhoz.

6. A Greub-Halperin-Vanstone–monográfia fentebb már idézett algebrai lemmájának alkalmazásával dolgozatunkban megmutatjuk, hogy *ha g általánosított Finsler-metrika az M sokaságon, s adva van egy tetszőleges $\mathcal{H}$: $TM \times_M TM \to TTM$ horizontális leképezés, akkor létezik egy és csak egy olyan metrikus kovariáns deriválás, amelynek ún. h-horizontális és v-vertikális torziója egy-egy előre megadott (ferdeszimmetrikus) tenzormező (***5.3.** tétel). Ez az eredmény a Riemann-geometriából jól ismert Ricci-lemma általánosítása. Ha speciálisan Finsler-sokaságról van szó és az adott horizontális struktúra a **4.**-ben körvonalazott kanonikus horizontális struktúra, akkor a szóban forgó kovariáns deriválás a nevezetes Cartan-féle deriválásra redukálódik.

Tételünk természetesen akkor is működik, ha g Moór-Vanstone-reguláris metrika és a horizontális struktúrát az **5.**-ben leírt $\mathcal{H}_L$ horizontális leképezés szolgáltatja. Kiderül azonban, hogy ebben az esetben a kapott kovariáns deriválás nem rendelkezik egy fontos tulajdonsággal, a *csatoltság* (ld. **4.4.**) tulajdonságaival. Magától adódik a feladat: keressünk olyan $\mathcal{H}$ – $\mathcal{H}_L$-től szükségképpen különböző – horizontális leképezést, amely szintén g-ből származtatható, s amellyel már a csatoltság feltétele is teljesül. Ez a probléma meglehetősen nehéznek bizonyult, ráirányította azonban a figyelmünket két horizontális leképezés különbségtenzorának vizsgálatára.

7. Könnyen ellenőrizhető, hogy tetszőleges $\mathcal{H}: TM \times_M TM \to TTM$ horizontális leképezés esetén $\xi := \mathcal{H} \circ \delta: TM \to TTM$ másodrendű vektormező, s így – mint már említettük – egy $\mathcal{H}_\xi$ horizontális leképezést származtat. Megmutattuk, hogy *$\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}_\xi$ különbségtenzora – eltekintve egy természetes, injektív nyalábleképezéstől – a horizontális leképezés ún. erős torziójának $\frac{1}{2}$–szerese* (**3.17.** tétel). E tétel alapján egyszerű következményként adódott két ismert, de fontos eredmény:

(a) *egy horizontális leképezés erős torziója akkor és csak akkor tűnik el, ha eltűnik két további adata, az ún. torzió és a tenzió* (**3.19.**);

(b) *egy horizontális leképezést egyértelműen meghatároz a belőle származó másodrendű vektormező és az erős torzió* (**3.20.**).

8. Az eddig elmondottakból kiderül, hogy vizsgálataink fő színtere a $\tau: TM \to M$ érintőnyalábnak a saját projekciója általi pull-backje, a

$$\tau^*\tau: TM \times_M TM \to TM$$

TM bázissokaságú vektornyaláb (ld. **1.14.**). E nyaláb szeléseinek modulusát $\mathfrak{X}(\tau)$-val jelöljük (**1.15.**), míg – a szokásos módon – $\mathfrak{X}(TM)$ TM vektormezőinek modulusát jelenti. Jól ismert, hogy minden $\mathcal{H}: TM \times_M TM \to TTM$ horizontális leképezés kanonikus módon indukál egy

$$\nabla: \mathfrak{X}(TM) \times \mathfrak{X}(\tau) \to \mathfrak{X}(\tau), \qquad (\xi, \tilde{Y}) \mapsto (\nabla_\xi \tilde{Y})$$

kovariáns deriválást, az ún. *Berwald-deriválás*t, ennek egy egyszerű konstrukcióját **3.14.**-ben adjuk meg. Magának a horizontális leképezésnek az alapvető geometriai invariánsait – a már említett erős torziót, torziót és tenziót, továbbá a görbületet - ténylegesen az általa indukált Berwald-deriválás segítségével vezetjük be (**3.15.**). Megmutatjuk (**3.21.** tétel), hogy *a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválás maga is származtat egy $\mathcal{H}_\nabla$ horizontális leképezést, s hogy $\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}_\nabla$ különbségtenzora (egy természetes, injektív nyalábleképezéstől eltekintve) az alapulvett $\mathcal{H}$ horizontális leképezés tenziója.*

Az erős torzióval és tenzióval kapcsolatban nyert tételeink (**3.19.** és **3.21.**) megvilágítják tehát ezek geometriai jelentését, és – ha úgy tetszik – egy érzékletes, alternatív definiálási lehetőséget is kínálnak.

9. Egy D: $\mathfrak{X}(\tau)\times\mathfrak{X}(TM)\to\mathfrak{X}(TM)$ kovariáns deriválás birtokában horizontális struktúra D-re előírt alkalmas, ún. *regularitási feltételek* segítségével is konstruálható. Egy ilyen regularitási feltétel Moór Arthur és Vanstone dolgozatából is kihámozható, bár náluk (legalábbis explicite) nem horizontális struktúra bevezetésére szolgál. A Moór-Vanstone-féle megfogalmazás rekonstruálása céljából adjunk meg M-en egy $(U,(u^i)_{i=1}^n)$ térképet, s tekintsük a TM érintősokaságon általa indukált $(\tau^{-1}(U),(x^i,y^i)_{i=1}^n)$ térképet. D konnexióparamétereit vezessük be a

$$D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\widehat{\partial}}{\partial u^j}=\overline{L}_{ij}^k\frac{\widehat{\partial}}{\partial u^k}\text{, illetve}\qquad D_{\frac{\partial}{\partial y^i}}\frac{\widehat{\partial}}{\partial u^j}=\frac{1}{L}\overline{M}_{ij}^k\frac{\widehat{\partial}}{\partial u^k}\qquad(1\le i,j\le n)$$

előírással, ahol $L:=\sqrt{g(\delta,\delta)}$, g (Moór-Vanstone-reguláris) általánosított Finsler-metrika, $\frac{\widehat{\partial}}{\partial u^i}(v)=\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_{\tau(v)}$ ($v\in\tau^{-1}(U)$, $1\le i\le n$) . D-re vonatkozóan mármost Moór Arthur, és őt követve Vanstone, az

$$\overline{M}_{i0}^k=\overline{M}_{k0}^l=0\qquad(1\le i,l\le n)$$

előírást szabja ki ([14], **1.10.**), ahol $\overline{M}_{i0}^k:=\frac{y^j}{F}M_{ij}^k$, és alkalmazzuk az összegzési megállapodást. Dolgozatunkban e követelmények koordinátamentes megfogalmazását adtuk az ún. v-deflexió segítségével (**4.6.**(3)), és – szintén ezen a nyelven – további regularitási feltételeket (regularitás, erős regularitás, vertikális természetesség) is bevezettünk (**4.6.**(1),(2),(4)). Megmutattuk (**4.8.** tétel), hogy ezek *a regularitási feltételek karakterizálhatók a kovariáns deriválás ún. Finsler-torziója segítségével, explicite meghatároztuk* továbbá *az egyes esetekben leszármaztatható horizontális leképezést* (**4.11.** tétel). Igazoltunk mindezzel kapcsolatban egy fontos unicitás-eredményt: *reguláris kovariáns deriválás esetén egyetlen olyan horizontális leképezés létezik, amelyre teljesül, hogy az ún. h-deflexió eltűnik* (**4.13.** állítás).

10. A dolgozat záró fejezetében az ún. *struktúra-egyenletek*et vezetjük le egy (technikai okokból pozitív definitnek tételezett) általánosított Finsler-metrikával és egy horizontális struktúrával ellátott sokaságon. A struktúra-egyenleteket a Riemann-geometriában elsőként ÉLIE CARTAN alkalmazta, mégpedig igen hatásosan. Cartan formalizmusának pontos dekódolása és matematikailag precíz interpretálása azonban igen sok fejfájást okozott az egymást követő generációknak. A Finsler-geometria általunk is használt pull-back formalizmusában külön nehézséget jelent az a körülmény, hogy a τ: TM→M projekció menti formák Grassmann-algebrájában nem áll rendelkezésre a szokásos külső differenciálás. Az ennek pótlására szolgáló ún. vertikális és horizontális külső derivált csak az 1990-es években került bevezetésre ([7],[13]), s tudomásunk szerint dolgozatunkban kerül sor először, az említett eszközök segítségével, a struktúra-egyenletek korrekt formájának felírására (**6.2.** tétel).

Struktúra-egyenleteinkből, s a már említett általánosított Ricci-lemmából (**5.3.**) további tanulság is leszűrhető. Kiderül, hogy a Finsler-geometriába M. MATSUMOTO által bevezetett öt (igaz, csak parciális) torzió közül csupán kettő, a v-vertikális és a h-horizontális játszik szerepet bennük, s így egy kovariáns deriválás torziónak mondott öt adata közül csak ezek bírnak valóban torzió-jelentéssel.

11. Megemlítjük végül, hogy a dolgozatban közölt bizonyítások mindegyike önálló munka eredménye, ami azonban nem jelenti egyben azt is, hogy – megfordítva – a bizonyított állítások mindegyike saját eredmény. A tudomásunk szerint új (vagy részben új) eredmények legtöbbjét a fenti áttekintés tartalmazza. Az ismert tételek új bizonyításai közül (a már említett **3.19.** és **3.20.** mellett) szeretnénk még kiemelni a kulcsfontosságú **3.13.** lemmára adott bizonyítást; ld. az azt követő megjegyzést is.

1. ALAPVETŐ MEGÁLLAPODÁSOK ÉS JELÖLÉSEK

1.1. *Sokaság*on mindvégig véges- (de nem nulla-) dimenziós, megszámlálható bázisú, sima Hausdorff-sokaságot fogunk érteni; M-mel egy tetszőlegesen rögzített, n-dimenziós sokaságot jelölünk. $C^\infty(M)$, $C^\infty(N)$, … az M, N, … sokaságokon értelmezett valósértékű, sima függvények gyűrűje.

1.2. Legyen E (n+k)-dimenziós sokaság ($k\geq 1$). Egy π: E$\to$M szürjektív sima leképezést az M sokaság fölötti, k-rangú **vektornyaláb**nak nevezünk, ha tetszőleges $p\in M$ pont esetén az $E_p:=\pi^{-1}(p)$ őskép, az ún. p fölötti *fibrum* k-dimenziós, valós vektortér, teljesül továbbá, hogy létezik p-nek U nyílt környezete, s megadható φ: $\pi^{-1}(U)\to U\times\mathbb{R}^k$ diffeomorfizmus úgy, hogy

$$\forall q\in U:\quad \varphi/E_q:\quad E_q\to\{q\}\times\mathbb{R}^k\cong\mathbb{R}^k \quad \textit{lineáris izomorfizmus.}$$

E-t a vektornyaláb *totálteré*nek, M-et a *bázissokaságá*nak, a π leképezést pedig a *projekció*jának hívjuk.

1.3. Attól függően, hogy egy π: E$\to$M vektornyaláb melyik összetevőjét kívánjuk hangsúlyozni, más és más szóhasználattal élünk. Így „π: E$\to$M vektornyaláb” mellett beszélünk „E$\to$M vektornyaláb”-ról, „M fölötti E vektornyaláb”-ról és – a legkevésbé pontosan – „E vektornyaláb”-ról egyaránt. Mivel egy vektornyalábot a projekciója teljesen meghatároz, további kényelmes – és ráadásul pontos! – szóhasználat egyszerűen „π vektornyaláb”-ot említeni; ez utóbbi kifejezésmóddal igyekszünk majd minél gyakrabban élni.

1.4. A π: E$\to$M vektornyaláb egy *szelés*én (vagy *metszet*én) olyan σ: M$\to$E sima leképezést értünk, amely eleget tesz a $\pi\circ\sigma=1_M$ feltételnek, s ezért tetszőleges $p\in M$ esetén $\sigma(p)\in E_p$. Két szelés *összeg*e s egy szelés $C^\infty(M)$-beli elemmel képzett *függvényszeres*e kézenfekvő módon értelmezhető a „pontonkénti elv” alapján; ezáltal a szelések halmaza a $C^\infty(M)$ gyűrű fölötti modulussá válik, amelyre a $\Gamma(\pi)$ jelölést használjuk. E modulus endomorfizmusainak gyűrűjét a szokásos módon End($\Gamma(\pi)$)-vel jelöljük.

1.5. Legyen adva egy π: E$\to$M és egy π': E'$\to$M' vektornyaláb. Egy F: E$\to$E' leképezést *fibrum-megőrző*nek mondunk, ha

$$\pi(z_1)=\pi(z_2) \quad\Rightarrow\quad \pi'(F(z_1))=\pi'(F(z_2)) \qquad (z_1,z_2\in E)\ .$$

Minden F: E$\to$E' fibrum-megőrző leképezés indukál egy és csak egy f: M$\to$M' leképezést oly módon, hogy $\pi'\circ F=f\circ\pi$. Megmutatható, hogy ha F sima, akkor az indukált f leképezés is sima. A π és π' vektornyaláb közötti **nyalábleképezés**en olyan F: E$\to$E' sima fibrum-megőrző leképezést értünk, amelyre teljesül, hogy

$$\forall p\in M:\quad F/E_p:\ E_p\to E'_{f(p)} \quad \textit{lineáris izomorfizmus.}$$

Amennyiben – speciálisan – M'=M és az indukált leképezés M identikus transzformációja, úgy *erős nyalábleképezés*ről szólunk.

1.6. Tekintsük a közös bázissokasággal rendelkező π: E$\to$M és π': E'$\to$M vektornyalábot. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy ha F: E$\to$E' erős nyalábleképezés, akkor az

$$\mathscr{F}:\Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi'),\ \sigma\mapsto\ \mathscr{F}(\sigma):=F\circ\sigma$$

leképezés $C^\infty(M)$-lineáris, azaz modulus-homomorfizmus. Megfordítva, meglehetősen fáradtságos munkával, s finomabb meggondolások eredményeként megmutatható (ld. pl. [6], 116-118. oldal), hogy *egy* $\mathscr{F}: \Gamma(\pi)\to\Gamma(\pi')$ *leképezés akkor és csak akkor* $C^\infty(M)$*-lineáris, ha van olyan* $F: E\to E'$ *erős nyalábleképezés, hogy* $\mathscr{F}(\sigma)=F\circ\sigma$ *teljesül, minden* $\sigma\in\Gamma(\pi)$ *szelés esetén.*

Erre tekintettel tárgyalásunk során egy erős nyalábleképezést s az általa a metszetek modulusai között indukált modulus-homomorfizmust ugyanazzal a szimbólummal fogunk jelölni.

1.7. Az M sokaság p pontbeli érintőtere az összes olyan $v: C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$-) lineáris függvény alkotta n-dimenziós valós vektortér, amely eleget tesz a

$$v(fg)=v(f)g(p)+f(p)v(g) \quad (f,g\in C^\infty(M))$$

Leibniz-szabálynak; erre a vektortérre a T_pM jelölést használjuk. Ha $TM:=\bigcup_{p\in M} T_pM$ (diszjunkt unió) és $\tau(v):=p$, ha $v\in T_pM$, akkor TM egyértelműen felruházható olyan sokaság-struktúrával, hogy $\tau: TM\to M$ M fölötti vektornyalábbá válik az érintőterekkel mint fibrumokkal, s teljesül, hogy az M sokaság tetszőleges $(U, (u^i)_{i=1}^n)$ térképe esetén a

$$v\in\tau^{-1}(U) \mapsto (\tau(v), v(u^1),\dots,v(u^n))\in U\times\mathbb{R}^n$$

leképezés diffeomorfizmus. A $\tau: TM\to M$ (röviden: τ) vektornyalábot az M sokaság *érintőnyaláb*jának nevezzük.

1.8. Az M sokaság érintőnyalábjának széleseit M *vektormezői*nek hívjuk, s ezek $C^\infty(M)$-modulusára a speciális $\mathfrak{X}(M):=\Gamma(\pi)$ jelölést használjuk. M vektormezői természetes módon interpretálhatók a $C^\infty(M)$ valós algebra derivációiként az

$$Xf(p):=X_pf \quad (X\in\mathfrak{X}(M),\ f\in C^\infty(M),\ p\in M)$$

előírás szerint. Az $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ *vektormezők Lie-zárójele* az az egyértelműen meghatározott $[X,Y]\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező, amelyre

$$\forall f\in C^\infty(M):\quad [X,Y]f = X(Yf)-Y(Xf)\ .$$

Ez a zárójel-művelet $\mathbb{R}$-bilineáris, ferdeszimmetrikus és eleget tesz az

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]] = 0 \quad (X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M))$$

Jacobi-azonosságnak. A $C^\infty(M)$-bilinearitás nem teljesül, érvényesek azonban a fontos

$$[fX,Y] = f[X,Y]-(Yf)X\ , \quad [X,fY] = f[X,Y]+(Xf)Y \quad (f\in C^\infty(M))$$

relációk.

1.9. Az $\mathfrak{X}(M)$ modulus duálisát $\mathscr{A}_1(M)$-mel jelöljük, az elemeit M-en adott *elsőfokú differenciálformák*nak, röviden *1-formák*nak nevezzük; $\mathscr{A}_1(M)$-et tehát az $\omega:\mathfrak{X}(M)\to C^\infty(M)$ $C^\infty(M)$-lineáris leképezések alkotják. Tetszőleges $f\in C^\infty(M)$ esetén a

$$df(X):=Xf \quad (X\in\mathfrak{X}(M))$$

előírás egy $df\in\mathscr{A}_1(M)$ 1-formát értelmez, amelyet az f függvény *differenciál*jának (vagy *külső differenciál*jának) mondunk.

1.10. Legyen $(r,s)\in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Az M sokaságon adott (r,s)-típusú – r-edrendben kontravariáns, s-edrendben kovariáns – *tenzormező*n

$$(\mathscr{A}_1(M))^r\times(\mathfrak{X}(M))^s \to C^\infty(M)$$

$C^\infty(M)$-multilineáris leképezést, az r=s=0 esetben $M\to\mathbb{R}$ sima függvényt értünk, az ezek alkotta $C^\infty(M)$-modulust $\mathscr{T}^r_s(M)$-mel jelöljük. Tenzormező helyett gyakran egyszerűen (bár kissé pontatlanul) csak (M-en adott) *tenzor*ról szólunk. Jegyezzük meg, hogy $\mathscr{T}^1_s(M)$ természetes módon azonosítható az $(\mathfrak{X}(M))^s \to \mathfrak{X}(M)$ $C^\infty(M)$-lineáris leképezések alkotta $L^s_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\mathfrak{X}(M))$ $C^\infty(M)$-modulussal:

$$\mathscr{T}^1_s(M) \cong L^s_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\mathfrak{X}(M)),$$

speciálisan

$$\mathscr{T}^1_1(M) \cong \mathrm{End}(\mathfrak{X}(M)).$$

Ezzel az interpretációs lehetőséggel a későbbiekben külön kommentár nélkül élünk. Szintén jól ismert, hogy egy sokaság tenzormezői a sokaság érintőnyalábjából konstruált alkalmas vektornyaláb szeléseiként is felfoghatók (és megfordítva); speciálisan értelmes módon szólhatunk egy tenzormező pontbeli értékéről. A tenzormezők szelésekként való interpretálását tárgyalásunk során viszonylag kevésszer fogjuk alkalmazni.

1.11. Legyen k pozitív egész szám, s jelölje S_k az $\{1,...,k\}$ halmaz összes permutációinak csoportját. Egy $\omega\in\mathscr{T}^0_k(M)$ kovariáns tenzormezőt M-en adott *k-adfokú differenciálformá*nak mondunk, ha

$$\forall\sigma\in S_k: \quad \omega(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(k)})=\varepsilon(\sigma)(X_1,...,X_k)$$

$(X_1,...,X_k\in\mathfrak{X}(M)$; $\varepsilon(\sigma)\omega$ σ paritása). Megállapodunk abban, hogy a nulladfokú differenciálformák $C^\infty(M)$ elemei; ezek után tetszőleges $k\in\{0,...,n\}$ esetén $\mathscr{A}_k(M)$-mel jelöljük M k-adfokú differenciálformáinak halmazát, amely kézenfekvő módon $C^\infty(M)$-modulussá tehető. Egy $\omega\in\mathscr{A}_k(M)$ és $\eta\in\mathscr{A}_l(M)$ differenciálforma $\omega\wedge\eta\in\mathscr{A}_{k+l}(M)$ *ékszorzat*át az

$$\omega\wedge\eta(X_1,...,X_{k+l}):=\frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)},...,X_{\sigma(k)})\eta(X_{\sigma(k+1)},...,X_{\sigma(k+l)})$$

$(X_i\in\mathfrak{X}(M),\ 1\le i\le k+l)$ előírással értelmezzük. Az

$$\mathscr{A}(M)=\bigoplus_{k=0}^{n}\mathscr{A}_k(M)$$

direkt összeg az ékszorzással valós algebrává válik, ez az M sokaság ún. *Grassmann-algebrá*ja.

1.12. Egy $\omega\in\mathscr{A}_k(M)$ $(k\ge1)$ differenciálforma *külső differenciál*ja a

$$d\omega(X_1,...,X_{k+1}):=$$

$$\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,...,\hat{X}_i,...,X_{k+1}))+\sum_{1\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,...,\hat{X}_i,...,\hat{X}_j,...,X_{k+1})$$

($X_i \in \mathfrak{X}(M)$, $1 \le i \le k+1$) képlettel értelmezett $d\omega \in \mathscr{A}_{k+1}(M)$ differenciálforma. Speciálisan a k=1 esetben a definiáló formula a

$$d\omega(X_1,X_2) = X_1\omega(X_2) - X_2\omega(X_1) - \omega([X_i,X_j])$$

összefüggésre redukálódik. Nulladfokú differenciálformák (azaz sima függvények) külső differenciálját az *1.9.*-ben mondottaknak megfelelően definiáljuk. *A külső differenciálás elsőfokú, gradált derivációja az* $\mathscr{A}(M)$ *Grassmann-algebrának*, vagyis olyan $C^\infty(M)$-multilineáris leképezés, amelyre teljesül, hogy

$$d(\omega\wedge\eta) = d\omega\wedge\eta + (-1)^k\omega\wedge d\eta\ , \qquad \text{ha } \omega\in\mathscr{A}_k(M)\ .$$

1.13. Tekintsünk egy $\pi\colon E\to M$ M fölötti vektornyalábot. M-en adott *π-értékű k-formá*n ($0 \le k \le n = \dim M$)

$$K\colon (\mathfrak{X}(M))^k \to \Gamma(\pi)$$

ferdeszimmetrikus $C^\infty(M)$-multilineáris leképezést értünk, ha $k \ge 1$, és π-nek egy szelését, ha k=0. Az összes M-en adott π-értékű k-formák természetes módon $C^\infty(M)$-modulust alkotnak, amelyre az $\mathscr{A}_k(M,\pi)$ jelölést használjuk. Eredményeink megfogalmazásához szükségünk lesz az M-en adott, End(π)-értékű 1-formák $\mathscr{A}_1(M,\mathrm{End}(\pi))$ $C^\infty(M)$-modulusára, ahol End(π) az az M bázissokasággal rendelkező vektornyaláb, amelynek egy $p\in M$ pont fölötti fibruma az $\mathrm{End}(E_p)$ vektortér. Egyszerűen adódik, hogy fennáll egy $\Gamma(\mathrm{End}(\pi)) \cong \mathrm{End}(\Gamma(\pi))$ természetes izomorfizmus, így érvényes az

$$\mathscr{A}_1(M,\mathrm{End}(\pi)) := L_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\Gamma(\mathrm{End}(\pi))) \cong L_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M),\mathrm{End}(\Gamma(\pi)))$$

modulus-izomorfizmus is.

1.14. Vizsgálataink fő színteréül a $\tau\colon TM\to M$ érintőnyaláb τ fölötti **pull-back**je szolgál; ez az a TM bázissokasággal rendelkező, n-rangú vektornyaláb, amelynek totáltere

$$\tau^*TM := TM\times_M TM := \{(v,w)\in TM\times TM \mid \tau(v)=\tau(w)\}\ ,$$

projekciója a $(v,w)\in TM\times TM \mapsto v\in TM$ természetes projekció τ^*TM-re való leszűkítése, s így tetszőleges $v\in TM$ fölötti fibruma a $\{v\}\times T_{\tau(v)}M$ vektortér, amely természetes módon azonosítható a $T_{\tau(v)}M$ érintőtérrel. Ezt a vektornyalábot a továbbiakban rendszerint $\tau^*\tau$ szimbólummal jelöljük.

1.15. Tekintsük a $\tau\colon TM\to M$ érintőnyalábot. *τ-menti vektormező*n olyan $\underline{X}\colon TM\to TM$ sima leképezést értünk, amely eleget tesz a $\tau\circ\underline{X}=\tau$ feltételnek (s így tetszőleges $v\in TM$ esetén $\underline{X}(v)\in T_{\tau(v)}M$). Jelölje – átmenetileg – $\Gamma_\tau(\tau)$ a τ-menti vektormezők modulusát! Közvetlenül ellenőrizhető, hogy az

$$\widetilde{X}\in\Gamma(\tau^*\tau) \mapsto \tau_2\circ\widetilde{X}\in\Gamma_\tau(\tau)$$

leképezés, ahol τ_2 a $(v,w)\in TM\times TM\mapsto v\in TM$ természetes projekció τ^*TM-re való leszűkítése, modulus-izomorfizmus; az inverze az

$$\underline{X}\in\Gamma_\tau(\tau) \mapsto \widetilde{X} := (1_{TM},\underline{X})\in\Gamma(\tau^*\tau)$$

leképezés. Az egymással kanonikusan izomorf $\Gamma(\tau^*\tau)$ és $\Gamma_\tau(\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulusra a továbbiakban a „semleges” $\mathfrak{X}(\tau)$ jelölést, elemeire a közös *„τ-menti vektormező”* elnevezést fogjuk használni. Tehát:

$$\mathfrak{X}(\tau) := \Gamma(\tau^*\tau) \cong \Gamma_\tau(\tau)\ .$$

1.16. Tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén az

$$\hat{X} : TM\to TM\times_M TM\ ,\ \ v\mapsto \hat{X}(v):=(v,X\circ\tau(v))$$

röviden $\hat{X}:=(1_{TM},X\circ\tau)$ leképezés szelése $\tau^*\tau$-nak, amely az előző pontban leírt izomorfizmus révén az $X\circ\tau$ τ-menti vektormezővel azonosítható. Az $\hat{X}$ τ-menti vektormezőt *az X vektormező $\mathfrak{X}(\tau)$–ba való liftje*ként említjük, vagy τ-menti *bázikus vektormező*nek mondjuk.

1.17. Az $\mathfrak{X}(\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulus duálisát $\mathscr{A}_1(\tau)$-val jelöljük, $\mathscr{A}_1(\tau)$ elemeit pedig *τ-menti 1-formák*nak mondjuk. Tetszőleges $\alpha\in\mathscr{A}_1(M)$ 1-forma esetén az

$$\hat{\alpha} : v\in TM\ \mapsto\ \hat{\alpha}(v):=(v,\alpha(\tau(v)))\in T_{\tau(v)}M\times T^*_{\tau(v)}M$$

leképezés (ahol $T^*_{\tau(v)}M$ a $T_{\tau(v)}M$ érintőtér duálisa) τ-menti 1-forma, amelyet az α 1-forma $\mathscr{A}_1(\tau)$-ba való liftjének, vagy *bázikus τ-menti 1-formá*nak hívunk.

1.18. Az $\mathfrak{X}(\tau)$ modulus, és duálisa, az $\mathscr{A}_1(\tau)$ modulus birtokában a szokásos módon értelmezhető a *τ-menti (r,s)-típusú tenzormezők* $\mathscr{T}^r_s(\tau)$, illetve a *τ-menti k-formák* ($0\le k\le n$) $\mathscr{A}_k(\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulusa, az előbbit az

$$(\mathscr{A}_1(\tau))^r\times(\mathfrak{X}(\tau))^s\to C^\infty(TM)$$

$C^\infty(TM)$-multilineáris, az utóbbit az $(\mathfrak{X}(\tau))^k\ \to\ C^\infty(TM)$ ferdeszimmetrikus $C^\infty(TM)$-multilineáris leképezések alkotják, megállapodva abban, hogy $\mathscr{T}^0_0(\tau)=\mathscr{A}_0(\tau):=C^\infty(TM)$.

1.19. Összefoglaljuk végül azt a jelölésbeli konvenciót, amelyet a vektormezőkkel és az 1-formákkal kapcsolatban következetesen alkalmazni fogunk tárgyalásunk során, s amely már tipográfiailag is jelezni fogja, hogy milyen típusú objektumról van szó.

$X, Y, \ldots$	vektormezők az M bázissokaságon;
$\xi, \zeta, \ldots$	vektormezők a TM érintősokaságon;
$\tilde{X}, \tilde{Y}, \ldots$	általános τ-menti vektormezők;
$\hat{X}, \hat{Y}, \ldots$	bázikus vektormezők τ mentén;
$\alpha, \beta, \ldots$	1-formák az M bázissokaságon;
$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \ldots$	általános τ-menti 1-formák;
$\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \ldots$	bázikus τ-menti 1-formák $(\alpha, \beta, \ldots\in\mathscr{A}_1(M))$.

2. A PSZEUDORIEMANN-VEKTORNYALÁBOK METRIKUS KOVARIÁNS DERIVÁLÁSAINAK LEÍRÁSA

2.1. Emlékeztetünk rá, hogy egy π: $E \to M$ vektornyalábon adott *kovariáns deriválás* olyan

$$D:\ \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi),\ \ (X,\sigma) \mapsto D_X\sigma$$

leképezés, amely az első változójában $C^\infty(M)$-lineáris (s így tenzoriális), a második változójában additív és eleget tesz a

$$D_X f\sigma = (Xf)\sigma + f\, D_X\sigma \qquad (f \in C^\infty(M))$$

Leibniz-szabálynak. Ekkor azt mondjuk, hogy $D_X\sigma$ a σ szelés X vektormező szerinti *kovariáns deriváltj*a, a

$$D\sigma:\ \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(\pi),\ X \mapsto\ D\sigma(X) := D_X\sigma$$

leképezést pedig a σ szelés *kovariáns differenciálj*ának hívjuk. A kovariáns derivált, illetve a kovariáns differenciál kiterjesztése tetszőleges π-tenzormezőre kézenfekvő. Ha például $g \in T_2^0(\Gamma(\pi))$, akkor tetszőleges $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\sigma_1,\sigma_2 \in \Gamma(\pi)$ esetén

(2.1.1) $\qquad D_X g(\sigma_1,\sigma_2) := Xg(\sigma_1,\sigma_2) - g(D_X\sigma_1,\sigma_2) - g(\sigma_1,D_X\sigma_2)$,

(2.1.2) $\qquad Dg(X,\sigma_1,\sigma_2) := D_X g(\sigma_1,\sigma_2)$.

Egy D kovariáns deriválás operátor birtokában mód van tetszőleges $K \in \mathcal{A}_k(M,\pi)$ M-en adott π-értékű k-forma $d^D K \in \mathcal{A}_{k+1}(M,\pi)$ *kovariáns külső differenciálj*ának értelmezésére. Számunkra a továbbiakban csak a $k=1$ eset lesz érdekes, ekkor $d^D K$ a

(2.1.3) $\qquad d^D K(X,Y) = D_X K(Y) - D_Y K(X) - K[X,Y] \qquad (X,Y \in \mathfrak{X}(M))$

formulával adható meg.

2.2. Ha D és $\tilde{D}$ egy-egy kovariáns deriválás a π: $E \to M$ vektornyalábon, akkor a

$$\psi:\ \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)\ ,\ \ (X,\sigma) \mapsto\ \psi(X,\sigma) := D_X\sigma - \tilde{D}_X\sigma$$

leképezés $C^\infty(M)$-bilineáris. Ezt a leképezést D és $\tilde{D}$ *különbségtenzor*ának hívjuk. Az

$$X \in \mathfrak{X}(M)\ \mapsto\ \psi_X \in \mathrm{End}(\Gamma(\pi))\ ,$$

$$\psi_X(\sigma) := D_X\sigma - \tilde{D}_X\sigma$$

interpretáció révén ψ M-en adott, $\mathrm{End}(\pi)$-értékű 1-formának tekinthető, s így $\psi \in \mathcal{A}_1(M,\mathrm{End}(\pi))$ írható.

2.3. Amennyiben adva van egy D: $\mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ kovariáns deriválás és egy $\psi \in \mathcal{A}_1(M,\mathrm{End}(\pi))$ 1-forma, úgy a

$$\tilde{D}_X\sigma := D_X\sigma + \psi_X(\sigma)\ ; \qquad X \in \mathfrak{X}(M),\ \sigma \in \Gamma(\pi)$$

formula kovariáns deriválást értelmez π-n, s **2.2.** alapján világos, hogy egy kovariáns deriválás megadása után minden kovariáns deriválás előállítható így.

2.4. A (π,g) párt *pszeudoriemann-vektornyaláb*nak nevezzük, ha $\pi\colon E\to M$ vektornyaláb, g pedig pszeudoriemann-metrika π-n, s így tetszőleges $p\in M$ pont esetén $g_p : E_p\times E_p \to \mathbb{R}$ nemelfajuló szimmetrikus bilineáris függvény az E_p fibrumon. Ha D kovariáns deriválás π-n és $Dg=0$, azaz (ld. (2.1.1) és (2.1.2))

$$\forall X\in \mathfrak{X}(M);\ \sigma_1,\sigma_2\in \Gamma(\pi):\quad Xg(\sigma_1,\sigma_2)=g(D_X\sigma_1,\sigma_2)+g(\sigma_1,D_X\sigma_2)$$

akkor azt mondjuk, hogy D – g-re nézve – *metrikus kovariáns deriválás*, röviden *metrikus deriválás*.

2.5. Legyen (π,g) pszeudoriemann-vektornyaláb, $\overset{\circ}{D}$ pedig egy kovariáns deriválás π-n. A

$$\mathscr{C}_\flat := \overset{\circ}{D} g\colon\ \mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\pi)\times\Gamma(\pi) \to C^\infty(M)\ ,\ \ (X,\sigma_1,\sigma_2) \mapsto \mathscr{C}_\flat(X,\sigma_1,\sigma_2) := \overset{\circ}{D}_X g(\sigma_1,\sigma_2)$$

leképezés mindhárom változójában $C^\infty(M)$-lineáris; $\mathscr{C}_\flat$ –t a g metrikus tenzor $\overset{\circ}{D}$-ra vonatkozó *Cartan-tenzor*ának nevezzük. A

$$g(\mathscr{C}(X,\sigma_1),\sigma_2) := \mathscr{C}_\flat(X,\sigma_1,\sigma_2)\ ;\qquad X\in \mathfrak{X}(M),\ \sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(\pi)$$

reláció g nemelfajultsága folytán egyértelműen meghatároz egy

$$\mathscr{C}\colon\ \mathfrak{X}(M)\times\Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

$C^\infty(M)$-bilineáris leképezést. Ezt szintén g *Cartan-tenzor*ának hívjuk ($\overset{\circ}{D}$-ra vonatkozóan); $\mathscr{C}$ és $\mathscr{C}_\flat$ információtartalma ugyanaz.

2.6. **Lemma.** Legyen (π,g) pszeudoriemann-vektornyaláb. Ha $\overset{\circ}{D}$ egy kovariáns deriválás π-n, $\mathscr{C}$ pedig g $\overset{\circ}{D}$-ra vonatkozó Cartan-tenzora, akkor a

$$D_X\sigma := \overset{\circ}{D}_X\sigma + \frac{1}{2}\mathscr{C}(X,\sigma)\ ;\qquad X\in \mathfrak{X}(M),\ \sigma\in\Gamma(\pi)$$

előírás metrikus kovariáns deriválást ad meg (π,g)-n.

2.7. **Lemma.** Ha D és $\tilde{D}$ metrikus kovariáns deriválás a (π,g) pszeudoriemann-vektornyalábon, s $\psi\in\mathscr{A}_1(M, \mathrm{End}(\pi))$ a különbségtenzoruk, akkor

$$\forall X\in \mathfrak{X}(M):\quad \psi_X\colon\ \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$$

ferdeszimmetrikus ($C^\infty(M)$-lineáris) endomorfizmus g-re nézve, azaz

$$\forall \sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(\pi):\ \ g(\psi_X(\sigma_1),\sigma_2)+g(\sigma_1,\psi_X(\sigma_2)) = 0\ .$$

Megfordítva, ha D metrikus kovariáns deriválás (π,g)-n és $\psi\in\mathscr{A}_1(M, \mathrm{End}(\pi))$ rendelkezik a mondott ferdeszimmetria-tulajdonsággal, akkor a

$$\tilde{D}_X\sigma := D_X\sigma+\psi_X(\sigma)\ ;\qquad X\in \mathfrak{X}(M),\ \sigma\in\Gamma(\pi)$$

előírás metrikus kovariáns deriválást ad meg (π,g)-n.

2.8. **Lemma és definíció.** Tekintsünk egy (π,g) pszeudoriemann-vektornyalábot, s legyen

$\mathscr{A}_1^{\mathrm{skew}}(M, \mathrm{End}(\pi)) := \{\psi\in\mathscr{A}_1(M, \mathrm{End}(\pi)) \mid \forall X\in \mathfrak{X}(M)\colon \psi_X$ ferdeszimmetrikus g-re nézve$\}$

Ekkor az $\mathscr{A}_1^{\text{skew}}$(M,End(π)) direkt összeadandóként föllépő részmodulusa az $\mathscr{A}_1$(M, End(π)) C^∞(M)-modulusnak. Az erre való projekció operátora az

$$\mathrm{Ob}\colon\ \Phi\in \mathscr{A}_1(M, \mathrm{End}(\pi)) \mapsto \mathrm{Ob}(\Phi):=\tilde{\Phi}\in\mathscr{A}_1(M, \mathrm{End}(\pi)),$$

$$\forall\ X\in \mathfrak{X}(M);\ \sigma_1,\sigma_2\in\Gamma(\pi)\colon\ g(\tilde{\Phi}_X(\sigma_1), \sigma_2)= \frac{1}{2}\,(g(\Phi_X(\sigma_1),\sigma_2)-g(\sigma_1,\Phi_X(\sigma_2))$$

transzformáció, amelyet a (π,g) (ferdeszimmetrizáló) *Obata-operátorá*nak nevezünk.

2.9. **Tétel.** *Egy (π,g) pszeudoriemann-vektornyaláb minden metrikus kovariáns deriválás előállítható a*

$$\boxed{D_X\sigma:=\overset{\circ}{D}_X\sigma+\frac{1}{2}\,\mathscr{C}(X,\sigma)+\mathrm{Ob}(\Phi)_X(\sigma)\ ;\qquad X\in\mathfrak{X}(M),\ \sigma\in\Gamma(\pi)}$$

képlettel, ahol $\overset{\circ}{D}$ *tetszőleges kovariáns deriválás π-n,* $\mathscr{C}$ *g* $\overset{\circ}{D}$*-re vonatkozó Cartan-tenzora, Φ∈* $\mathscr{A}_1$*(M, End(π))* .

Bizonyítás: A tétel közvetlenül adódik a *2.6.– 2.8.* lemmák alapján, amelyek egyszerű, közvetlen számolással igazolhatók. □

3. HORIZONTÁLIS LEKÉPEZÉSEK TENZIÓJA ÉS ERŐS TORZIÓJA

3.1. Tekintsük az M sokaság τ: TM→M érintőnyalábját, s ennek a saját projekciója fölötti $\tau^*\tau\colon TM\times_M TM\to TM$ pull-backjét. Képezzük a jól ismert

(3.1.1) $$0\longrightarrow TM\times_M TM \xrightarrow{\ \mathbf{i}\ } TTM \xrightarrow{\ \mathbf{j}\ } TM\times_M TM \longrightarrow 0$$

kanonikus rövid egzakt sorozatot, ahol

$$\mathbf{i}(v,w):=\dot{c}(0),\quad \text{ha } c\colon \mathbb{R}\to TM,\ t\mapsto c(t):=v+tw,$$

$$\mathbf{j}(w):=(v,\tau_*(w)),\ \text{ ha } w\in T_vTM\ .$$

A (3.1.1) egzakt sorozat az *1.6.*-ban mondottaknak megfelelően egzakt sorozatot származtat a szelések C^∞(TM)-modulusainak szintjén is, a

$$0\longrightarrow \mathfrak{X}(\tau)\xrightarrow{\ \tilde{\mathbf{i}}\ }\mathfrak{X}(TM)\xrightarrow{\ \tilde{\mathbf{j}}\ }\mathfrak{X}(\tau)\longrightarrow 0$$

egzakt sorozatot, ahol $\tilde{\mathbf{i}}$, illetve $\tilde{\mathbf{j}}$ az

$$\tilde{\mathbf{i}}(\tilde{X}):=\mathbf{i}\circ\tilde{X}\colon\ v\in TM\mapsto \mathbf{i}(\tilde{X}(v))\in TTM\qquad (\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau))\ ,$$

illetve a

$$\tilde{\mathbf{j}}(\xi):=\mathbf{j}\circ\xi\colon\ v\in TM\mapsto \mathbf{j}(\xi(v))\in TM\times_M TM\qquad (\xi\in\mathfrak{X}(TM))$$

előírással van értelmezve. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért $\tilde{\mathbf{i}}$ és $\tilde{\mathbf{j}}$ helyett is **i**-t, illetve **j**-t írunk.

(3.1.1) egzaktsága folytán **i** injektív, **j** szürjektív erős nyalábleképezés (illetve modulus-homomorfizmus a szelések szintjén), és

(3.1.2) $\quad \mathrm{Im}\,\mathbf{i}=\mathrm{Ker}\,\mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{j}\circ\mathbf{i}=0$.

$VTM:=\mathbf{i}(TM\times_M TM)\subset TTM$ $\;$ TTM *vertikális résznyaláb*ja,

$\mathfrak{X}^v(TM):=\mathbf{i}(\mathfrak{X}(\tau))\subset\mathfrak{X}(TM)$ $\;$ TM *vertikális vektormezőinek* részmodulusa.

(3.1.3) $\quad X^v:=\mathbf{i}\circ\hat{X}\ ,\quad X\in\mathfrak{X}(M)$

az X vektormező *vertikális lift*je.

3.2. Meggondolásainkban fontos szerepet fognak játszani a következő kanonikus objektumok:

(3.2.1) $\quad \delta\colon TM\to TM\times_M TM\ ,\ v\mapsto\delta(v):=(v,v)$ - $\tau^*\tau$ *kanonikus szelés*e vagy a *τ-menti kanonikus vektormező*;

(3.2.2) $C:=\mathbf{i}\circ\delta\in\mathfrak{X}^v(TM)$ – a *Liouville-vektormező*;

(3.2.3) $J:=\mathbf{i}\circ\mathbf{j}$ – a *vertikális endomorfizmus* .

A vertikális endomorfizmus TM-en értelmezett (1,1,)-tenzormezőként interpretálható. Közvetlenül adódik, hogy

(3.2.4) $\quad \mathrm{Im}J=\mathrm{Ker}J=\mathfrak{X}^v(TM)\ ,\quad J^2=0;$

(3.2.5) $\quad \forall X\in\mathfrak{X}(M)\colon\ JX^v=0$.

3.3. Egy $f\in C^\infty(M)$ függvény *vertikális lift*jén az $f^v:=f\circ\tau\in C^\infty(TM)$ függvényt értjük. Közvetlenül ellenőrizhető, hogy

$$\xi\in\mathfrak{X}(TM)\text{ vertikális vektormező}\quad\Leftrightarrow\quad\forall f\in C^\infty(M)\colon\ \xi f^v=0\ .$$

3.4. Egy $\xi\in\mathfrak{X}(TM)$ vektormezőt *másodrendű vektormező*nek nevezünk, ha eleget tesz a $\mathbf{j}\circ\xi=\delta$ ($\Leftrightarrow J\circ\xi=C$) feltételnek. Amennyiben ξ másodrendű vektormező, úgy tetszőleges $f\in C^\infty(M)$ függvény esetén *az* $f^c:=\xi f^v$ *függvény független* ξ *megválasztásá*nak módjától. Valóban, ha $\tilde{\xi}$ egy további másodrendű vektormező, akkor $\tilde{\xi}-\xi$ vertikális, hiszen $J(\tilde{\xi}-\xi)=J\tilde{\xi}-J\xi=C-C=0$, és (3.2.4) szerint $\mathrm{Ker}J=\mathfrak{X}^v(TM)$. Így *3.3.* alapján következik, hogy $(\tilde{\xi}-\xi)f^v=0$, és ennélfogva $\tilde{\xi}f^v=\xi f^v$. Az f^c függvényt az $f\in C^\infty(M)$ függvény *teljes lift*jének nevezzük. Megmutatható, hogy tetszőleges $v\in TM$ érintővektor esetén $f^c(v)=(df)_{\tau(v)}(v)$.

3.5. Minden $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezőhöz egyértelműen létezik olyan $X^c\in\mathfrak{X}(TM)$ vektormező, hogy

(3.5.1) $\quad \forall f\in C^\infty(M)\colon\quad X^cf^c=(Xf)^c$;

ezt a vektormezőt az X *vektormező teljes lift*jének nevezzük.

Érvényesek a következő relációk:

(3.5.2) $\quad \mathbf{j}X^c=\hat{X}\ ,\quad JX^c=X^v$;

(3.5.3) $(fX)^c = f^v X^c + f^c X^v \quad (f \in C^\infty(M),\ X \in \mathfrak{X}(M))$.

3.6. **Lemma.** *Ha $\xi \in \mathfrak{X}(TM)$ másodrendű vektormező, akkor tetszőleges $\eta \in \mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén*

$$J[J\eta, \xi] = J\eta .$$

Ez az egyszerű, de igen hasznos észrevétel J. GRIFONE-nak köszönhető [5].

3.7. Az M sokaság fölött adott **horizontális leképezés**en a (3.1.1) egzakt sor egy *jobboldali hasítás*át értjük, azaz olyan

$$\mathcal{H}: TM \times_M TM \to TTM$$

erős nyalábleképezést, amelyre teljesül, hogy

(3.7.1) $\mathbf{j} \circ \mathcal{H} = 1_{TM \times_M TM}$.

A $\mathcal{H}$ horizontális leképezéshez *csatolt vertikális leképezés* (3.1.1)-nek az a $\mathcal{V}: TTM \to TM \times_M TM$ *baloldali hasítás*a, vagyis az a

(3.7.2) $\mathcal{V} \circ \mathbf{i} = 1_{TM \times_M TM}$

feltételnek eleget tevő erős nyalábleképezés, amelyre

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{V} = \mathrm{Im}\,\mathcal{H} \quad (\Rightarrow \mathcal{V} \circ \mathcal{H} = 0)$$

teljesül. HTM:=Im$\mathcal{H}$ résznyalábja, egy ún. *horizontális résznyaláb*ja TTM-nek és fennáll, hogy

$$TTM = HTM \oplus VTM .$$

$\mathcal{H}$ és $\mathcal{V}$ a **3.1.**-ben látott módon jobb-, illetve baloldali hasítását származtatja a

$$0 \longrightarrow \mathfrak{X}(\tau) \xrightarrow{\ \mathbf{i}\ } \mathfrak{X}(TM) \xrightarrow{\ \mathbf{j}\ } \mathfrak{X}(\tau) \longrightarrow 0$$

egzakt sorozatnak is, amelyeket változatlanul $\mathcal{V}$–vel, illetve $\mathcal{H}$–val jelölünk.

$$\mathfrak{X}^h(TM) := \mathcal{H}(\mathfrak{X}(\tau))$$

részmodulusa $\mathfrak{X}(TM)$-nek, amelynek elemeit TM *horizontális vektormezői*nek mondjuk. Értelemszerűen teljesül, hogy

$$\mathfrak{X}(TM) = \mathfrak{X}^h(TM) \oplus \mathfrak{X}^v(TM) .$$

3.8. Legyen adva egy $\mathcal{H}: TM \times_M TM \to TTM$ horizontális leképezés, s tekintsük a hozzá csatolt $\mathcal{V}: TTM \to TM \times_M TM$ vertikális leképezést.

Ekkor

(3.8.1) $\mathbf{h} := \mathcal{H} \circ \mathbf{j}: TTM \to TTM$ a $\mathcal{H}$–hoz tartozó *horizontális projektor*;

(3.8.2) $\mathbf{v} := 1_{TTM} - \mathbf{h} = \mathbf{i} \circ \mathcal{V}$ a $\mathcal{H}$–hoz tartozó *vertikális projektor*;

(3.8.3) $\ell^h: X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \ell^h(X) := \mathcal{H} \circ \hat{X} = \mathbf{h} \circ X^c \in \mathfrak{X}(TM)$ a $\mathcal{H}$ által származtatott *horizontális liftelés*, X^h az X vektormező ($\mathcal{H}$ szerinti) horizontális liftje.

h-ra és **v**-re joggal használtunk projektor elnevezést, fennállnak ugyanis a következők:

(3.8.4) $\mathbf{h}^2=\mathbf{h}$, $\mathrm{Im}\mathbf{h}=HTM$, $\mathrm{Ker}\mathbf{h}=VTM$;

(3.8.5) $\mathbf{v}^2=\mathbf{v}$, $\mathrm{Im}\mathbf{v}=VTM$, $\mathrm{Ker}\mathbf{v}=HTM$.

3.9. Lemma. *Ha ℓ^h: $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(TM)$ a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés szerinti horizontális liftelés, akkor*

(i) $\forall X\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$: $\ell^h(fX)=f^v\ell^h(X)$;

(ii) $J\circ\ell^h=\ell^v$,

ahol $\ell^v(X):=X^v$, $X\in\mathfrak{X}(M)$. Megfordítva, ha adva van egy ℓ^h: $\mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(TM)$ leképezés, eleget téve az (i), (ii) feltételeknek, akkor az a $C^\infty(TM)$-lineáris kiterjesztéssel értelmezett $\mathscr{H}$: $\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(TM)$ leképezés, amelyre $\mathscr{H}(\hat{X}):=\ell^h(X)$ ($X\in\mathfrak{X}(M)$), horizontális leképezés.

Bizonyítás: Ha ℓ^h a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés szerinti horizontális liftelés, akkor tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező és $f\in C^\infty(M)$ függvény esetén $\ell^h(fX):=\mathscr{H}(\widehat{fX})=\mathscr{H}(f^v\hat{X})=f^v\mathscr{H}(\hat{X})=f^v\ell^h(X)$ és $J\circ\ell^h(X)=\mathbf{i}\circ\mathbf{j}\circ\mathscr{H}(\hat{X})\overset{(3.7.1)}{=}\mathbf{i}\circ\hat{X}\overset{(3.1.3)}{=}X^v=\ell^v(X)$, ℓ^h tehát rendelkezik az (i)-(ii) tulajdonságokkal.

A megfordítás igazolása hasonlóan egyszerű. □

3.10. Lemma és definíció. Legyenek $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ horizontális leképezések az M sokaság fölött, és tekintsük a hozzájuk csatolt $\mathscr{V}_1$, illetve $\mathscr{V}_2$ vertikális leképezést.

A $(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)$: $\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(TM)$ leképezés vertikális értékű, s így létezik egy és csak egy olyan P: $\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ (1,1)-tenzor, hogy

$$\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2=\mathbf{i}\circ P\ .$$

Ezt a P tenzort a $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ horizontális leképezések *különbségtenzor*ának hívjuk. Explicite, $P=\mathscr{V}_2\circ\mathscr{H}_1$, s ennélfogva

(3.10.1) $\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2=\mathbf{i}\circ\mathscr{V}_2\circ\mathscr{H}_1=\mathbf{v}_2\circ\mathscr{H}_1$.

A vertikális leképezések különbségtenzora a

(3.10.2) $\mathscr{V}_1-\mathscr{V}_2=-\mathscr{V}_2\circ\mathbf{h}_1$

alakban áll elő.

Bizonyítás: $J\circ(\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2)=\mathbf{i}\circ(\mathbf{j}\circ\mathscr{H}_1-\mathbf{j}\circ\mathscr{H}_1)=\mathbf{i}\circ(1_{TM\times_M TM}-1_{TM\times_M TM})=0$, ez $\mathrm{Ker}J\overset{(3.2.4)}{=}=\mathfrak{X}^v(TM)$ folytán azt jelenti, hogy $\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2$ valóban vertikális értékű, s így előállítható $\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2=\mathbf{i}\circ P$ ($P\in\mathscr{T}^1_1(\tau)$) alakban, ahol P egyértelműsége nyilvánvaló. Mivel

$\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2=\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2\circ(\mathbf{j}\circ\mathscr{H}_1)=\mathscr{H}_1-(\mathscr{H}_2\circ\mathbf{j})\circ\mathscr{H}_1=$

$(1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{h}_2)\circ\mathscr{H}_1=\mathbf{v}_2\circ\mathscr{H}_1=\mathbf{i}\circ\mathscr{V}_2\circ\mathscr{H}_1$,

a különbségtenzor explicit alakját (3.10.1) adja. (3.10.2) ekvivalens a

$$\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2=-\mathbf{v}_2\circ\mathbf{h}_1$$

relációval. Ez utóbbi igaz, ugyanis

$-\mathbf{v}_2\circ\mathbf{h}_1=(\mathbf{h}_2-1_{\mathfrak{X}(TM)})\circ\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_2\circ\mathbf{h}_1-\mathbf{h}_1=\mathscr{H}_2\circ\mathbf{j}\circ\mathscr{H}_1\circ\mathbf{j}-\mathbf{h}_1=\mathscr{H}_2\circ\mathbf{j}-\mathbf{h}_1=\mathbf{h}_2-\mathbf{h}_1=$

$=1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{v}_2-(1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{v}_1)=\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$. □

3.11. Definíció. A $J\in\mathscr{T}^1_1(TM)$ vertikális endomorfizmus egy $\eta\in\mathfrak{X}(TM)$ vektormezővel képzett *Frölicher-Nijenhuis-zárójel*én azt a $[J,\eta]\in\mathscr{T}^1_1(TM)$ (1,1)-tenzormezőt értjük, amelyre

$$\forall\xi\in\mathfrak{X}(TM):\ [J,\eta]\xi:=[J\xi,\eta]-J[\xi,\eta]\quad .$$

3.12. Lemma. *Tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén $[J,X^c]=0$.*

A bizonyítás egyszerű, s megtalálható például [13]-ban (p. 1283) .

3.13. Lemma. *Tegyük föl, hogy ξ: $TM\to TTM$ másodrendű vektormező. Az*

$$(3.13.1)\qquad \ell^h: X\in\mathfrak{X}(M)\mapsto \ell^h(X):=\frac{1}{2}(X^c+[X^v,\xi])$$

leképezés eleget tesz a 3.9./(i),(ii) feltételeknek, következésképpen egy $\mathscr{H}_\xi$ horizontális leképezést származtat, amelynél

$$(3.13.2)\qquad \mathscr{H}_\xi(\hat{X})=\frac{1}{2}(X^c+[X^v,\xi])\ ,\qquad X\in\mathfrak{X}(M)\ .$$

A $\mathscr{H}_\xi$-hez tartozó horizontális projektor megadható a

$$(3.13.3)\qquad \mathbf{h}_\xi=\frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)}+[J,\xi])$$

formulával.

Bizonyítás:

(1) Először a *3.9.*/(i),(ii) feltételek teljesülését ellenőrizzük. Legyen $f\in C^\infty(M)$, $X\in\mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor

$$J\circ\ell^h(X)=\frac{1}{2}JX^c+\frac{1}{2}J[X^v,\xi]\overset{(3.5.2)}{=}$$

$$\frac{1}{2}X^v+\frac{1}{2}J[JX^c,\xi]\overset{3.6.}{=}\frac{1}{2}X^v+\frac{1}{2}JX^c=\frac{1}{2}X^v+\frac{1}{2}JX^v=X^v=\ell^v(X)\text{ tehát }J\circ\ell^h=\ell^v\ .$$

$$\ell^h(fX):=\frac{1}{2}((fX)^c+[(fX)^v,\xi])\overset{(3.5.3)}{=}\frac{1}{2}(f^vX^c+f^cX^v+[f^vX^v,\xi])=$$

$$=\frac{1}{2}(f^vX^c+f^cX^v+f^v[X^v,\xi]-(\xi f^v)X^v)\overset{3.4.}{=}\frac{1}{2}f^v(X^c+[X^v,\xi])=f^v\ell^h(X)\ ,$$

így ℓ^h a megfelelő linearitási tulajdonsággal is rendelkezik.

(2) Megmutatjuk, hogy a $\mathscr{H}_\xi$-hez tartozó horizontális projektor előállítható a megadott alakban. $\mathbf{h}_\xi:=\mathscr{H}_\xi\circ\mathbf{j}$, így egyrészt

$$\forall X\in\mathfrak{X}(M):\ \mathbf{h}_\xi(X^c):=\mathscr{H}_\xi\circ\mathbf{j}(X^c)\overset{(3.5.2)}{=}\mathscr{H}_\xi(\hat{X})=\ell^h(X)=\frac{1}{2}(X^c+[X^v,\xi])\quad .$$

Másrészt

$$\frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)}+[J,\xi])(X^c)\overset{3.11.}{=}\frac{1}{2}(X^c+[JX^c,\xi]-J[X^c,\xi])=\frac{1}{2}(X^c+[X^v,\xi])-\frac{1}{2}J[X^c,\xi]) \ ;$$

belátjuk, hogy itt $\frac{1}{2}J[X^c,\xi]=0$. Mivel

$$0\overset{3.12.}{=}J[X^c,\xi]:=[J\xi,X^c]-J[\xi,X^c]=[C,X^c]+J[X^c,\xi] \ ,$$

feladatunk annak ellenőrzésére redukálódik, hogy $[C,X^c]=0$.

Ismeretes (ld. [13], p.1263), hogy TM vektormezőit egyértelműen meghatározza az $f\in C^\infty(M)$ függvények teljes liftjein való hatásuk. – Legyen $f\in C^\infty(M)$. f^c előállítható $f^c=\overset{\circ}{\xi}f^v$ alakban, ahol $\overset{\circ}{\xi}$ olyan másodrendű vektormezőnek is választható, amely $[C,\overset{\circ}{\xi}]=\overset{\circ}{\xi}$ feltételnek tesz eleget. Ekkor

$$[C,X^c]f^c=C(X^cf^c)-X^c(Cf^c)=C(Xf)^c-X^c(Cf^c) \ .$$

Itt $\overset{\circ}{\xi}$ választása folytán

$$Cf^c=C(\overset{\circ}{\xi}f^v)=[C,\overset{\circ}{\xi}]f^v+\overset{\circ}{\xi}(Cf^v)\overset{3.3.}{=}[C,\overset{\circ}{\xi}]f^v=\overset{\circ}{\xi}f^v=f^c \ ,$$

s így f tetszőlegessége miatt $C(Xf)^c=(Xf)^c$ is fennáll, következésképpen $[C,X^c]f^c=(Xf)^c-X^cf^c\overset{3.5.}{=}(Xf)^c-(Xf)^c=0$. Ez azt jelenti, hogy $[C,X^c]=0$.

Az eddig mondottakkal azt igazoltuk, hogy $\mathbf{h}_\xi$ és $\frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)}+[J,\xi])$ ugyanúgy hat M vektormezőinek teljes liftjein. Az operátorok hatása azonban az $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők vertikális liftjein is megegyezik, hiszen $h_\xi(X^v)=\mathcal{H}_\xi\circ\mathbf{j}\circ\mathbf{i}\circ(\hat{X})\overset{(3.1.2)}{=}0$, míg

$$\frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)}+[J,\xi])(X^v)=\frac{1}{2}X^v+\frac{1}{2}[JX^v,\xi]-\frac{1}{2}J[X^v,\xi]\overset{(3.2.5)}{=}\frac{1}{2}X^v-\frac{1}{2}J[X^v,\xi]\overset{3.6.}{=}$$

$$\frac{1}{2}X^v-\frac{1}{2}X^v=0 \ .$$

Mivel minden TM-en ható vektormező előállítható – legalábbis lokálisan – $\mathfrak{X}(M)$-beli vektormezők teljes és vertikális liftjeinek $C^\infty(TM)$-lineáris kombinációjaként, következik, hogy

$$\mathbf{h}_\xi=\frac{1}{2}(1_{\mathfrak{X}(TM)}+[J,\xi]) \ . \qquad \square$$

Megjegyzés. Horizontális struktúrának másodrendű vektormezőből való konstruálására M. CRAMPIN és J. GRIFONE adott először (egymástól függetlenül) koordinátamentes eljárást [1], [5]. Az itt bemutatott konstrukció az említett szerzőkétől annyiban különbözik, hogy első lépésként egy horizontális liftelés kerül megadásra, s a horizontális leképezés, illetve a horizontális projektor a *3.9.* lemma alkalmazásával ebből nyer leszármaztatást. Ez a módosítás egyben új bizonyítást is igényelt.

3.14. A Berwald-deriválás. Legyen adva ebben a szakaszban egy

$$\mathcal{H}: TM\times_M TM\to TTM$$

horizontális leképezés. A *3.7.*-ben és *3.8.*-ban mondottaknak megfelelően $\mathscr{V}$, $\mathbf{h}$ és $\mathbf{v}$ jelöli a $\mathscr{H}$ –hoz tartozó vertikális leképezést, horizontális projektort és vertikális projektort; X^h egy $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektomező $\mathscr{H}$–szerinti horizontális liftje. A

(3.14.1) $\nabla_\xi \tilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{v}\xi, \mathscr{H}\tilde{Y}] + \mathscr{V}[\mathbf{h}\xi, \mathbf{i}\tilde{Y}] \qquad (\xi\in\mathfrak{X}(TM),\ \tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau))$

formula egy $\nabla:\ \mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ kovariáns deriválást ad meg a $\tau^*\tau$ nyalábon; ezt a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés által indukált *Berwald-deriválás*nak nevezzük. Az értelmezés alapján tetszőleges $\tilde{X}, \tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$; $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ esetén

(3.14.2) $\nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}], \qquad \nabla_{X^v}\hat{Y} = 0$

(3.14.3) $\nabla_{\mathscr{H}\tilde{X}}\tilde{Y} := \mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}], \qquad \nabla_{X^h}\hat{Y} = \mathscr{V}[X^h, Y^v]$.

A

(3.14.4) $\nabla^v:\ \mathfrak{X}(\tau)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau),\ (\tilde{X},\tilde{Y})\mapsto \nabla^v_{\tilde{X}}\tilde{Y} := \nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y} := \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}]$

leképezést *kanonikus v-kovariáns deriválás*nak nevezzük, a

(3.14.5) $\nabla^h:\ \mathfrak{X}(\tau)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau),\ (\tilde{X},\tilde{Y})\mapsto \nabla^h_{\tilde{X}}\tilde{Y} := \nabla_{\mathscr{H}\tilde{X}}\tilde{Y} := \mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}]$

leképezést *h-Berwald-deriválás*nak mondjuk. A ∇^v operátor csakugyan kanonikus differenciáloperátor: független az alkalmazott horizontális leképezéstől. Valóban, állítsuk elő az $\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$ szelést $\tilde{Y}=\mathbf{j}\eta$, $\eta\in\mathfrak{X}(TM)$ alakban (ez $\mathbf{j}$ szürjektívsége miatt lehetséges). Ekkor

$$\nabla^v_{\tilde{X}}\tilde{Y} = \nabla^v_{\tilde{X}}\mathbf{j}\eta := \nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}}\mathbf{j}\eta = \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathscr{H}(\mathbf{j}\eta)] = \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{h}\eta] = \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \eta] - \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{v}\eta] = \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \eta]\ ,$$

ugyanis vertikális vektormezők Lie-zárójele is vertikális, s így $0 = J[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{v}\eta] = \mathbf{i}\circ\mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{v}\eta] \ \Rightarrow\ \mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{v}\eta] = 0$, hiszen $\mathbf{i}$ injektív.

3.15. A most következőkben egy $\mathscr{H}:\ TM\times_M TM\to TTM$ horizontális leképezés alapvető geometriai adatait vezetjük be, az általa indukált Berwald-deriválás segítségével.

(3.15.1) $\mathbf{t} := \nabla^h\delta$

a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés **tenzió**ja. Itt $\nabla^h\delta$ a δ kanonikus szelés h-kovariáns *differenciál*ja a 2.1.-ben mondottakkal analóg értelemben: tetszőleges $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)$ szelés esetén

$$\mathbf{t}(\tilde{X}) := \nabla^h\delta(\tilde{X}) = \nabla^h_{\tilde{X}}\delta = \nabla_{\mathscr{H}\tilde{X}}\delta = \mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathbf{i}\delta] = \mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X}, C]\ .$$

Tehát:

(3.15.2) $\mathbf{t}(\tilde{X}) = \mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X}, C]\ , \qquad \tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)$.

A $\mathscr{H}$ horizontális leképezés **torzió**ja a

(3.15.3) $\mathbf{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}) := d^\nabla\mathbf{j}(\mathscr{H}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}) \overset{(2.1.3)}{=} \nabla_{\mathscr{H}\tilde{X}}\tilde{Y} - \nabla_{\mathscr{H}\tilde{Y}}\tilde{X} - \mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}]$

($\tilde{X}, \tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$) formulával értelmezett $\mathbf{T}$ τ-menti (1,2)-tenzormező.

Speciálisan tetszőleges $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén

$$\mathbf{T}(\hat{X},\hat{Y})=\nabla_{X^h}\hat{Y}-\nabla_{Y^h}\hat{X}-\mathbf{j}[X^h,Y^h]\overset{(3.14.3)}{=}\mathscr{V}[X^h,Y^v]-\mathscr{V}[Y^h,X^v]-\mathbf{j}[X^h,Y^h]\,,$$

ahonnan $\mathbf{iT}(\hat{X},\hat{Y})=\mathbf{v}[X^h,Y^v]-\mathbf{v}[Y^h,X^v]-J[X^h,Y^h]$. $[X^h,Y^v]$ és $[Y^h,X^v]$ egyszerűen átgondolható módon vertikális vektormező, így $\mathbf{v}[X^h,Y^v]=[X^h,Y^v]$, $\mathbf{v}[Y^h,X^v]=[Y^h,X^v]$. Fölhasználva könnyen igazolható $[X^c,Y^c]=[X,Y]^c$ relációt, $J[X^h,Y^h]=J[\mathbf{h}X^h,\mathbf{h}Y^h]=J[X^c,Y^c]-J[\mathbf{v}X^c,\mathbf{v}Y^c]=J[X^c,Y^c]=J[X,Y]^c=[X,Y]^v$, tehát

(3.15.3) $\quad \mathbf{iT}(\hat{X},\hat{Y})=[X^h,Y^v]-[Y^h,X^v]-[X,Y]^v$.

A $\mathscr{H}$ horizontális leképezés **erős torzió**ján a

(3.15.4) $\quad \mathbf{T}^s:=\nabla^h\delta+i_\delta\mathbf{T}=\mathbf{t}+i_\delta\mathbf{T}$

τ-menti (1,1)-tenzormezőt értjük, ahol $i_\delta\mathbf{T}(\tilde{X}):=\mathbf{T}(\delta,\tilde{X})$. $\mathscr{H}$ **görbület**e a

(3.15.5) $\quad \Omega(\tilde{X},\tilde{Y}):=d^\nabla\mathscr{V}(\mathscr{H}\tilde{X},\mathscr{H}\tilde{Y})$; $\quad \tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$

formulával megadott $\Omega\in\mathscr{T}^1_2(\tau)$ τ-menti tenzormező. Tekintettel d^∇ definíciójára,

$$d^\nabla\mathscr{V}(\mathscr{H}\tilde{X},\mathscr{H}\tilde{Y})=\nabla_{\mathscr{H}\tilde{X}}\mathscr{V}\circ\mathscr{H}(\tilde{Y})-\nabla_{\mathscr{H}\tilde{Y}}\mathscr{V}\circ\mathscr{H}(\tilde{X})-\mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X},\mathscr{H}\tilde{Y}]\overset{(3.7.3)}{=}$$

$$-\mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X},\mathscr{H}\tilde{Y}]\,;$$

tehát

(3.15.6) $\quad \Omega(\tilde{X},\tilde{Y})=-\mathscr{V}[\mathscr{H}\tilde{X},\mathscr{H}\tilde{Y}]$; $\quad \tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$.

Speciálisan:

(3.15.6) $\quad \mathbf{i}\Omega(\hat{X},\hat{Y})=-\mathbf{v}[X^h,Y^h]$; $\quad X,Y\in\mathfrak{X}(M)$.

3.16. Lemma. *Egy másodrendű vektormező által indukált horizontális leképezés torziója eltűnik.*

Bizonyítás: Tekintsük a ξ: TM$\to$TTM másodrendű vektormező által a *3.13.*-ban mondottak szerint indukált $\mathscr{H}_\xi$ horizontális leképezést. Ekkor tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén $X^h:=\mathscr{H}_\xi(\hat{X})=\frac{1}{2}(X^c+[X^v,\xi])$, így – $\mathbf{T}$-vel jelölve $\mathscr{H}_\xi$ torzióját is –

$$\mathbf{iT}(\hat{X},\hat{Y})\overset{(3.15.3)}{=}[X^h,Y^v]-[Y^h,X^v]-[X,Y]^v=$$

$$\frac{1}{2}[X^c,Y^v]+\frac{1}{2}[[X^v,\xi],Y^v]-\frac{1}{2}[Y^c,X^v]-\frac{1}{2}[[Y^v,\xi],X^v]-[X,Y]^v\,.$$

Ismert (és könnyen ellenőrizhető), hogy tetszőleges $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ vektormezők esetén $[X^v,Y^c]=[X,Y]^v$. Így

$$\frac{1}{2}[X^c,Y^v]-\frac{1}{2}[Y^c,X^v]-[X,Y]^v=-\frac{1}{2}[Y,X]^v+\frac{1}{2}[X,Y]^v-[X,Y]^v=[X,Y]^v-[X,Y]^v=0\,.$$

A vektormezők Lie-zárójelére vonatkozó Jacobi-azonosság alapján

$$0=[[X^v,\xi],Y^v]+[[\xi,Y^v],X^v]+[[Y^v,X^v],\xi]=[[X^v,\xi],Y^v]-[[Y^v,\xi],X^v]\;;$$

ezzel beláttuk, hogy az $\mathbf{iT}(\hat{X},\hat{Y})$-t megadó formula jobb oldala eltűnik. □

3.17. **Tétel.** *Tegyük föl, hogy* $\mathcal{H}$: $TM\times_M TM \to TTM$ *horizontális leképezés. Ekkor* $\xi:=\mathcal{H}\circ\delta$: $TM\to TTM$ *másodrendű vektormező (az ún.* $\mathcal{H}$–hoz csatolt másodrendű vektormező*), s a* $\mathcal{H}$ *horizontális leképezés és a* ξ *által indukált* $\mathcal{H}_\xi$ *horizontális leképezés különbségtenzora* $\mathcal{H}$ *erős torziójának* $\frac{1}{2}$*-szerese:*

$$\mathcal{H}-\mathcal{H}_\xi=\frac{1}{2}\,\mathbf{i}\mathbf{T}^s \quad .$$

Bizonyítás: Tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\mathbf{T}^s(\hat{X}) := \mathbf{t}(\hat{X})+\mathbf{T}(\delta,\hat{X}) \overset{(3.15.2,3)}{=} \mathcal{V}[X^h,C]+\nabla_{\mathcal{H}\circ\delta}\hat{X}-\nabla_{X^h}\delta-\mathbf{j}[\mathcal{H}\circ\delta,X^h]= \mathcal{V}[X^h,C]+$$
$$\nabla_\xi\hat{X}-\mathcal{V}[X^h,\mathbf{i}\circ\delta]+\mathbf{j}[X^h,\xi] = \nabla_\xi\hat{X}+\mathbf{j}[X^h,\xi] \;,$$

így

$$\mathbf{i}\mathbf{T}^s(\hat{X})=\mathbf{i}\nabla_\xi\hat{X}+J[X^h,\xi] \;.$$

Itt $\mathbf{i}\nabla_\xi\hat{X} = \mathbf{i}\nabla_{\mathcal{H}\circ\delta}\hat{X} \overset{(3.14.3)}{=} \mathbf{v}[\xi,X^v] \overset{(3.13.2)}{=} \mathbf{v}(X^c-2\mathcal{H}_\xi(\hat{X})) = \mathbf{v}X^c-2\mathbf{v}\circ\mathcal{H}_\xi(\hat{X}) \overset{(3.10.1)}{=}$ $\mathbf{v}X^c-2(\mathcal{H}_\xi-\mathcal{H})(\hat{X})=X^c-X^h-2\mathcal{H}_\xi(\hat{X})+2X^h = X^c+X^h-2\mathcal{H}_\xi(\hat{X})$;

$J[X^h,\xi]=J[\mathbf{h}X^c,\xi]=J[X^c,\xi]-J[\mathbf{v}X^c,\xi]$. *3.13.* bizonyítás során igazoltuk, hogy $J[X^c,\xi]=0$; *3.6.* alapján pedig $J[\mathbf{v}X^c,\xi]=\mathbf{v}X^c$. Így

$$J[X^h,\xi]=-\mathbf{v}X^c=\mathbf{h}X^c-X^c=X^h-X^c \;.$$

következésképpen

$$\mathbf{i}\mathbf{T}^s(\hat{X})=X^c+X^h-2\mathcal{H}_\xi(\hat{X})+X^h-X^c=2\mathcal{H}(\hat{X})-2\mathcal{H}_\xi(\hat{X})=2(\mathcal{H}-\mathcal{H}_\xi)(\hat{X}) \;,$$

amivel igazoltuk a tételt. □

3.18. **Következmény.** *Egy horizontális leképezés erős torziója akkor és csak akkor tűnik el, ha a horizontális leképezéshez csatolt másodrendű vektormező által indukált horizontális leképezés megegyezik az adott horizontális leképezéssel.*

3.19. **Következmény.** *Egy horizontális leképezés erős torziója akkor és csak akkor tűnik el, ha eltűnik a tenziója és a torziója.*

Bizonyítás: Tekintsük a $\mathcal{H}$: $TM\times_M TM \to TTM$ horizontális leképezést. Legyen $\xi:=\mathcal{H}\circ\delta$ a $\mathcal{H}$–hoz csatolt másodrendű vektormező, $\mathcal{H}_\xi$ pedig a ξ által indukált horizontális leképezés.

(1) Az erős torzió $\mathbf{T}^s=\mathbf{t}+i_\delta\mathbf{T}$ definíciója alapján evidens, hogy $\mathbf{t}=0$ és $\mathbf{T}=0$ esetén $\mathbf{T}^s=0$.

(2) Tegyük föl, megfordítva, hogy $\mathbf{T}^s=0$. Ekkor *3.17.* értelmében $\mathcal{H}=\mathcal{H}_\xi$, s mivel *3.16.* alapján $\mathcal{H}_\xi$ torziója eltűnik, következik $\mathcal{H}$ torziójának eltűnése is. Így a $\mathbf{T}^s=\mathbf{t}+i_\delta\mathbf{T}$ relációban $\mathbf{T}^s=0$ és $\mathbf{T}=0$, el kell tehát tűnnie a tenziónak is. □

Megjegyzés. Az erős torzió fogalmát J. GRIFONE vezette be [5], némileg eltérő kontextusban. A most nyert következményt (saját elméletének keretei között) szintén megfogalmazta, és – más úton, más eszközökkel – bizonyította.

3.20. **Következmény.** *Egy horizontális leképezést egyértelműen meghatároz az erős torziója és a hozzácsatolt másodrendű vektormező.*

Bizonyítás: Tekintsük a $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ horizontális leképezést. Tegyük föl, hogy $\mathscr{H}_1 \circ \delta = \mathscr{H}_2 \circ \delta =: \xi$, s hogy $\mathscr{H}_1$ és $\mathscr{H}_2$ közös $\mathbf{T}^s$ erős torzióval rendelkezik. Ekkor *3.17.* értelmében

$$\frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^s = \mathscr{H}_1 - \mathscr{H}_\xi \quad \text{és} \quad \frac{1}{2}\mathbf{i}\mathbf{T}^s = \mathscr{H}_2 - \mathscr{H}_\xi,$$

következésképpen $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2$. □

Megjegyzés. A most megfogalmazott eredményt tartalmazza M. DE LEON és P. R. RODRIGUES [3] monográfiája is, a Grifone-elmélet kontextusában, és más eszközöket igénybe vevő, lényegesen különböző bizonyítással.

3.21. Tétel. *Legyen adva egy* $\mathscr{H}$: $TM \times_M TM \to TTM$ *horizontális leképezés, s tekintsük az általa indukált* ∇ *Berwald-deriválást. A*

$$\ell^\nabla : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(TM),\ X \mapsto \ell^\nabla(X) := X^c - \mathbf{i}\nabla_{X^c}\delta$$

leképezés eleget tesz a 3.9./(i),(ii) feltételeknek, következésképpen egy $\mathscr{H}_\nabla$ *horizontális leképezést határoz meg, amelynél*

$$\forall X \in \mathfrak{X}(M): \quad \mathscr{H}_\nabla(\hat{X}) = X^c - \mathbf{i}\nabla_{X^c}\delta.$$

A $\mathscr{H}$ *és a* $\mathscr{H}_\nabla$ *horizontális leképezés különbségtenzora a* $\mathscr{H}$ *horizontális leképezés tenziója:*

$$\mathscr{H} - \mathscr{H}_\nabla = \mathbf{i} \circ \mathbf{t}.$$

Bizonyítás: Legyen X tetszőleges vektormező az M sokaságon.

(1) $\ell^\nabla(fX) := (fX)^c - \mathbf{i}\nabla_{(fX)^c}\delta \overset{(3.5.3)}{=} f^v X^c + f^c X^v - \mathbf{i}\nabla_{f^v X^c}\delta - \mathbf{i}\nabla_{f^c X^v}\delta =$

$f^v(X^c - \mathbf{i}\nabla_{X^c}\delta) + f^c X^v - f^c\mathbf{i}\nabla_{\mathbf{i}\hat{X}}\delta \overset{(3.14.2)}{=} f^v \ell^\nabla(X) - f^c(X^v - X^v) = f^v \ell^\nabla(X)$,

ℓ^∇ tehát eleget tesz a *3.9.*/(i) feltételnek.

$J \circ \ell^\nabla(X) = JX^c - \mathbf{i} \circ \mathbf{j} \circ \mathbf{i}\nabla_{X^c}\delta \overset{(3.5.2),(3.1.2)}{=} X^v = \ell^v(X) \quad \Rightarrow \quad J \circ \ell^\nabla = \ell^v$;

ezzel ellenőriztük, hogy *3.9.*/(ii) is teljesül.

(2) $\mathscr{H}_\nabla(\hat{X}) = X^c - \mathbf{i}\nabla_{X^c}\delta = X^c - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{h}X^c}\delta - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{v}X^c}\delta = X^c - \mathbf{i}\nabla_{X^h}\delta - \mathbf{i}\nabla_{\mathbf{i}(\mathscr{V}X^c)}\delta \overset{(3.14.2,3)}{=}$

$X^c - \mathbf{v}[X^h, C] - J[\mathbf{v}X^c, \mathscr{H} \circ \delta] \overset{3.6.}{=} X^c - \mathbf{v}[X^h, C] - \mathbf{v}X^c = \mathbf{h}X^c - \mathbf{i}\mathscr{V}[X^h, C] \overset{(3.15.2)}{=} X^h - \mathbf{i}\mathbf{t}(\hat{X}) =$

$(\mathscr{H} - \mathbf{i} \circ \mathbf{t})(\hat{X})$

következésképpen $\mathscr{H} - \mathscr{H}_\nabla = \mathbf{i} \circ \mathbf{t}$. □

4. A $\tau^*\tau$ NYALÁBON ADOTT KOVARIÁNS DERIVÁLÁSOK REGULARITÁSI TULAJDONSÁGAI

4.1. Definíció. Vegyünk alapul egy M sokaságot.

(1) M-en (vagy M fölött) adott *Finsler-konnexió*n olyan $(D,\mathcal{H})$ párt értünk, ahol $D\colon \mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ kovariáns deriválás, $\mathcal{H}\colon TM\times_M TM\to TTM$ pedig horizontális leképezés. A

$$D^v\colon \mathfrak{X}(\tau)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau),\quad (\tilde{X},\tilde{Y})\mapsto D^v_{\tilde{X}}\tilde{Y}:=D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y}$$

leképezést a D kovariáns deriváláshoz tartozó *v-kovariáns deriválás*nak hívjuk, a

$$D^h\colon \mathfrak{X}(\tau)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau),\quad (\tilde{X},\tilde{Y})\mapsto D^h_{\tilde{X}}\tilde{Y}:=D_{\mathcal{H}\tilde{X}}\tilde{Y}$$

leképezést a $(D,\mathcal{H})$ Finsler-konnexióhoz tartozó *h-kovariáns deriválás*nak nevezzük.

(2) Egy $(D,\mathcal{H})$ Finsler-konnexió

*horizontális torzió*ja $\mathbf{T}^h(D):=d^D\mathbf{j}$,

*vertikális torzió*ja $\mathbf{T}^v(D):=d^D\mathcal{V}$.

A $\mathcal{T}(\tilde{X},\tilde{Y}):=\mathbf{T}^h(D)(\mathcal{H}\tilde{X},\mathcal{H}\tilde{Y})$, illetve az $\mathcal{S}(\tilde{X},\tilde{Y}):=\mathbf{T}^v(D)(\mathcal{H}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y})$

képletekkel megadott $\mathcal{T}$, illetve $\mathcal{S}$ τ-menti tenzormezőt $(D,\mathcal{H})$ *h-horizontális*, illetve *h-vegyes torzió*jának mondjuk; az

$\mathbf{R}^1(\tilde{X},\tilde{Y}):=\mathbf{T}^v(D)(\mathcal{H}\tilde{X},\mathcal{H}\tilde{Y})$, $\quad\mathbf{P}^1(\tilde{X},\tilde{Y}):=\mathbf{T}^v(D)(\mathcal{H}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y})$,

$\mathbf{Q}^1(\tilde{X},\tilde{Y}):=\mathbf{T}^v(D)(\mathbf{i}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y})$

formulák rendre a *v-horizontális*, *v-vegyes* és *v-vertikális torzió*t értelmezik.

Megjegyzés. A „horizontális torzió”, illetve a „vertikális torzió” elnevezés megtévesztő: a horizontális torzió független mindenféle horizontális struktúrától, míg a vertikális torzió erősen függ az adott horizontális leképezéstől.

4.2. Lemma. Legyen $(D,\mathcal{H})$ Finsler-konnexió az M sokaság fölött, s jelölje ∇ a $\mathcal{H}$ által indukált Berwald-deriválást. $(D,\mathcal{H})$ torziói megkaphatóak a következő formulák alapján:

(4.2.1) $\quad\mathbf{T}^h(D)(\xi,\eta)=D_\xi\mathbf{j}\eta-D_\eta\mathbf{j}\xi-\mathbf{j}[\xi,\eta]$;

(4.2.2) $\quad\mathbf{T}^v(D)(\xi,\eta)=D_\xi\mathcal{V}\eta-D_\eta\mathcal{V}\xi-\mathcal{V}[\xi,\eta]$;

(4.2.3) $\quad\mathcal{T}(\tilde{X},\tilde{Y})=D_{\mathcal{H}\tilde{X}}\tilde{Y}-D_{\mathcal{H}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathbf{j}[\mathcal{H}\tilde{X},\mathcal{H}\tilde{Y}]$;

(4.2.4) $\quad\mathcal{S}(\tilde{X},\tilde{Y})=-D_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathbf{j}[\mathcal{H}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y}]=-D_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}+\nabla_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}$;

(4.2.5) $\quad\mathbf{R}^1(\tilde{X},\tilde{Y})=-\mathcal{V}[\mathcal{H}\tilde{X},\mathcal{H}\tilde{Y}]=\Omega[\tilde{X},\tilde{Y}]$;

(4.2.6) $\quad \mathbf{P}^1(\tilde{X},\tilde{Y})=D_{\mathcal{H}\tilde{X}}\tilde{Y}-\mathcal{V}[\mathcal{H}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y}]=D_{\mathcal{H}\tilde{X}}\tilde{Y}-\nabla_{\mathcal{H}\tilde{X}}\tilde{Y}$;

(4.2.7) $\quad \mathbf{Q}^1(\tilde{X},\tilde{Y})=D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y}-D_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathcal{V}[\mathbf{i}\tilde{X},\mathbf{i}\tilde{Y}]$;

($\xi,\eta\in\mathfrak{X}(TM)$; $\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$) .

A bizonyítás egyszerű számolási gyakorlat.

4.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az öt parciális torzió – $\mathcal{T}$, $\mathcal{S}$, $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{P}^1$ és $\mathbf{Q}^1$ – közül $\mathcal{S}$ ∇^v és D^v különbségtenzora, $\mathbf{P}^1$ D^h és ∇^h különbségtenzora, $\mathbf{R}^1$ pedig a $\mathcal{H}$ horizontális leképezés görbülete. Így

$$S=0 \text{ és } \boldsymbol{P}^1=0 \quad\Leftrightarrow\quad D \text{ a } \mathcal{H} \text{ által indukált Berwald-deriválás.}$$

4.4. Definíció. Egy D: $\mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ kovariáns derivált *deflexiójá*n a

(4.4.1) $\quad \mu:=D\delta\colon \mathfrak{X}(TM)\to\mathfrak{X}(\tau)\,,\quad \xi\mapsto\mu(\xi):=D\delta(\xi)=D_\xi\delta$

leképezést értjük, a

(4.1.2) $\quad \tilde{\mu}:=D^v\delta\colon \mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)\,,\quad \tilde{X}\mapsto\tilde{\mu}(\tilde{X}):=D^v\delta(\tilde{X})=D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta$

leképezést D *v-deflexiójá*nak nevezzük.

Azt mondjuk, hogy a D kovariáns deriválás egy $\mathcal{H}$ *horizontális leképezéshez csatolt*, ha

(4.4.3) $\quad \mu=D\delta=\mathcal{V}$.

Egy (D, $\mathcal{H}$) Finsler-konnexió *h-deflexiójá*a a

(4.4.4) $\quad \mu^h:=D^h\delta\colon \mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)\,,\quad \tilde{X}\mapsto\tilde{\mu}^h(\tilde{X}):=D^h\delta(\tilde{X})=D_{\mathcal{H}\tilde{X}}\delta$

leképezés.

4.5. Megjegyzés. Mivel tetszőleges $\tilde{X}$ τ-menti vektormező esetén $\mu\circ\mathbf{i}(\tilde{X})=\mu(\mathbf{i}(\tilde{X})):=D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta=:\tilde{\mu}(\tilde{X})$, fennáll a

(4.5.1) $\quad \mu\circ\mathbf{i}=\tilde{\mu}$

reláció.

4.6. Definíció. Azt mondjuk, hogy egy D: $\mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ kovariáns deriválás

(1) *reguláris*, ha a v-deflexiója bijektív transzformáció;

(2) *erősen reguláris*, ha a v-deflexiója az identikus transzformáció;

(3) *Moór-Vanstone-reguláris*, ha a v-deflexiója eleget tesz a $(\tilde{\mu}-1_{\mathfrak{X}(\tau)})^2=0$ relációnak;

(4) *vertikálisan természetes*, ha $D^v=\nabla^v$.

4.7. Megjegyzés. Egy (D, $\mathcal{H}$) Finsler-konnexió h-vegyes torziója (4.2.4) alapján az

$$\mathcal{S}(\tilde{X},\tilde{Y})=\nabla_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}-D_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}=(\nabla^v-D^v)(\tilde{Y},\tilde{X})$$

képlettel adható meg. Mivel ∇^v – mint arra a *3.14.*-ben rámutattunk – nem függ semmiféle horizontális struktúrától, az $\mathcal{S}$ tenzor is független $\mathcal{H}$–tól. Tekintettel erre, a következőkben egy (D, $\mathscr{H}$) Finsler-konnexió h-vegyes torzióját a D *kovariáns deriválás Finsler-torzió*jának nevezzük.

4.8. **Tétel.** Tekintsünk D: $\mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ kovariáns deriválást. Legyen $\mathscr{S}$ D Finsler-torziója, s jelölje $i_\delta\mathscr{S}$ az $i_\delta\mathscr{S}(\tilde{X}):=\mathscr{S}(\delta,\tilde{X})$ előírással értelmezett τ-menti (1,1)-tenzormezőt. Ekkor

(1) D vertikálisan természetes $\Leftrightarrow$ $\mathscr{S}=0$,

(2) D erősen reguláris $\Leftrightarrow$ $i_\delta\mathscr{S}=0$,

(3) D Moór-Vanstone-reguláris $\Leftrightarrow$ $i_\delta\mathscr{S}\circ i_\delta\mathscr{S}=0$,

(4) D reguláris $\Leftrightarrow$ $1_{\mathfrak{X}(\tau)}-i_\delta\mathscr{S}$ bijektív ;

következésképpen érvényesek az alábbi implikációk:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{vertikális természetesség} \Rightarrow \text{erős regularitás} \Rightarrow\\ \text{Moór-Vanstone regularitás} \Rightarrow \text{regularitás}\end{array}}$$

Bizonyítás. Az (1) megállapítás a vertikális természetesség definíciója és *4.7.* alapján evidens. Mivel $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)$ esetén

$$i_\delta\mathscr{S}(\tilde{X}):=\mathscr{S}(\delta,\tilde{X})\overset{4.7.}{=}\nabla_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta-D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta\overset{(3.14.2)}{=}\mathbf{j}[\mathbf{i}\tilde{X},\mathscr{H}\circ\delta]-\tilde{\mu}(\tilde{X})\overset{3.6.}{=}\tilde{X}-\tilde{\mu}(\tilde{X})$$
$$=(1_{\mathfrak{X}(\tau)}-\tilde{\mu})(\tilde{X}),$$

fennáll a

(4.8.1) $\tilde{\mu}=1_{\mathfrak{X}(\tau)}-i_\delta\mathscr{S}$

reláció, amiből kiolvasható a (2) megállapítás. Közvetlenül adódik azonban belőle a (3) észrevétel is, hiszen (4.8.1) miatt

$$(\tilde{\mu}-1_{\mathfrak{X}(\tau)})^2=i_\delta\mathscr{S}\circ i_\delta\mathscr{S} \ .$$

A (4) megállapítás ugyancsak triviális következménye (4.8.1)-nek.

(1)-(3) alapján azonnal látható, hogy

vertikális természetesség $\Rightarrow$ *erős regularitás* $\Rightarrow$ *Moór-Vanstone regularitás.*

A Moór-Vanstone-regularitás maga után vonja a regularitást, ugyanis

$$\tilde{\mu}(2\cdot 1_{\mathfrak{X}(\tau)}-\tilde{\mu})\overset{(4.8.1)}{=}(1_{\mathfrak{X}(\tau)}-i_\delta\mathscr{S})(1_{\mathfrak{X}(\tau)}+i_\delta\mathscr{S})=1_{\mathfrak{X}(\tau)}-(i_\delta\mathscr{S})^2\overset{(3)}{=}1_{\mathfrak{X}(\tau)} ;$$

hasonlóképpen

$$(2\cdot 1_{\mathfrak{X}(\tau)}-\tilde{\mu})\tilde{\mu}=(1_{\mathfrak{X}(\tau)}+i_\delta\mathscr{S})(1_{\mathfrak{X}(\tau)}-i_\delta\mathscr{S})=1_{\mathfrak{X}(\tau)} \ ,$$

$\tilde{\mu}$ tehát invertálható (s az inverze a $2\cdot 1_{\mathfrak{X}(\tau)}-\tilde{\mu}$ transzformáció) – és ennélfogva $\tilde{\mu}$ bijektív. □

4.9. **Példa.** Legyen $\tilde{A}\in\mathscr{T}^1_1(\tau)$, s tegyük föl, hogy $\tilde{A}(\delta)=0$. Értelmezzük az $\mathscr{S}\in\mathscr{T}^1_2(\tau)$ tenzormezőt az

$$\mathscr{S}(\tilde{X},\tilde{Y}):=\tilde{A}(\tilde{Y})\tilde{X} \qquad (\tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau))$$

előírással, s legyen D: $\mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ olyan kovariáns deriválás, amelyhez a

$$D^{v}_{\tilde{X}}\tilde{Y}=\nabla^{v}_{\tilde{X}}\tilde{Y}-\mathscr{S}(\tilde{Y},\tilde{X})\ ;\qquad \tilde{X},\tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau)$$

formulával megadott v-kovariáns deriválás tartozik. Ekkor *4.7.* értelmében D Finsler-torziója a megadott $\mathscr{S}$ tenzor. Tetszőleges $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)$ τ-menti vektormező esetén

$$i_\delta\mathscr{S}\circ i_\delta\mathscr{S}(\tilde{X})=i_\delta\mathscr{S}(\tilde{A}(\tilde{X})\delta)=\tilde{A}(\tilde{X})i_\delta\mathscr{S}(\delta)=\tilde{A}(\tilde{X})\tilde{A}(\delta)\delta=0\ ,$$

így *4.8.*(3) értelmében a D kovariáns deriválás Moór-Vanstone-reguláris. – Ez a példa azt mutatja, hogy Moór-Vanstone-reguláris (és ennélfogva reguláris) kovariáns deriválások könnyen gyárthatók.

4.10. Megjegyzés. Legyen (D, $\mathscr{H}$) Finsler-konnexió. Akkor és csak akkor teljesül, hogy D $\mathscr{H}$–hoz csatolt, ha D erősen reguláris és (D, $\mathscr{H}$) h-deflexiója eltűnik:

(4.10.1) $\qquad D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta=\tilde{X}\quad$ és $\quad D_{\mathscr{H}\tilde{X}}\delta=0\quad(\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau))$.

Valóban, ha D $\mathscr{H}$–hoz csatolt, s így $D\delta\overset{(4.4.3)}{=}\mathscr{V}$, akkor

$$D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\delta=D\delta(\mathbf{i}\tilde{X})=\mathscr{V}(\mathbf{i}\tilde{X})=\mathscr{V}\circ\mathbf{i}\tilde{X}\overset{(3.7.2)}{=}\tilde{X}\ ,$$

$$D_{\mathscr{H}\tilde{X}}\delta=D\delta(\mathscr{H}\tilde{X})=\mathscr{V}(\mathscr{H}\tilde{X})=\mathscr{V}\circ\mathscr{H}\tilde{X}\overset{(3.7.3)}{=}0\ ,$$

tehát (4.10.1) teljesül. Megfordítva, tegyük föl, hogy D eleget tesz (4.10.1)-nek. Ekkor tetszőleges $\xi\in\mathfrak{X}(TM)$ vektormező esetén

$$D\delta(\xi)=D\delta(\mathbf{i}\xi+\mathbf{h}\xi)=D\delta(\mathbf{i}\circ\mathscr{V}(\xi)+\mathscr{H}\circ\mathbf{j}(\xi))=D_{\mathbf{i}(\mathscr{V}\xi)}\delta+D_{\mathscr{H}(\mathbf{j}\xi)}\delta\overset{(4.10.1)}{=}\mathscr{V}\xi\ ,$$

következésképpen $D\delta=\mathscr{V}$, D tehát $\mathscr{H}$–hoz csatolt.

4.11. Tétel. Tegyük föl, hogy D reguláris kovariáns deriválás. Ekkor az

$$\ell_D:\ \mathfrak{X}(M)\to\mathfrak{X}(TM)\ ,\ X\mapsto\ \ell_D(X):=X^c-\mathbf{i}\tilde{\mu}^{-1}D_{X^c}\delta$$

leképezés horizontális liftelés (azaz eleget tesz a *3.9.*/(i),(ii) feltételeknek), s így meghatároz egy $\mathscr{H}_D:\ \mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(TM)$ horizontális leképezést, amelynél

(4.11.1.) $\qquad \mathscr{H}_D(\hat{X})=X^c-\mathbf{i}\tilde{\mu}^{-1}D_{X^c}\delta\qquad(X\in\mathfrak{X}(M))$.

A $\mathscr{H}_D$-hez tartozó horizontális projektor

(4.11.2.) $\qquad \mathbf{h}_D=1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu$

($\mu:=D\delta$, illetve $\tilde{\mu}:=D^v\delta$ D deflexiója, illetve v-deflexiója). A $\mathscr{H}_D$ horizontális leképezés képtere megegyezik a μ deflexió nullterével:

$$\mathrm{Im}\mathscr{H}_D=\mathrm{Ker}\mu\ .$$

Amennyiben – speciálisan – D erősen reguláris (s ezért egyben Moór-Vanstone-reguláris), úgy

$$\ell_D(X)=\mathscr{H}_D(\hat{X})=X^c-\mathbf{i}D_{X^c}\delta\qquad(X\in\mathfrak{X}(M))\ ,\ \mathbf{h}_D=1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{i}\circ\mu\ .$$

Bizonyítás. Tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$, $f\in C^\infty(M)$ esetén

$$\ell_D(fX):=(fX)^c-\mathbf{i}\,\tilde{\mu}^{-1}\,D_{(fX)^c}\,\delta\overset{(3.5.3)}{=}f^v(X^c-\mathbf{i}\,\tilde{\mu}^{-1}\,D_{X^c}\,\delta)+f^c(X^v-\mathbf{i}\,\tilde{\mu}^{-1}\,D_{X^v}\,\delta)$$

$$=f^v\,\ell_D(X)+f^c(X^v-\mathbf{i}\,\tilde{\mu}^{-1}\circ\tilde{\mu}(\hat{X}))=f^v\,\ell_D(X)+f^c(X^v-\mathbf{i}(\hat{X}))=f^v\,\ell_D(X)\,;$$

$$J\circ\ell_D(X)=JX^c-\mathbf{i}\circ\mathbf{j}\circ\mathbf{i}\,D_{X^c}\,\delta=X^v=\ell^v(X)$$

– ezzel beláttuk, hogy ℓ_D eleget tesz *3.9.*/(i),(ii)-nek.

$$\mathbf{h}_D(X^c):=\mathscr{H}_D\circ\mathbf{j}(X^c)=\mathscr{H}_D(\hat{X})=X^c-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}(D_{X^c}\,\delta)=X^c-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu(X^c)$$
$$=(1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu)(X^c)\,,$$

$$\mathbf{h}_D(X^v):=\mathscr{H}_D\circ\mathbf{j}\circ\mathbf{i}(\hat{X})=0\,;$$

másrészt

$$(1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu)(X^v)=X^v-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu\circ\mathbf{i}(\hat{X})\overset{(4.5.1)}{=}X^v-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu\circ\mathbf{i}(\hat{X})$$

$$=X^v-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\tilde{\mu}(\hat{X})=X^v-\mathbf{i}(\hat{X})=0\,,$$

következik ilymódon, hogy $\mathbf{h}_D=1_{\mathfrak{X}(TM)}-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu$.

$$\mu(\mathscr{H}_D(\hat{X}))=\mu(X^c-\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}(D_{X^c}\,\delta))=\mu(X^c)-\mu\circ\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}\circ\mu(X^c)\overset{(4.5.1)}{=}\mu(X^c)-\mu(X^c)=0\,;$$

ez azt jelenti, hogy $\mathrm{Im}\mathscr{H}_D\subset\mathrm{Ker}\mu$.

Belátjuk végül, hogy $\mathrm{Im}\mathscr{H}_D$ teljesen kimeríti $\mathrm{Ker}\mu$-t. – Legyen $\xi\in\mathrm{Ker}\mu$ tetszőleges. ξ-t $\xi=\mathbf{h}_D\xi+\mathbf{v}_D\xi$ alakban állítva elő,

$$\mu(\xi)=\mu(\mathbf{h}_D\xi)+\mu(\mathbf{v}_D\xi)=\mu(\mathscr{H}_D\circ\mathbf{j}(\xi))+\mu(\mathbf{i}\circ\mathscr{V}_D(\xi))=\mu\circ\mathbf{i}(\mathscr{V}_D(\xi))=\tilde{\mu}(\mathscr{V}_D(\xi))$$

folytán

$$\xi\in\mathrm{Ker}\mu\ \Rightarrow\ \tilde{\mu}(\mathscr{V}_D(\xi))=0\ \Rightarrow\ \mathscr{V}_D(\xi)=0\ ,$$

hiszen a feltevés értelmében $\tilde{\mu}$ bijektív. $\mathscr{V}_D(\xi)=0$ miatt egyben $\mathbf{v}_D(\xi)=\mathbf{i}\circ\mathscr{V}_D(\xi)=0$, s ezért $\xi=\mathbf{h}_D\xi\in\mathrm{Im}\mathscr{H}_D$; tehát

$$\xi\in\mathrm{Ker}\mu\ \Rightarrow\ \xi\in\mathrm{Im}\mathscr{H}_D\,,$$

s így $\mathrm{Ker}\mu\subset\mathrm{Im}\mathscr{H}_D$. Ezzel a bizonyítás teljes. □

Megjegyzés. Ha a tételben leírt konstrukciót egy horizontális leképezés által indukált Berwald-deriválásra alkalmazzuk (amely vertikálisan természetes volta miatt erősen reguláris), akkor a *3.21.* tételben nyert $\mathscr{H}_\nabla$ horizontális leképezést kapjuk vissza.

Tetszőleges D reguláris kovariáns deriválás esetén a most konstruált $\mathscr{H}_D$ horizontális leképezést a *D által indukált horizontális leképezés*ként fogjuk említeni.

4.12. Lemma. Ha D reguláris kovariáns deriválás és $\mathscr{H}_D$ az általa indukált horizontális leképezés, akkor a $(D,\mathscr{H}_D)$ Finsler-konnexió h-deflexiója eltűnik:

$$D_{\mathscr{H}_D(\tilde{X})}\,\delta=0\qquad(\,\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)\,)\,.$$

Bizonyítás. Legyen $X\in\mathfrak{X}(M)$ tetszőleges. Ekkor

$$D_{\mathcal{H}_D(\hat{X})}\delta \overset{(4.11.1)}{=} D_{X^c}\delta - D_{\mathbf{i}\circ\tilde{\mu}^{-1}D_{X^c}\delta} = D_{X^c}\delta - \tilde{\mu}(\tilde{\mu}^{-1}D_{X^c}\delta) = D_{X^c}\delta - D_{X^c}\delta = 0\ .$$

Ez igazolja az állítást, hiszen a bázikus vektormezők (lokálisan) generálják $\mathfrak{X}(\tau)$ modulust. □

4.13. Állítás. *Ha D reguláris kovariáns deriválás, akkor egyetlenegy olyan $\mathcal{H}$ horizontális leképezés létezik, amelyre teljesül, hogy a (D, $\mathcal{H}$) Finsler-konnexió h-deflexiója eltűnik, s ez éppen a D által indukált horizontális leképezés.*

Bizonyítás. Tekintsük a $\mathcal{H}_D$ horizontális leképezést, $\mathcal{H}$ pedig legyen tetszőleges olyan horizontális leképezés, amelyre

$$D_{\mathcal{H}(\tilde{X})}\delta=0\ ,\qquad \tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)\ .$$

$\mathcal{H}$ és $\mathcal{H}_D$ különbségtenzora (3.10.1) alapján $\mathcal{V}_D\circ\mathcal{H}$, ahol $\mathcal{V}_D$ a $\mathcal{H}_D$ –hez tartozó vertikális leképezés:

$$\mathcal{H}-\mathcal{H}_D=\mathbf{i}\circ(\mathcal{V}_D\circ\mathcal{H})\ .$$

Tekintsük D $\tilde{\mu}$ v-deflexióját. Tetszőleges $X\in\mathfrak{X}(M)$ vektormező esetén

$$\tilde{\mu}\,(\mathcal{V}_D\circ\mathcal{H})(\hat{X})=D_{\mathbf{i}(\mathcal{V}_D\circ\mathcal{H})(\hat{X})}\delta=D_{(\mathcal{H}-\mathcal{H}_D)(\hat{X})}\delta=D_{\mathcal{H}(\hat{X})}\delta-D_{\mathcal{H}_D(\hat{X})}\delta=$$

$$D_{\mathcal{H}(\hat{X})}\delta-\mu(\mathcal{H}_D(\hat{X}))=0\ .$$

hiszen $D_{\mathcal{H}(\hat{X})}\delta=0$ a feltétel szerint, $\mu(\mathcal{H}_D(\hat{X}))$ pedig $\mathrm{Ker}\mu=\mathrm{Im}\mathcal{H}_D$ miatt egyenlő nullával. A kapott eredményből $\tilde{\mu}$ bijektívsége miatt $\mathcal{V}_D\circ\mathcal{H}=0$ következik, amit azt jelenti, hogy $\mathcal{H}=\mathcal{H}_D$. □

5. Metrikus Finsler-konnexiók általánosított Finsler-sokaságokon

5.1. Definíció. (1) Egy (M,g) párt *általánosított Finsler-sokaság*nak nevezünk, ha M egy sokaság, g pedig egy pszeudoriemann-metrika a $TM\times_M TM$ pullback-nyalábon, vagyis olyan

$$v\in TM \mapsto g_v\in T^0_2(T_{\tau(v)}M)$$

leképezés, ahol g_v nemelfajuló szimmetrikus bilineáris forma a $T_{\tau(v)}M\cong\{v\}\times T_{\tau(v)}M$ fibrumon. Ilyenkor g-t *általánosított metriká*ként (vagy *sebességfüggő metriká*ként) említjük.

(2) Egy g általánosított Finsler-metrika *v-Cartan-tenzor*án a

$$\mathscr{C}^{\mathrm{v}}_{\flat}:=\nabla^{\mathrm{v}}g\in\mathscr{T}^{0}_{3}(\tau)$$

tenzort, illetve az ezzel metrikusan ekvivalens, a

$$g(\mathscr{C}^{\mathrm{v}}(\tilde{X},\tilde{Y}),\tilde{Z}):=\mathscr{C}^{\mathrm{v}}_{\flat}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}) \qquad (\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\tau))$$

reláció által meghatározott $\mathscr{C}^{\mathrm{v}}\in\mathscr{T}^{1}_{2}(\tau)$ tenzort értjük.

(3) Tegyük föl, hogy az M sokaság fölött adva van egy $\mathscr{H}: TM\times_M TM\to TTM$ horizontális leképezés, s tekintsük az általa indukált ∇^{h} h-Berwald-deriválást. Egy g általánosított Finsler-metrika ($\mathscr{H}$–ra vonatkozó) *h-Cartan-tenzor*án a

$$\mathscr{C}^{\mathscr{H}}_{\flat}:=\nabla^{h}g\in\mathscr{T}^{0}_{3}(\tau)$$

valamint a vele metrikusan ekvivalens, a

$$g(\mathscr{C}^{\mathscr{H}}(\tilde{X},\tilde{Y}),\tilde{Z}):=\mathscr{C}^{\mathscr{H}}_{\flat}(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}) \qquad (\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\tau))$$

előírással értelmezett $\mathscr{C}^{\mathscr{H}}\in\mathscr{T}^{1}_{2}(\tau)$ tenzort értjük.

5.2. **Lemma** ([4], Vol.II, p.344)**.** Legyen K egységelemes kommutatív gyűrű, amelyre teljesül, hogy $\lambda\in K\mapsto 2\lambda:=\lambda+\lambda\in K$ leképezés bijektív. Tekintsünk egy V K-modulust. Tegyük föl, hogy az $f:V\to V^*$ leképezés (K-lineáris) izomorfizmus és hogy

$$\langle,\rangle: V\times V\to K\ ,\ (v,w)\mapsto\langle v,w\rangle:=f(v)(w)$$

függvény szimmetrikus. Ekkor minden $\omega: V\times V\to V$ ferdeszimmetrikus (K-) bilineáris leképezéshez létezik egy és csak egy olyan

$$\psi: V\to \mathrm{End}(V)\ , \quad u\mapsto\psi_u$$

K-lineáris leképezés úgy, hogy

(i) tetszőleges $u\in V$ esetén ψ_u ferdeszimmetrikus a $\langle,\rangle$ bilineáris függvényre nézve, azaz $\langle\psi_u(v),w\rangle+\langle v,\psi_u(w)\rangle=0 \qquad (v,w\in V)$;

(ii) $\omega(v,w)=\psi_v(w)-\psi_w(v)$; $\qquad v,w\in V$.

5.3. **Tétel** *(általánosított Ricci-lemma)***.** *Tegyük föl, hogy (M,g) általánosított Finsler-sokaság, amely el van látva egy* $\mathscr{H}: TM\times_M TM\to TTM$ *horizontális leképezéssel. Megadva egy* $\boldsymbol{T}\in\mathscr{T}^{1}_{2}(\tau)$ *és egy* $\mathbb{Q}\in\mathscr{T}^{1}_{2}(\tau)$ *ferdeszimmetrikus tenzormezőt, létezik egy és csak egy olyan* $D: \mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau)\to\mathfrak{X}(\tau)$ *metrikus kovariáns deriválás, amelynek h-horizontális, illetve v-vertikális torziója az adott* $\boldsymbol{T}$*, illetve* $\mathbb{Q}$ *tenzor.*

Bizonyítás. (1) Induljunk ki egy, a $(\tau^*\tau, g)$ pszeudoriemann-vektornyalábon adott tetszőleges $\overset{\circ}{D}$ metrikus kovariáns deriválásból ($\overset{\circ}{D}$ létezését *2.6.* biztosítja). Jelölje $\overset{\circ}{D}$ h-horizontális, illetve v-vertikális torzióját $\overset{\circ}{\mathscr{T}}$, illetve $\overset{\circ}{\mathbf{Q}}$. Alkalmazzuk az *5.2.* lemmát a

$$K:=C^{\infty}(TM)\ , \quad V:=\mathfrak{X}(\tau)\ , \quad \langle,\rangle:=g$$

szereposztással. Ekkor a lemmabeli $f:V\to V^*$ izomorfizmus szerepét a

$$\flat: \mathfrak{X}(\tau)\to\mathscr{A}_1(\tau)\ , \quad \tilde{X}\mapsto\tilde{X}^{\flat}\ , \quad \tilde{X}^{\flat}(\tilde{Y}):=g(\tilde{X},\tilde{Y})$$

zenei izomorfizmus játssza. *5.2.* biztosítja egy és csak egy olyan

$$\psi^{h}: \mathfrak{X}(\tau)\to \mathrm{End}(\mathfrak{X}(\tau)), \quad \tilde{X} \mapsto \psi^{h}(\tilde{X})$$

$C^{\infty}(TM)$-lineáris leképezést létezését, hogy

(i) $\psi^{h}_{\tilde{X}}$ minden $\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau)$ esetén ferdeszimmetrikus g-re nézve, azaz $\forall\, \tilde{Y}, \tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\tau)$: $g(\psi^{h}_{\tilde{X}}(\tilde{Y}), \tilde{Z})+g(\tilde{Y}, \psi^{h}_{\tilde{X}}(\tilde{Z}))=0$;

(ii) $\mathbb{T}(\tilde{X}, \tilde{Y})-\overset{\circ}{\mathscr{T}}(\tilde{X}, \tilde{Y})=\psi^{h}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})-\psi^{h}_{\tilde{Y}}(\tilde{X})$.

Hasonlóképpen, ha $\omega^{v}(\tilde{X}, \tilde{Y}):=\mathbb{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y})-\overset{\circ}{\mathbf{Q}}(\tilde{X}, \tilde{Y})$, akkor létezik egy és csak egy olyan

$$\psi^{v}: \mathfrak{X}(\tau)\to \mathrm{End}(\mathfrak{X}(\tau)), \quad \tilde{X} \mapsto \psi^{v}(\tilde{X})$$

$C^{\infty}(TM)$-lineáris leképezés, amely

(iii) ferdeszimmetrikus g-re nézve, azaz tetszőleges $\tilde{Y}, \tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\tau)$ esetén $g(\psi^{v}_{\tilde{X}}(\tilde{Y}), \tilde{Z})+g(\tilde{Y}, \psi^{v}_{\tilde{X}}(\tilde{Z}))=0$;

(iv) eleget tesz a $\mathbb{Q}(\tilde{X}, \tilde{Y})-\overset{\circ}{\mathbf{Q}}(\tilde{X}, \tilde{Y})=\psi^{v}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})-\psi^{v}_{\tilde{Y}}(\tilde{X})$ relációnak.

(2) Definiáljuk ezek után a $D: \mathfrak{X}(TM)\times\Gamma(\tau)\to\Gamma(\tau)$ leképezést a

$$D_{\xi}\tilde{Y} := \overset{\circ}{D}_{\xi}\tilde{Y}+\overset{h}{\psi}_{\mathbf{j}\xi}(\tilde{Y})+\overset{h}{\psi}_{\mathbf{j}\xi}(\tilde{Y}) \qquad (\xi\in\mathfrak{X}(TM),\ \tilde{Y}\in\mathfrak{X}(\tau))$$

előírással! Világos, hogy ekkor D kovariáns deriválás a $\tau^{*}\tau$ vektornyalábon. Megmutatjuk, hogy D metrikus és hogy az előírt $\mathbb{T}$, illetve $\mathbb{Q}$ h-horizontális, illetve v-vertikális torzióval rendelkezik.

Metrikusság. Tetszőleges $\xi\in\mathfrak{X}(TM)$, $\tilde{Y}, \tilde{Z}\in\mathfrak{X}(\tau)$ esetén

$$D_{\xi}g(\tilde{Y}, \tilde{Z})=\xi g(\tilde{Y}, \tilde{Z})-g(D_{\xi}\tilde{Y}, \tilde{Z})-g(\tilde{Y}, D_{\xi}\tilde{Z}) \overset{\overset{\circ}{D}\ \mathrm{metrikus}}{=}$$

$$g(\overset{\circ}{D}_{\xi}\tilde{Y}, \tilde{Z})+g(\tilde{Y}, \overset{\circ}{D}_{\xi}\tilde{Z})-g(D_{\xi}\tilde{Y}, \tilde{Z})-g(\tilde{Y}, D_{\xi}\tilde{Z}):=$$

$$-g(\overset{h}{\psi}_{\mathbf{j}\xi}(\tilde{Y}), \tilde{Z})-g(\overset{h}{\psi}_{\mathbf{j}\xi}(\tilde{Y}), \tilde{Z})-g(\tilde{Y}, \overset{h}{\psi}_{\mathbf{j}\xi}(\tilde{Z}))-g(\tilde{Y}, \psi^{v}_{\mathscr{V}\xi}(\tilde{Z})) \overset{(i),(iii)}{=} 0 .$$

h-horizontális torzió. $\mathscr{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \overset{(4.2.3)}{=} D_{\mathscr{H}\tilde{X}}\tilde{Y}-D_{\mathscr{H}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}]:=$

$$\overset{\circ}{D}_{\mathscr{H}\tilde{X}}\tilde{Y}-\overset{\circ}{D}_{\mathscr{H}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{X}, \mathscr{H}\tilde{Y}]+\psi^{h}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})-\psi^{h}_{\tilde{Y}}(\tilde{X})=$$

$$\overset{\circ}{\mathscr{T}}(\tilde{X}, \tilde{Y})+\psi^{h}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})-\psi^{h}_{\tilde{Y}}(\tilde{X}) \overset{(ii)}{=} \mathbb{T}(\tilde{X}, \tilde{Y}) .$$

v-vertikális torzió. $\mathbf{Q}^{1}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \overset{(4.2.7.)}{=} D_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y}-D_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathscr{V}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}]=$

$$\overset{\circ}{D}_{\mathbf{i}\tilde{X}}\tilde{Y}-\overset{\circ}{D}_{\mathbf{i}\tilde{Y}}\tilde{X}-\mathscr{V}[\mathbf{i}\tilde{X}, \mathbf{i}\tilde{Y}]+\psi^{v}_{\tilde{X}}(\tilde{Y})-\psi^{v}_{\tilde{Y}}(\tilde{X})=$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{Q}}(\tilde X,\tilde Y)+\psi^{v}_{\tilde X}(\tilde Y)-\psi^{v}_{\tilde Y}(\tilde X)\overset{(iv)}{=}\mathbb{Q}(\tilde X,\tilde Y)\ .$$

(3) *A D kovariáns deriválást az előírt tulajdonságok egyértelműen meghatározzák.* Tegyük föl ennek belátására, hogy $\tilde D$ is olyan metrikus kovariáns deriválás $\tau^*\tau$-n, amelynek h-horizontális, illetve v-vertikális torziója a megadott $\mathbb{T}$, illetve $\mathbb{Q}$ tenzor. Legyen

$$\tilde\psi^{h}_{\tilde X}(\tilde Y):=\tilde D^{h}_{\tilde X}\tilde Y-\overset{\circ}{D}{}^{h}_{\tilde X}\tilde Y\ ;\quad \tilde\psi^{v}_{\tilde X}(\tilde Y):=\tilde D^{v}_{\tilde X}\tilde Y-\overset{\circ}{D}{}^{v}_{\tilde X}\tilde Y\qquad (\tilde X,\tilde Y\in\mathfrak{X}(\tau))\ .$$

Ekkor $\tilde\psi^{h}_{\tilde X}$ és $\tilde\psi^{v}_{\tilde X}$ egyaránt ferdeszimmetrikus g-re nézve, és

$$\tilde\psi^{h}_{\tilde X}\tilde Y-\tilde\psi^{h}_{\tilde Y}\tilde X=\mathbb{T}(\tilde X,\tilde Y)-\overset{\circ}{\mathscr{T}}(\tilde X,\tilde Y)\ ,\qquad \tilde\psi^{v}_{\tilde X}\tilde Y-\tilde\psi^{v}_{\tilde Y}\tilde X=\mathbb{Q}(\tilde X,\tilde Y)-\overset{\circ}{\mathbf{Q}}(\tilde X,\tilde Y)\ ,$$

így a Lemma által biztosított egyértelműség miatt $\tilde\psi^{h}=\psi^{h}$, $\tilde\psi^{h}=\psi^{h}$, s ennélfogva $\tilde D=D$ következik. □

5.4. **Következmény és definíció.** *Legyen (M,g) általánosított Finsler-sokaság, ellátva egy $\mathscr{H}$ horizontális leképezéssel. Létezik egy és csak egy olyan D metrikus kovariáns deriválás a $\tau^*\tau$ vektornyalábon, amelynek h-horizontális torziója a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés torziójával egyezik meg, a v-vertikális torziója pedig eltűnik. A (D,$\mathscr{H}$) Finsler-konnexiót az (M,g) általánosított Finsler-sokaság ($\mathscr{H}$ –ra vonatkozó)* kanonikus Finsler-konnexió*jának nevezzük.*

5.5. **Megjegyzések.** (1) Ha – speciálisan – (M,g) Finsler-sokaság és $\mathscr{H}$ a g-ből származó kanonikus horizontális leképezés, akkor *5.4.* a Finsler-sokaság kanonikus metrikus Finsler-konnexióját, az ún. **Cartan-konnexió**t (ld. pl. [13], pp.1396-1397) adja vissza. Ekkor *D $\mathscr{H}$–hoz csatolt* a 4.4.-ben mondott értelemben.

(2) Térjünk vissza a $\mathscr{H}$ horizontális leképezéssel ellátott (M,g) Finsler-sokasághoz, s tekintsük ennek $\overset{v}{\mathscr{C}}_\flat$, illetve $\overset{\mathscr{H}}{\mathscr{C}}_\flat$ v-, illetve h-Cartan-tenzorát. Az ezek segítségével a

$$g(\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{v}(\tilde X,\tilde Y),\tilde Z):=\overset{v}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde X,\tilde Y,\tilde Z)+\overset{v}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde Y,\tilde Z,\tilde X)-\overset{v}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde Z,\tilde X,\tilde Y)\ ,$$

illetve a

$$g(\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{\mathscr{H}}(\tilde X,\tilde Y),\tilde Z):=\overset{\mathscr{H}}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde X,\tilde Y,\tilde Z)+\overset{\mathscr{H}}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde Y,\tilde Z,\tilde X)-\overset{\mathscr{H}}{\mathscr{C}}_\flat(\tilde Z,\tilde X,\tilde Y)$$

előírással definiált $\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{v}\in\mathscr{T}^1_2(\tau)$, $\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{\mathscr{H}}\in\mathscr{T}^1_2(\tau)$ tenzorokat g *v-Cartan-Christoffel*, illetve *h-Cartan-Christoffel tenzor*ának nevezzük. [13]-ben bizonyítást nyert, hogy a

$$D_\xi\tilde Y:=\nabla_\xi\tilde Y+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{v}(\mathscr{V}\xi,\tilde Y)+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{\mathscr{H}}(\mathbf{j}\xi,\tilde Y)$$

előírás (∇ a $\mathscr{H}$–ból *3.14.1.* szerint származó Berwald-deriválás; $\xi\in\mathfrak{X}(TM)$, $\tilde Y\in\mathfrak{X}(\tau)$) olyan metrikus kovariáns deriválást ad meg, amelynek h-horizontális torziója $\mathscr{H}$ torziójával egyezik meg, a v-vertikális torziója pedig eltűnik. Ez a kovariáns deriválás tehát éppen (M,g) $\mathscr{H}$ –hoz tartozó kanonikus kovariáns deriválása. Ebből és *5.4.* unicitás-állításból közvetlenül adódik az

5.6. Következmény. Tegyük föl, hogy (M,g) általánosított Finsler-sokaság. Legyen $\mathscr{H}: TM\times_M TM \to TTM$ horizontális leképezés, s jelentse ∇ a $\mathscr{H}$ által indukált Berwald-deriválást. Megadva egy

$$\psi: \mathfrak{X}(TM)\times\mathfrak{X}(\tau) \to \mathfrak{X}(\tau)$$

$C^\infty(TM)$-bilineáris leképzést, értelmezzük $\psi^v \in \mathscr{T}^1_2(\tau)$, illetve a $\psi^h \in \mathscr{T}^1_2(\tau)$ tenzort a

$$\psi^v(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \psi(\mathbf{i}\tilde{X}, \tilde{Y}), \text{ illetve a } \psi^h(\tilde{X}, \tilde{Y}) := \psi(\mathscr{H}\tilde{X}, \tilde{Y})$$

előírással, és tekintsük a

$$D: (\xi, \tilde{Y}) \mapsto D_\xi \tilde{Y} := \nabla_\xi \tilde{Y} + \psi(\xi, \tilde{Y})$$

kovariáns deriválást.

(1) Annak szükséges és elegendő feltétele, hogy D h-metrikus legyen (azaz $D^h g=0$ teljesüljön) és D h-horizontális torziója $\mathscr{H}$ torziójával egyezzen meg az, hogy $\psi^h = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{\mathscr{H}}$ legyen.

(2) D akkor és csak akkor eltűnő v-vertikális torziójú, v-metrikus (a $D^v g=0$ feltételt teljesítő) kovariáns deriválás, ha $\psi^v = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\mathscr{C}}{}^{v}$. □

Megjegyzés. Ez az eredmény M. CRAMPIN egy tételének ([2] Theorem 2) általánosítása.

6. A STRUKTÚRA-EGYENLETEK

6.1. Lemma és definíció. Jelölje $\mathscr{A}(\tau)$ a τ-menti differenciálformák Grassmann-algebráját, más szóval az $\mathfrak{X}(\tau)$ $C^\infty(TM)$-modulus Grassmann-algebráját.

(1) Létezik egy és csak egy olyan $d^v: \mathscr{A}(\tau) \to \mathscr{A}(\tau)$ elsőfokú gradált deriváció, amely a TM-en adott sima függvényeken, illetve a bázikus 1-formákon a

$$d^v f(\tilde{X}) := df(\mathbf{i}\tilde{X}) = (\mathbf{i}\tilde{X})f, \quad \text{illetve a} \quad d^v\hat{\alpha} = 0$$

($f \in C^\infty(TM)$, $\alpha \in \mathscr{A}_1(M)$, $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(\tau)$) előírás szerint hat.

Ezt a d^v operátort az $\mathscr{A}(\tau)$ Grassmann-algebra *vertikális külső deriválť*jának nevezzük. d^v hatását tetszőleges $\tilde{\alpha} \in \mathscr{A}^k(\tau)$ τ-menti k-formán a

$$(6.1.1)\quad d^v\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_k) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1}(\mathbf{i}\tilde{X}_i)\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1,\dots,\hat{\tilde{X}}_i,\dots,\tilde{X}_{k+1}) +$$

$$\sum_{i\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\tilde{\alpha}(\mathscr{V}[\mathbf{i}\tilde{X}_i, \mathbf{i}\tilde{X}_j],\dots,\hat{\tilde{X}}_i,\dots,\hat{\tilde{X}}_j,\dots,\tilde{X}_{k+1})$$

formula adja, ahol $\mathscr{V}$ egy tetszőlegesen választott horizontális leképezéshez tartozó vertikális leképezés, $\tilde{X}_i \in \mathfrak{X}(\tau)$ $(1\le i\le k+1)$, $\hat{\tilde{X}}_i$ pedig azt jelenti, hogy $\tilde{X}_i$ törlendő.

(2) Kijelölve egy $\mathscr{H}$: $TM\times_M TM \to TTM$ horizontális leképezést, létezik egy és csak egy olyan d^h: $\mathscr{A}(\tau)\to\mathscr{A}(\tau)$ elsőfokú gradált derivació, amelyre

$$\begin{cases} d^h f(\tilde{X}) := df(\mathscr{H}\tilde{X}) = (\mathscr{H}\tilde{X})f\,; & \text{ha } f\in C^\infty(TM) \quad (\tilde{X}\in\mathfrak{X}(\tau))\,, \\ d^h\hat{\alpha} := \widehat{d\alpha}\,, & \text{ha } \alpha\in\mathscr{A}_1(M)\,. \end{cases}$$

A d^h operátort $\mathscr{A}(\tau)$ Grassmann-algebra ($\mathscr{H}$ horizontális leképezéshez tartozó) *horizontális külső deriváltjá*nak mondjuk.

Az (1)-beli megállapodások megtartása mellett d^h hatását tetszőleges $\tilde{\alpha}\in\mathscr{A}^k(\tau)$ k-formán a

(6.1.2) $$d^h\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1,\dots,\tilde{X}_k)=\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}(\mathscr{H}\tilde{X}_i)\tilde{\alpha}(\tilde{X}_1,\dots,\hat{\tilde{X}}_i,\dots,\tilde{X}_{k+1})+$$

$$\sum_{i\le i<j\le k+1}(-1)^{i+j}\tilde{\alpha}(\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{X}_i,\mathscr{H}\tilde{X}_j],\tilde{X}_1,\dots,\hat{\tilde{X}}_i,\dots,\hat{\tilde{X}}_j,\dots,\tilde{X}_{k+1})$$

formula adja.

A *bizonyítás*t illetően ld. [13] p.1305 és pp. 1308-1309.

6.2. Tétel és definíció. Legyen (M,g) általánosított Finsler-sokaság, ellátva egy $\mathscr{H}$: $TM\times_M TM\to TTM$ horizontális leképezéssel. Tegyük föl, hogy g pozitív definit, s legyen $(\tilde{E}_i)_{i=1}^n$ egy $\mathscr{V}\subset TM$ nyílt halmazon értelmezett τ-menti vektormezők alkotta ortonormált család:

$$\tilde{E}_i:\ v\in\mathscr{V}\mapsto \tilde{E}_i(v)\in T_{\tau(v)}M\,,$$

$$g(\tilde{E}_i,\tilde{E}_j)=\delta_{ij} \qquad (1\le i,j\le n)\,.$$

Jelentse $(\tilde{\Theta}^i)_{i=1}^n$ az $(\tilde{E}_i)_{i=1}^n$ ortonormált n-élmezőhöz duális 1-forma családot:

$$\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_j)=\delta^i_j\ ; \qquad 1\le i,j\le n\,.$$

Jelölje végül $\mathbf{T}$ a $\mathscr{H}$ horizontális leképezés torzióját, s értelmezzük a $\tilde{\vartheta}^i$ $\mathscr{V}$ fölötti, τ-menti 2-formákat a

$$\mathbf{T}(\tilde{X},\tilde{Y})=\tilde{\vartheta}^i(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{E}_i$$

formula segítségével (követve – most és a korábbiakban is – az összegzési megállapodást). Egyértelműen létezik a $\mathscr{V}\subset TM$ nyílt halmazon definiált elsőfokú differenciálformák olyan $(\tilde{\omega}^i_j)_{1\le i,j\le n}$ családja, hogy teljesülnek a következők:

(6.2.1) $$(\tilde{\omega}^i_j)=-(\tilde{\omega}^j_i) \quad \text{(ferdeszimmetria)}\ ;$$

(6.2.2) $$d^v\tilde{\Theta}^i=-(\tilde{\omega}^i_j\circ\mathbf{i})\wedge\tilde{\Theta}^j \qquad (1\le i\le n)\ ;$$

$$(6.2.3)\qquad d^h\tilde\Theta^i = -(\tilde\omega^i_j\circ\mathcal{H})\wedge\tilde\Theta^j - \tilde\vartheta^i \qquad (1\le i\le n)\ .$$

Az $\tilde\omega^i_j$ 1-formákat (az alapulvett n-élmezőköz tartozó) *konnexióformák*nak nevezzük, a (6.2.2-3) relációkat pedig az *első struktúra-egyenletek*ként említjük.

Bizonyítás. (1) Jegyezzük meg először, hogy tetszőleges

$$\tilde X:\ v\in\mathcal{V}\mapsto \tilde X(v)\in T_{\tau(v)}M$$

$\mathcal{V}$–n értelmezett, τ-menti vektormező egyértelműen előállítható az

$$(6.2.4)\qquad \tilde X = \tilde\Theta^i(\tilde X)\tilde E_i$$

alakban. – Valóban, mivel $(\tilde E_i)_{i=1}^n$ bázisa $\mathfrak{X}(\tau)$-nak $\mathcal{V}$ fölött, egyértelműen léteznek olyan $\tilde X^j\in C^\infty(TM)$ $(1\le j\le n)$ függvények, hogy $\tilde X=\tilde X^j\tilde E_j$. Így

$$\tilde\Theta^i(\tilde X)=\tilde\Theta^i(\tilde X^j\tilde E_j)=\tilde X^j\tilde\Theta^i(\tilde E_j)=\tilde X^j\delta^i_j=\tilde X^i\ ,$$

ami igazolja észrevételünket.

(2) Legyen $(D,\mathcal{H})$ az (M,g) általánosított Finsler-sokaság $\mathcal{H}$–hoz tartozó kanonikus konnexiója! Értelmezzük az $\tilde\omega^i_j$ $(1\le i,j\le n)$ 1-formákat az

$$(6.2.5)\qquad \tilde\omega^i_j(\xi):=\tilde\Theta^i(D_\xi\tilde E_j)\ ,\qquad \xi\in\mathfrak{X}(\mathcal{V})$$

előírással! Megmutatjuk, hogy az így definiált $(\tilde\omega^i_j)$ mátrix *ferdeszimmetrikus*. - Tekintettel arra, hogy $g(\tilde E_i,\tilde E_j)=\delta_{ij}$, tetszőleges $\xi\in\mathfrak{X}(\mathcal{V})$ esetén azt kapjuk, hogy

$$0=\xi g(\tilde E_i,\tilde E_j)=(D_\xi g)(\tilde E_i,\tilde E_j)+g(D_\xi\tilde E_i,\tilde E_j)+g(\tilde E_i,D_\xi\tilde E_j)\overset{D\text{ metrikus}}{=}$$

$$g(D_\xi\tilde E_i,\tilde E_j)+g(\tilde E_i,D_\xi\tilde E_j)\overset{(6.2.4-5)}{=}g(\tilde\omega^k_i(\xi)\tilde E_k,\tilde E_j)+g(\tilde E_i,\tilde\omega^k_j(\xi)\tilde E_k)=$$

$$\tilde\omega^k_i(\xi)g(\tilde E_k,\tilde E_j)+\tilde\omega^k_j(\xi)g(\tilde E_i,\tilde E_k)=\tilde\omega^k_i(\xi)\delta_{kj}+\tilde\omega^k_j(\xi)\delta_{ik}=\tilde\omega^j_i(\xi)+\tilde\omega^i_j(\xi)\ ,$$

amiből $\tilde\omega^j_i=-\tilde\omega^i_j$ $(1\le i,j\le n)$ következik.

(3) Kiszámítjuk a $\tilde\Theta^i$ 1-formák vertikális külső deriváltját.

Tetszőleges $k,l\in\{1,...,n\}$ esetén

$$d^v\tilde\Theta^i(\tilde E_k,\tilde E_l)\overset{(6.1.1)}{=}(\mathbf{i}\tilde E_k)\tilde\Theta^i(\tilde E_l)-(\mathbf{i}\tilde E_l)\tilde\Theta^i(\tilde E_k)-\tilde\Theta^i(\mathcal{V}[\mathbf{i}\tilde E_k,\mathbf{i}\tilde E_l])=-\tilde\Theta^i(\mathcal{V}[\mathbf{i}\tilde E_k,\mathbf{i}\tilde E_l])\ ;$$

ezáltal a $d^v\tilde\Theta^i$ τ-menti 2-formák egyértelműen meghatározottak. Másrészt

$$-(\tilde\omega^i_j\circ\mathbf{i}\wedge\tilde\Theta^j)(\tilde E_k,\tilde E_l)=-\tilde\omega^i_j(\mathbf{i}\tilde E_k)\tilde\Theta^j(\tilde E_l)+\tilde\omega^i_j(\mathbf{i}\tilde E_l)\tilde\Theta^j(\tilde E_k)=$$

$$\tilde\omega^i_k(\mathbf{i}\tilde E_l)-\tilde\omega^i_l(\mathbf{i}\tilde E_k)\overset{(6.2.5)}{=}\tilde\Theta^i(D_{\mathbf{i}\tilde E_l}\tilde E_k)-\tilde\Theta^i(D_{\mathbf{i}\tilde E_k}\tilde E_l)=-\tilde\Theta^i(D_{\mathbf{i}\tilde E_k}\tilde E_l-D_{\mathbf{i}\tilde E_l}\tilde E_k)=$$

$$-\tilde\Theta^i(\mathcal{V}[\mathbf{i}\tilde E_k,\mathbf{i}\tilde E_l])\ ,$$

fölhasználva az utolsó lépésben $(D,\mathcal{H})$ v-vertikális torziójának eltűnését. Összevetve a kapott eredményeket, a (6.2.2) struktúra-egyenlethez jutunk.

(4) Az iméntivel analóg módon eljárva, levezetjük a (6.2.3) struktúra-egyenleteket. – Legyen $i,k,l \in \{1,...,n\}$ tetszőleges. Egyrészt

$$d^h\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l) \overset{(6.1.2)}{=} (\mathscr{H}\tilde{E}_k)\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_l)-(\mathscr{H}\tilde{E}_l)\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_k)-\tilde{\Theta}^i(\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{E}_k,\mathscr{H}\tilde{E}_l])$$

$$=-\tilde{\Theta}^i(\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{E}_k,\mathscr{H}\tilde{E}_l])\ ;$$

másrészt, a most kapott eredmény figyelembevételével,

$$-(\tilde{\omega}^i_j\circ\mathscr{H}\wedge\tilde{\Theta}^j)(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l)=-\tilde{\omega}^i_j(\mathscr{H}\tilde{E}_k)\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_l)+\tilde{\omega}^i_j(\mathscr{H}\tilde{E}_l)\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_k)=$$

$$\tilde{\omega}^i_k(\mathscr{H}\tilde{E}_l)-\tilde{\omega}^i_l(\mathscr{H}\tilde{E}_k) \overset{(6.2.5)}{=} -\tilde{\Theta}^i(D_{\mathscr{H}\tilde{E}_k}\tilde{E}_l-D_{\mathscr{H}\tilde{E}_l}\tilde{E}_k) \overset{(4.2.3)}{=}$$

$$-\tilde{\Theta}^i(\mathscr{T}(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l)+\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{E}_k,\mathscr{H}\tilde{E}_l]) \overset{5.4.}{=} -\tilde{\Theta}^i(\mathbf{T}(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l))-\tilde{\Theta}^i(\mathbf{j}[\mathscr{H}\tilde{E}_k,\mathscr{H}\tilde{E}_l])=$$

$$-\tilde{\Theta}^i(\tilde{\vartheta}^j(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l)\tilde{E}_j)+d^h\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l)=(d^h\tilde{\Theta}^i-\tilde{\vartheta}^i)(\tilde{E}_k,\tilde{E}_l)\ ,$$

következésképpen $d^h\tilde{\Theta}^i=-(\tilde{\omega}^i_j\circ\mathscr{H})\wedge\tilde{\Theta}^j-\tilde{\vartheta}^i$, amint állítottuk.

(5) Igazoljuk az $\tilde{\omega}^i_j$ konnexióformák *egyértelműség*ét. Legyen $i,j,k \in \{1,...,n\}$ tetszőleges. (6.2.2) és a (3)-ban látottak szerint

$$d^v\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)=\tilde{\omega}^i_j(\mathbf{i}\tilde{E}_k)-\tilde{\omega}^i_k(\mathbf{i}\tilde{E}_j)\ ,$$

$$d^v\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_k,\tilde{E}_i)=\tilde{\omega}^j_k(\mathbf{i}\tilde{E}_i)+\tilde{\omega}^i_j(\mathbf{i}\tilde{E}_k)\ ,$$

$$d^v\tilde{\Theta}^k(\tilde{E}_i,\tilde{E}_j)=\tilde{\omega}^k_i(\mathbf{i}\tilde{E}_j)-\tilde{\omega}^k_j(\mathbf{i}\tilde{E}_i)\ .$$

Az első két reláció összegéből kivonva a harmadikat, s fölhasználva a konnexióformák mátrixának ferdeszimmetriáját, azt kapjuk, hogy

$$\tilde{\omega}^i_j(\mathbf{i}\tilde{E}_k)=\frac{1}{2}(d^v\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)+d^v\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_k,\tilde{E}_i)-d^v\tilde{\Theta}^k(\tilde{E}_i,\tilde{E}_j))\ ;$$

ez igazolja, hogy az $\tilde{\omega}^i_j$ 1-formák hatása a vertikális vektormezőkön egyértelműen meghatározott. Hasonló módon

$$d^h\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)=\tilde{\omega}^i_j(\mathscr{H}\tilde{E}_k)-\tilde{\omega}^i_k(\mathscr{H}\tilde{E}_j)-\tilde{\vartheta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)\ ,$$

$$d^h\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)=\tilde{\omega}^j_k(\mathscr{H}\tilde{E}_i)+\tilde{\omega}^i_j(\mathscr{H}\tilde{E}_k)-\tilde{\vartheta}^j(\tilde{E}_k,\tilde{E}_i)\ ,$$

$$d^h\tilde{\Theta}^k(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)=\tilde{\omega}^k_i(\mathscr{H}\tilde{E}_j)-\tilde{\omega}^k_j(\mathscr{H}\tilde{E}_i)-\tilde{\vartheta}^k(\tilde{E}_i,\tilde{E}_j)\ .$$

Kivonva az első két relációból a harmadikat, most azt kapjuk, hogy

$$\tilde{\omega}^i_j(\mathscr{H}\tilde{E}_k)=\frac{1}{2}(d^h\tilde{\Theta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)+d^h\tilde{\Theta}^j(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)-d^h\tilde{\Theta}^k(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k))$$

$$-\frac{1}{2}(\tilde{\vartheta}^i(\tilde{E}_j,\tilde{E}_k)+\tilde{\vartheta}^j(\tilde{E}_k,\tilde{E}_i)-\tilde{\vartheta}^k(\tilde{E}_i,\tilde{E}_j))\ ;$$

ez azt mutatja, hogy a $\tilde{\omega}^i_j$ 1-formák hatása a horizontális vektormezőkön is egyértelműen meghatározott. □

Megjegyzések. (1) Megtartva a *6.2.*-ben rögzített feltételeket és jelöléseket, tekintsük a D kovariáns deriválás R^D görbületi tenzorát, amelyet az

$$R^D(\xi,\eta)\tilde{Z} := D_\xi D_\eta \tilde{Z} - D_\xi D_\eta \tilde{Z} - D_{[\xi,\eta]}\tilde{Z} \qquad (\,\xi,\eta\in \mathfrak{X}(TM),\ \tilde{Z}\in \mathfrak{X}(\tau)\,)$$

formula definiál. Bevezetve az

$$R^D(\xi,\eta)\tilde{E}_j = \tilde{\Omega}^i_j(\xi,\eta)\tilde{E}_i$$

előírással a $\mathcal{V}\subset TM$ fölött értelmezett $\tilde{\Omega}^i_j$ $(1\le i,j\le n)$ 2-formákat, az ún. *görbületi formák*at, a Riemann-geometriából jól ismert módon (ld. pl. [12], Appendix B) nyerhetők az

$$\tilde{\Omega}^i_j = d\tilde{\omega}^i_j + \tilde{\omega}^i_k \wedge \tilde{\omega}^k_j \qquad (1\le i,j\le n)$$

ún. *második struktúra-egyenletek*, amelyeknek tehát sem a megfogalmazása, sem a levezetése nem igényel új gondolatot.

(2) A kapott struktúra-egyenletek változatlan formában érvényesek akkor is, ha g konstans indexű pszeudoriemann-metrika $\tau^*\tau$-n, csupán a ferdeszimmetriát kifejező (6.2.1) relációk módosulnak a következőképpen:

$$\tilde{\omega}^i_j = -\varepsilon_i\varepsilon_j\tilde{\omega}^j_i \qquad (1\le i,j\le n)\,,$$

ahol $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ g szignatúrája, s most a kétszer szereplő indexekre nincs összegzés.

IRODALOM

[1] M. CRAMPIN, *On horizontal distributions on the tangent bundle of a differentiable manifold*, J. London Math. Soc. (2) **3** (1971), 178-182.

[2] M. CRAMPIN, *Connections of Berwald type*, Publ. Math. Debrecen **57** (2000), 455-473.

[3] M. DE LEÓN AND P. R. RODRIGUES, *Methods of Differential Geometry in Analytical Mechanics*, North-Holland, Amsterdam, 1989.

[4] W. GREUB, S. HALPERIN AND R. VANSTONE, *Connections, Curvature, and Cohomology*, Vol.II.; Academic Press, New York, 1973.

[5] J. GRIFONE, *Structure presque tangente et connexions I.*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** (1) (1972), 287-334.

[6] J. M. LEE, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, Berlin, 2003.

[7] E. MARTINEZ, J. F. CARIÑENA AND W. SARLET, *Derivations of differential forms along the tangent bundle projection*, Diff. Geom. Appl. **2** (1992), 17-43.

[8] R. MIRON, *Metrical Finsler structures and metrical Finsler connections*, J. Math. Kyoto Univ. **23** (1983), 219-224.

[9] T. MESTDAG, J. SZILASI AND V. TÓTH, *On the geometry of generalized metrics*, Publ. Math. Debrecen **62** (2003), 511-545.

[10] A. MOÓR, *Entwicklung einer Geometrie der allgemeinen metrischen Linienelementräume*, Acta Sci. Math. Szeged **17** (1956), 85-120.

[11] A. MOÓR, *Eine Verallgemeinerung der metrischen Übertragung in allgemeinen metrischen Räumen*, Publ. Math. Debrecen **10** (1963), 145-150.

[12] P. PETERSEN, *Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, 1998.

[13] J. SZILASI, *A Setting for Spray and Finsler Geometry*, in: Handbook of Finsler Geometry (P. L. Antonelli, ed.) Vol.2, 1185-1426. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2003.

[14] J. R. VANSTONE, *A generalization of Finsler Geometry*, Canad. J. Math. **14** (1962), 87-112.