DEBRECENI EGYETEM – TERMÉSZETTUDOMÁNYI KAR
INFORMATIKA INTÉZET

ÁTHATÁSSZERKESZTÉS

<u>Készítette:</u>
Pék Johanna
ábrázoló geometria – matematika

<u>Témavezető:</u>
Papp Ildikó

Debrecen, 2004. május

… Ezúton szeretnék köszönetet mondani Papp Ildikónak a dolgozat elkészítésében nyújtott segítségéért, tanácsaiért, ötleteiért, türelméért …

TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

Az ábrázoló geometria egyik legnagyobb területe a különféle felületek és testek áthatásának vizsgálata. Az áthatási görbe és a görbét származtató felületek elemzése a konstruktív geometria tárgykörébe tartozik.

A műszaki gyakorlati életben is igen fontos szerepet kap a témakör – elég csupán arra gondolni, hogy a mindennapok során igen sok áthatással keletkező felülettel találkozunk.

A dolgozat célja az áthatások rendszerezése volt. Olyan összefoglaló jellegű tanulmány, melyben mind a síklapú-, mind pedig a görbelapú felületek nagyító alá kerülnek. Igyekeztünk rávilágítani a közös elvekre, az eljárások sokszínűségére, az ábrázolás során adódó nehézségek feloldására.

Ennek tükrében a dolgozat három főbb szakaszból áll:

Az első fejezetben azokkal a felületekkel ismerkedünk meg, melyek az áthatás során szóba kerülhetnek. A mindenkor érvényes állítások és osztályozás mellett részletesebben tárgyaljuk a közismert felületeket – előtérbe helyezve az áthatáshoz szükséges tulajdonságokat.

A második fejezet témája az áthatások szerkesztése. Ezt a szakaszt két főbb részre osztottuk: az első részben az általános elméletekkel ismerkedünk meg és végigtárgyaljuk a klasszikus módszereket. A második részben megpróbáltunk minél több példát hozni a módszerekre, a speciális vagy éppen teljesen általános áthatásokra, különleges tulajdonságú pontokra, egyenesekre, síkokra.

A harmadik fejezet a didaktika tárgykörébe tartozik. A középiskolai ábrázoló geometria oktatási nehézségeit, eljárásait taglalja. Szó esik a forgásfelületek tanításáról éppúgy, mint azok áthatásának tanításáról. A vizsgálódást két ismert tankönyv rövid elemzése segíti.

A szakdolgozatot egyúttal az ábrázoló geometria szakos hallgatóknak is ajánljuk. Reméljük, hogy hasznosnak tartják majd azon hallgatók, akik most ismerkednek ezzel a tudományterülettel éppúgy, mint azok, akik a már megszerzett tudásukat szeretnék rendszerezni.

SÍKLAPÚ ÉS GÖRBELAPÚ FELÜLETEK

Ebben a fejezetben megismerkedünk azon felületekkel, illetve testekkel, melyeket az áthatások során használunk. Az első részben egy általánosabb ismertetést és osztályozást adunk, a másodikban pedig a legfontosabb felületekkel foglalkozunk részletesebben.

A FELÜLETEKRŐL

Felületek származtatása

Ha egy görbe vonal, az *alkotó* – esetleg alakját és nagyságát folytonosan változtatva – a térben folytonosan mozog, ennek minden pontja egy vonalat ír le; e vonalak pontjainak összessége *felület*et alkot. A görbe vonal lehet síkbeli (például egyenes, kör, hiperbola vagy tetszőleges síkbeli vonal), de akár térbeli is (például csavarvonal). Legegyszerűbb felület a síklap, az ettől eltérő felületeket *görbe* felületeknek nevezzük.

Ha egy fent definiált felület úgy keletkezik, hogy az alkotó mozgása során ugyanazon a helyen ismételve nem halad át és valamennyi pontja csupa különböző pontból álló vonalat ír le, *elemi felület* keletkezik.

A mozgó vonaldarab végpontjainak különböző helyzetei és az egyes pontok által leírt vonalak végpontjai az elemi felület *határpontjai*.

Felületek analitikus jellemzése

A felület általánosabb megfogalmazásban $\mathbb{R}^3$ tér kétdimenziós részsokasága.

Ha a térbeli felület pontjainak halmaza kielégíti az $F(x,y,z)=0$ egyenletet, akkor azt a *felület egyenleté*nek nevezzük. A harmadik koordinátára vonatkozóan az egyenlet $z=F^*(x,y)$ alakot ölti.

A felület pontjaira egyértelműen megadható egy u és v paraméterektől függő paraméteres egyenletrendszer, melyet *Gauss-féle paraméteres előállítás*nak nevezünk:

$$x=f(u,v) \qquad y=g(u,v) \qquad z=h(u,v).$$

Ha az egyik paramétert rögzítjük, akkor a felület pontjai a továbbiakban csak a másik paramétertől függenek. Így egy térbeli görbét kapunk, mely a felületen fekszik – az ilyen görbéket nevezzük *paramétervonalak*nak. A felület paramétervonalai két osztályba sorolhatóak attól függően, hogy melyik paramétert rögzítettük.

Létezik még ún. *Euler-Monge – féle paraméterezés* is. Ekkor a fenti egyenletrendszer az alábbi alakú:

$$x=u \qquad y=v \qquad z=m(u,v).$$

Ez utóbbi adja a leginkább szemléletes képet, ugyanis az m-függvény – az $\mathbb{R}^3$ szokásos koordinátarendszerét tekintve – az $[x,y]$-koordinátasík pontjaihoz olyan pontot rendel hozzá, melynek első két koordinátája a ponttal megegyező, míg a képpont harmadik koordinátája már a felületbe „viszi” a pontot.

Algebrai felületek és algebrai térgörbék

Algebrai felületek

Ha valamely felület egy derékszögű koordinátarendszerre vonatkozóan algebrai egyenlettel ábrázolható, akkor a felület *algebrai felület*. Egy algebrai felület *n-edrendű*, ha egyenlete n-edfokú, ellenkező esetben a felület *transzcendens*.

Az n-edrendű felület bármely síkmetszete n-edrendű síkgörbe. Egy n-edrendű felület egyenessel való döfése során n darab metszéspont keletkezik. Az n darab pont tartalmazza a képzetes és összeeső pontokat is.

Egy n-edrendű felület széteshet alacsonyabb rendű felületekre. Az alacsonyabb rendű felületek rendszámának összege a felület eredeti rendszámával megegyező kell, hogy legyen. A síkmetszetre és egyenessel való döfésre vonatkozó állítások ekkor is teljesülnek.

A legegyszerűbb felületek azok, melyek elsőfokú egyenletekkel jellemezhetőek. Ezek a felületek a síkok.

Algebrai térgörbék

Egy térgörbe *algebrai*, ha két algebrai felületnek teljes áthatásából vagy a teljes áthatás egy részeként adódik. A térgörbe rendjét egy tetszőleges síkkal való metszéspontjainak száma adja meg. Ha egy térgörbe nem algebrai, akkor *transzcendens*.

Ha egy görbe egy p-ed és egy q-adrendű felület teljes áthatásából származik, akkor a görbét a tér bármely síkja $n=p\cdot q$ pontban metszi.

Továbbá egy n-edrendű algebrai görbe az m-edrendű algebrai felületet $m\cdot n$ pontban metszi.

<u>Az algebrai térgörbék vetülete:</u> Algebrai térgörbe vetületének rendszáma általában egyenlő az eredeti görbe rendszámával.

Ha a vetítősugarak mindegyikének csak egy közös pontja van a görbével, akkor az eredeti görbe és a vetület rendszáma megegyezik. (Ha a vetítősugarak közös pontja a görbének k-szoros pontja, akkor a vetület $(n\text{-}k)$-adrendű.)

Ha a vetítőhenger minden alkotója a térgörbét két pontban metszi, akkor minden pont kétszer számítandó – tehát *kettős vetület* keletkezik. Ezen görbe rendszáma általában az eredeti görbe rendszámának a fele. (Emiatt csak olyan görbének létezik kettős vetülete, melynek rendszáma páros szám.)

Az algebrai felületek és térgörbék tárgyalása az áthatások szempontjából nagyon lényeges. Ugyanis így analitikusan is ellenőrizhetővé válnak a szerkesztések. Például két másodrendű felület áthatása során negyedrendű térgörbét fogunk kapni, mely lehet valódi negyedrendű térgörbe, széteshet két másodrendű görbére, illetve egy harmadrendű térgörbére és egy egyenesre is.

Az áthatások konkrét tárgyalása során erre majd több példát is láthatunk.

<u>Felületek osztályozása</u>

A felületek osztályozása többféle szempont szerint lehetséges.

Leggyakrabban a felületeket aszerint osztályozzuk, hogy a leíró görbe segítségével hogyan keletkezett a felület.

Vizsgáljuk most meg ezt az osztályozást.

I. *A leíró görbe változatlan alakú és nagyságú.*

A) *Vonalfelületek* – A leíró görbe egyenes vonal.

a) *Síkbafejthető (developpábilis) felületek* – Olyan felületek, melyeket szakítás vagy ráncolás, valamint egyes részeik kitágítása vagy összezsugorítása nélkül úgy boríthatóak a síkra, hogy azt pontról pontra fedjék. (Ezen átalakítás során a felületi görbék ívhossza változatlan marad!)

1) *Kúpfelületek* – a leíró egyenes mozgása közben mindig egy fix ponton, a kúp csúcspontján halad át.

2) *Hengerfelületek* – az egyenes alkotók párhuzamosak egymással.

3) *Általános síkbafejthető felületek* – a leíró egyenes úgy mozog, hogy mindig valamely térgörbét érint.

b) *Torzfelületek* – A leíró egyenes mozgásának törvényét megállapíthatjuk azzal a követeléssel, hogy az egyenes alkotó minden helyzetében három megadott – vezérgörbéknek nevezett – görbét messen. A vezérgörbe lehet egyenes is, amely a végtelenben is lehet egy sík által adva (ezt iránysíknak nevezzük).

B) *Önmagukban eltolható felületek* – a leíró görbe tetszőleges.

a) *Hengerfelületek* – A leíró görbe egyenes vonalú haladó mozgást végez, így az egyes pontok egymással párhuzamos egyeneseket írnak le.

b) *Forgásfelületek* – A leíró görbe egy fix egyenes (a forgás tengelye) körül forog, azaz minden pontja egy-egy kört ír le, melynek síkja merőleges a tengelyre. Ezen köröket párhuzamos köröknek vagy *paralel kör*öknek nevezzük. A tengelyt tartalmazó síkok metszeteit pedig *meridián*oknak vagy meridiánmetszeteknek nevezzük.

c) *Csavarfelületek* – A leíró görbe csavarmozgást végez. A pontok csavarvonalakat írnak le, melyeknek közös a tengelyük és a menetmagasságuk.

C) *Azok a felületosztályok, amelyek valamely változatlan alakú és nagyságú görbének tetszőleges, eddig még nem tárgyalt mozgásából keletkeznek.* Ide tartoznak például a transzlációs felületek, melyek úgy keletkeznek, hogy a leíró görbe minden pontja egy-egy összeillő görbét ír le.

II. *A leíró görbe változatlan alakú, de változó nagyságú.* Ide sorolhatóak ismét a forgási felületek, illetve a másodrendű felületek.

III. *A leíró görbe alakját és nagyságát is változtatja.* Ebbe az osztályba tartozik az összes eddig nem említett felület.

FELÜLETEK AZ ÁTHATÁSI FELADATOK SZEMPONTJÁBÓL

Síklapú felületek

Síklapú felületek ábrázolásáról röviden

A síklapú felületek ábrázolása általában nem jelent különösebb problémát. Az alakzat kontúrjait mindig a „legszélső" alkotók adják. Ha a felületet/testet a vetítés irányával folyamatosan eldöfjük, akkor biztosan lesznek olyan döfések, melyeknél a testből csak egyetlen pontot tudtunk kimetszeni – azaz érintjük a felületet. Ezek az alkotók és pontok fogják megadni a felület kontúrját.

Síklapú felületek és testek

Sokszögek által határolt síkrészek összességét *poliéder*nek nevezzük, ha a határoló sokszögek mindegyik oldala mindenkor egy másik határoló sokszögnek is oldala. A sokszögek által határolt síkrészeket a poliéder lapjainak, két-két sokszög közös oldalát a poliéder éleinek, ezek végpontjait a poliéder csúcsainak nevezzük. A poliéder lapjairól feltételezzük, hogy a közös oldalakon kívül nem metszik egymást.

Az ún. *közönséges poliéder*ek még további két feltételnek tesznek eleget:

- Az összes csúcsot össze lehet kötni az élekből álló töröttvonallal, mely önmagát nem metszi, mégpedig úgy, hogy mindegyik csúcsot érintjük, éspedig mindegyiket csak egyszer.
- Ha ezen töröttvonal mentén felvágjuk a poliédert, akkor az egész felület egy síkba teríthető anélkül, hogy szükséges volna még egy fel nem vágott él mentén metszést eszközölni.

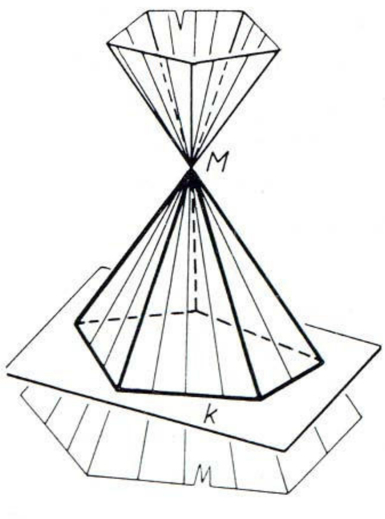
A „poliéder” kifejezést általában a zárt térrészt határoló síkok összességére értjük. Fontos ezért látni a különbséget a poliéder és az azt meghatározó síkok/egyenesek összessége között. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy míg például egy gúlát poliédernek nevezünk, addig a gúla származtatása során adódó egyenesek összességét gúlafelületnek hívjuk.

Jelenleg az áthatás szempontjából leglényegesebb síklapú alakzatokat tárgyaljuk részletesebben: a gúlákat és a hasábokat. A módszerek lehetőséget adnak majd általánosabb síklapú testek/felületek áthatásának vizsgálatára.

Gúlák

Egy sokszög pontjait egy a sokszög síkján kívül fekvő ponttal összekötő egyenesek együttvéve *végtelen gúlafelület*et alkotnak. A síkon kívül fekvő pont a gúla *csúcspont*ja, az összekötő egyenesek az *alkotók*. Ha egy alkotó a sokszög csúcsán halad át, akkor *él*nek nevezzük.

A sokszög síkja és a csúcs közé eső szakaszok összessége a sokszöggel együtt egy síklapú test, melyet *gúlá*nak (piramisnak) hívunk. A csúcs és a sokszög egy oldala által meghatározott poligon a gúla egy *oldal*a, az alapul vett sokszög pedig a gúla *alaplap*ja. A gúla alaplapja és a csúcs közötti távolság a gúla *magasságá*a. Az oldalak összessége a gúla *palást*ja.



Beszélhetünk úgynevezett *egyenes gúlá*ról. Ekkor a csúcs alapra vetett merőleges vetülete az alaplap középpontjába esik. Egy gúla *ferde*, ha nem egyenes gúla.

Ha egy gúla alaplapja háromszög, akkor a gúlát *tetraéder*nek nevezzük.

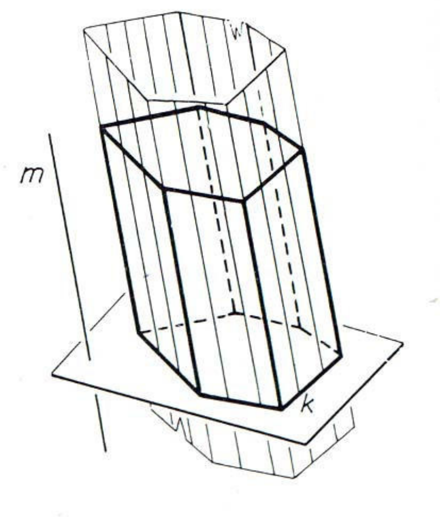
Egy gúla *szabályos*, ha az alaplapja szabályos sokszög és magasságának talppontja az alaplap középpontjába esik.

Speciális gúla a *szabályos tetraéder*. Ennek a poliédernek 4 oldala van, mindegyik egybevágó szabályos háromszög. Szemközti – kitérő – élei merőlegesek egymásra. A szabályos tetraéder az 5 szabályos test egyike. Érdekessége, hogy a lapok középpontjai egy újabb szabályos tetraédert határoznak meg.

Hasábok

Egy sokszög pontjain át egymással párhuzamosan húzott egyenesek, melyek nem fekszenek a sokszög síkjában, *végtelen hasábfelület*et alkotnak. Ezen párhuzamos egyenesek a hasáb *alkotói*. Ha egy alkotó a definiáló sokszög egyik csúcsán megy át, akkor *él*nek nevezzük.

Ha a végtelen hasábfelületet a sokszög síkjával párhuzamos síkkal elmetsszük és tekintjük az alkotókból így levágott szakaszok összességét a két párhuzamos síkbeli sokszöggel, *hasáb*hoz (prizmához) jutunk. A két párhuzamos sík által meghatározott sokszög a hasáb *alaplapjai*. A hasáb többi sokszögét – amelyeket egy-egy él és az alaplapok egy-egy oldala határol, *oldallapok*nak nevezzük. Az oldallapok összessége a hasáb *palást*ja.



Egy hasáb *egyenes*, ha az alkotók merőlegesek az alaplapokra. Ellenkező esetben *ferde hasáb*ról beszélünk.

Azon egyenes hasábokat, melyeknek alaplapjai szabályos sokszögek – *szabályos hasáb*nak (oszlopnak) nevezzük.

Speciális hasábok:

Kocka (hexaéder) – az 5 szabályos test közé tartozik. 6 darab, egybevágó négyzet határolja. Ez a legspeciálisabb hasáb. A lapok középpontjai egy oktaédert határoznak meg (és fordítva, az oktaéder lapközéppontjai egy kockát adnak).

Téglatest – speciális egyenes hasáb, melynek alaplapjai egybevágó téglalapok.

Paralelepipedon (egyenközű hatlap) – olyan speciális ferde hasáb, melynek alaplapja paralelogramma (és a definícióból következően oldalai is paralelogrammák).

Kúp- és hengerfelületek, másodrendű felületek és egyéb forgásfelületek

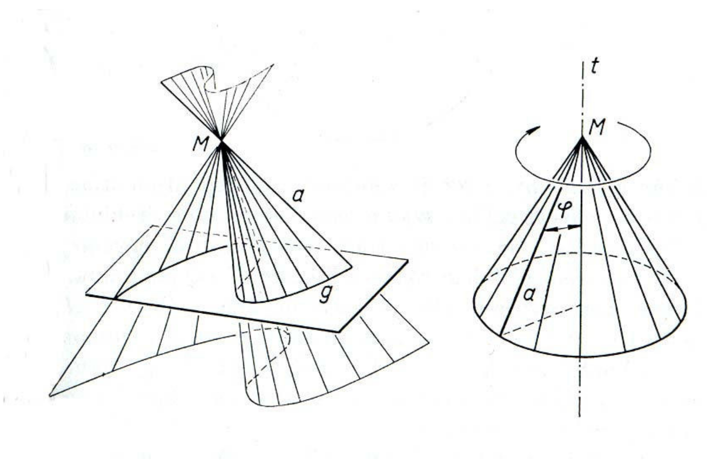
Görbelapú felületek ábrázolása

A görbelapú felületek és testek ábrázolásának egyetlen komolyabb nehézsége, hogy meghatározzuk a felület azon pontjait, melyek majd a vetítés során határául szolgálnak az alakzat képének. Vizsgáljuk meg a felületünket és keressük meg az összes olyan pontját, melyekben a vetítősugarak éppen érintőegyenesek. Ilyen pontok biztosan léteznek.

A vetítőegyenesek segítségével kapott érintési pontok összessége a felületen a *kontúrgörbe*, a vetítés során kapott alakzat a képsíkon pedig a *képkontúr*. A képkontúr tehát a kontúrgörbe képe. A képsíkon a képkontúr adja meg az alakzat képének a határát. Nyilvánvaló módon tehát különböző képsíkokhoz különböző kontúrgörbék tartoznak a felületen.

Kúpfelületek

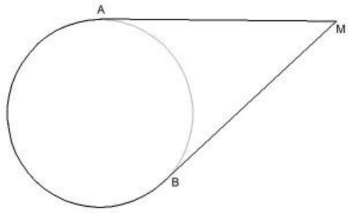
A korábban tárgyaltakkal összhangban *kúpfelület*et kapunk, ha egy egyenes vonal egy rögzített *M csúcspont*on keresztül halad, miközben állandóan metsz egy térgörbét – a *vezérgörbé*t. Ha a görbe síkgörbe, akkor további feltétel, hogy *M* ne legyen a görbe síkjában. Ha a vezérgörbe zárt, és tekintjük a csúcspont és a vezérgörbe közötti szakaszok unióját, akkor az így keletkezett felület/test *kúp*. Speciálisan tekintsük a zárt síkgörbék segítségével nyert kúpokat. Egy kúp *egyenes kúp*, ha a vezérgörbe középpontja éppen a csúcspont vezérgörbe síkjára eső merőleges vetülete. Ellenkező esetben *ferde kúp*ról beszélünk. Ha a vezérgörbe kör, akkor a kúp *egyenes*- illetve *ferde körkúp*.



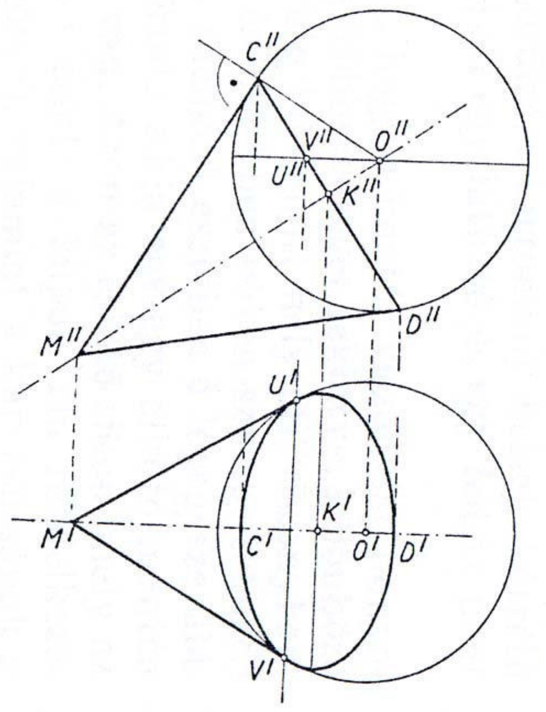
Kúp ábrázolása: A kúpfelület képkontúrját – a fentebb említett módon – azok a vetítési iránnyal párhuzamos egyenesek adják meg, melyek érintik a felületet. Rendkívül fontos annak tisztázása, hogy általában a képkontúr egy folytonos (legtöbb esetben zárt) görbe. Két eset lehetséges:

- a kúp kontúrgörbéjét kizárólag a vezérgörbe adja – így a képkontúr a vezérgörbe képe (ez a legkönnyebb eset – például egy egyenes körkúp vezérgörbéjének síkjára vetítés során ilyen helyzet adódik);
- a kúp kontúrgörbéjét két alkotó (és így a csúcspont) és a vezérgörbe egy folytonos része adja. Speciálisan két alkotóegyenes a kép, ha a kúp végtelen kúpfelület.

Tekintsük a következő példát: Egy ferde körkúp alaplapjának síkjával párhuzamos síkra vetített képét láthatjuk. Mivel a kúp magasságának talppontja kívül esik a kúp alaplapján, ezért a kúp csúcspontja biztosan eleme a kontúrgörbének. A kúp szerkezetéből adódóan a kúp két alkotója is része lesz a kontúrgörbének – a képkontúron két egyenes szakaszt kell majd látni. A kúp alapgörbéjének egy darabja is a kontúrgörbe része lesz. Ezen görbedarab megkeresése a legnagyobb kérdés a kúp ábrázolása során. Azt tudjuk, hogy a kúp két alkotója teljes egészében a kontúrgörbe része – emiatt az alappal közös pontja is. Ez a két pont lesz a határa a vezérgörbe azon folytonos szakaszának, amely majd a kontúrgörbe része lesz. Egyszerűen látható azonban, hogy egy kúpnak konvex a képkontúrja, így a kontúrgörbe utolsó része is könnyedén meghatározható.

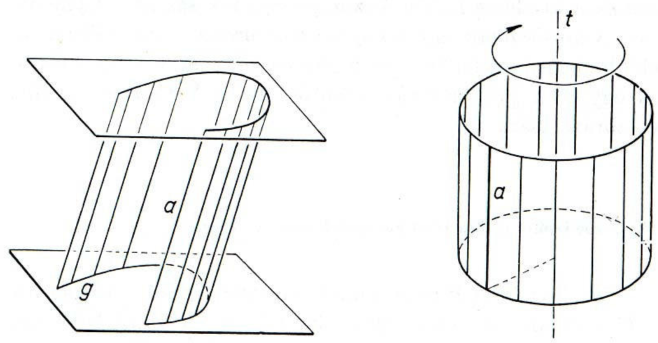


Ha a körkúp alapjával nem párhuzamos a képsík, akkor az alaplap képe ellipszis lesz. Ennek az ellipszisnek az ábrázolása nehézkessé válhat, mivel nem tudhatjuk azonnal, hogy a képellipszis mely pontjai tartoznak a kontúrgörbéhez. Ezért beilleszthetünk a forgáskúp alapkörébe egy ún. *érintő beírt gömb*öt. Ez a gömb a kúppal csak és kizárólag az alapkör mentén érintkezik. A gömb képe kör lesz, így az érintőgömböt egyszerűen megrajzolhatjuk. A továbbiakban a gömb segítségével gyorsan megtalálhatjuk az ellipszis kontúrpontjait.



Hengerfelületek

Hengerfelület akkor keletkezik, ha egy egyenes állandóan önmagával párhuzamosan mozog, miközben egy megadott *c* görbét állandóan érint. Az egyenesek a henger *alkotói*, a *c* görbe a *vezérgörbe*. Ha a vezérgörbe síkgörbe, akkor további kikötés, hogy az egyenes (illetve párhuzamos eltoltjai) ne legyenek benne a vezérgörbe síkjában. *Egyenes hengerfelület*ről beszélünk, ha a vezérgörbe síkgörbe és síkjára az alkotók merőlegesek. Ellenkező esetben *ferde hengerfelület*ről beszélünk. Ha a hengerfelületet elmetsszük egy vezérgörbe síkjával párhuzamos síkkal és tekintjük az alkotók két sík közé eső szakaszait a két síkmetszettel együtt – *henger*t kapunk. Ha a vezérgörbe kör, akkor *egyenes*- illetve *ferde körhenger* az eredmény.



<u>Henger ábrázolása:</u> A henger ábrázolása a kúphoz hasonló meggondolások alapján történik. A hengert felfoghatjuk olyan kúpnak, melynek csúcspontja végtelen távoli pont. Eredményként itt is kétféle képet kaphatunk:

- kizárólag a henger vezérgörbéje szolgáltatja a kontúrgörbét (például egyenes körhenger képe a vezérgörbe síkjában);
- a kontúrgörbét két alkotó és az alap(ok) része(i) szolgáltatják. Ha a henger végtelen, akkor két alkotó képe lesz a képkontúr (ezek nyilván egymással párhuzamos vonalak).

Másodrendű felületek

<u>*Másodrendű felületek általános jellemzése:*</u> *Másodrendű felület*eken olyan felületeket értünk, melyeknek bármely síkmetszete másodrendű görbe (beleértve az elfajult eseteket is – párhuzamos ill. metsző egyenespárokat). Ha a felület nem tartalmaz egyenest, akkor egy pontbeli érintősík a felülettel csak az érintési pontban találkozik – ha a felület tartalmaz teljes egyenest, akkor az érintősík egy teljes egyenesben (alkotóban) érint vagy belemetsz a felületbe. Ezek az érintősíkok kiemelkedő szerepet kapnak két másodrendű felület áthatása esetén, amikor az áthatási görbe pontjának érintőjét keressük. A másodrendű felületek szimmetrikus alakzatok.

Egy másodrendű felület adott iránnyal párhuzamos húrjainak felezőpontjai és az iránnyal párhuzamos érintőinek érintési pontjai egy síkban, az adott irányhoz konjugált *átmérősík*ban fekszenek. Két átmérősík metszetét *átmérő*nek mondjuk. Másodrendű felület átmérősíkjai egy ponton mennek át – a felület *középpont*ján. Ebből a szempontból a másodrendű felületeket két csoportra oszthatjuk – középponttal rendelkező másodrendű felületek és középponttal nem rendelkező másodrendű felületek.

Másodrendű felületek ábrázolása: Egy másodrendű felület kontúrgörbéje párhuzamos vetítés mellett általában kúpszelet lesz. Az ábrázolás során főként erre kell figyelni – a kontúrok megkeresése, illetve a felület ábrázolása a fentebb tárgyalt módszerekkel egyezik meg, de a forgásfelületek ábrázolása során még beszélünk erről.

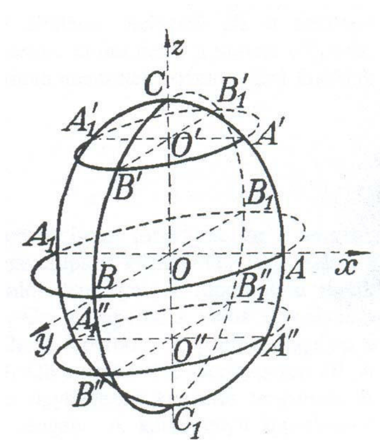
Másodrendű felületek osztályai:

A) Elfajuló másodrendű felületek – részletesebb osztályozás nélkül az alábbiak:

- *kúpfelületek*: valós- és képzetes kúpfelületek (ide tartoznak a hengerek is).
  A kúp- és hengerfelületek parabolikus pontokból állnak – ezért egy pontbeli érintősík egy teljes alkotóban érinti a felületet;
- *síkpárok*: valós- és képzetes metsző síkpár, valós egybeeső síkpár.

B) Nem elfajuló másodrendű felületek – csak a valós eseteket tárgyalva:

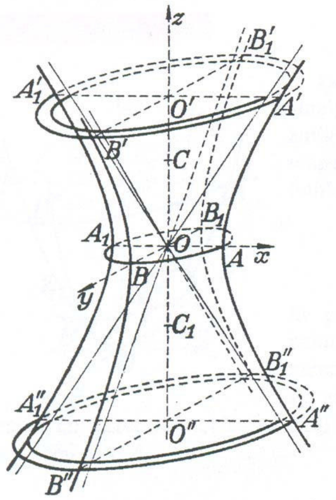
- *ellipszoid*: Legyen az ACA_1C_1 ellipszis $AA_1=2a$ és $CC_1=2c$ tengelye által megadva, és szerkesszünk a CC_1 tengelyre merőleges síkban egy másik ellipszist, amelynek tengelye AA_1, másik tengelye pedig, $BB_1=2b$ tetszőleges nagyságú. Ha mármost ez az ellipszis úgy mozog, hogy tengelyei párhuzamosak maradnak eredeti helyzetükhöz, és arányuk állandó, míg a változó tengely mindenkor egybeesik a CAC_1 ellipszis AA_1, $A'A'_1$, $A''A''_1$ … húrjaival, akkor ezen ellipszis mozgása által nyert felület az ellipszoid.



  Az ellipszoid három tengelye AA_1, BB_1 és CC_1.
  Mivel az ellipszoid csupa elliptikus pontból áll – egy pont érintősíkja csak abban az egy pontban érinti a felületet.
  Speciális ellipszoid a gömb.
  Egyenlete: $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.
- *egyköpenyű hiperboloid*: Tekintsünk egy hiperbolát, mint vezérgörbét. Valós tengelyének fele $OA=a$, a képzetes tengelyének fele $OC=c$. A képzetes

tengelyére merőleges síkban szerkesszünk ellipszist, melynek egyik tengelye a hiperbola valós tengelye. Ha ezen ellipszist épp oly módon mozgatjuk, mint az ellipszoidnál, akkor egyköpenyű hiperboloidot nyerünk. Ha a mozgó ellipszis síkja O-n megy át, akkor az ellipszis tengelyei a legkisebbek, ezt az ellipszist torokellipszisnek nevezzük. A felület három főtengelye: AA_1, BB_1 és CC_1.

Ha az előbb említett ellipszis kör, akkor egyköpenyű forgáshiperboloidot kapunk.

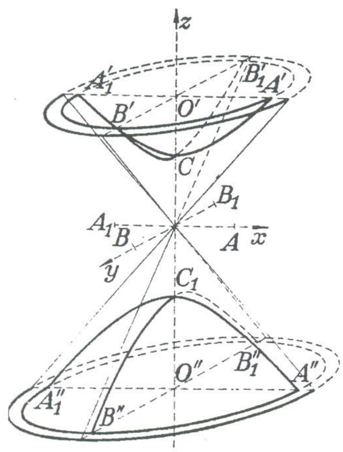


Az egyköpenyű hiperboloid mindkét irányban végtelen felület, továbbá hiperbolikus pontokból áll – egy pontbeli érintősík emiatt belemetsz a felületbe. Az egyköpenyű forgáshiperboloidot másképpen is elő lehet állítani: két kitérő egyenes segítségével. Az egyik kitérő egyenes mint tengely körül megforgatva a másik egyenest – megkapjuk az egyköpenyű forgáshiperboloidot. (További előállítások is lehetségesek.) Az egyköpenyű forgáshiperboloid vonalfelületnek is tekinthető – két alkotósereg vonul végig a felületen (ebből az egyik sereg a mozgó egyenes forgatásával kapott egyeneshalmaz – az azonos seregbeli elemek páronként kitérőek, az ellentétes seregbeli egyenesek páronként metszőek). Az érintősík pedig egy pontban két egymást metsző alkotót metsz ki.

A megforgatott hiperboloid aszimptotái a forgatás során az *aszimptotikus kúp*ot adják. Ennek érdekessége, hogy síkmetszet során a hiperboloidból és az aszimptotikus kúpból kimetszett másodrendű görbék hasonlóak egymáshoz.

Egyenlete:

$x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1.$



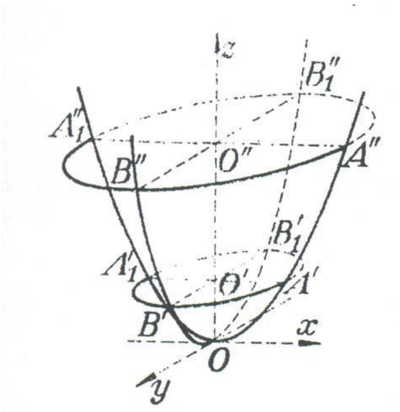
- <u>*kétköpenyű hiperboloid*</u>: A vezérgörbe ismét hiperbola, a tengely pedig – melyen a mozgó ellipszis középpontja végighalad, a hiperbola valós tengelye. A hiperboloid egyik tengelye $CC_1=2c$, a hiperbola valós tengelye, a másik $AA_1=2a$, a hiperbola képzetes tengelye, a harmadik $BB_1=2b$ ezen kettőre merőlegesen áll. AA_1, BB_1 a képzetes tengelyek, a CC_1 a valós tengely. Az előállítás miatt a felület két végtelenbe nyúló darabra szakad.

Ha az ellipszisünk speciálisan kör, akkor kétköpenyű forgáshiperboloidot kapunk. A kétköpenyű forgáshiperboloid nem vonalfelület! Az aszimptotikus kúpja ugyanúgy viselkedik, mint az egyköpenyű hiperboloidé.

Pontjai elliptikus pontok, emiatt egy pontbeli érintősík csak a pontban érinti a felületet.

Egyenlete: $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=-1$.

- <u>*elliptikus paraboloid*</u>: Ha a vezérgörbe parabola és a mozgó görbe ellipszis, melynek középpontja a parabola Oz tengelyén mozog, amíg az ellipszis síkja állandóan merőleges marad a tengelyre, akkor a kapott felület elliptikus paraboloid.

  Itt p és p' az xz és yz fősíkokban lévő parabolák fél paraméterét jelenti.

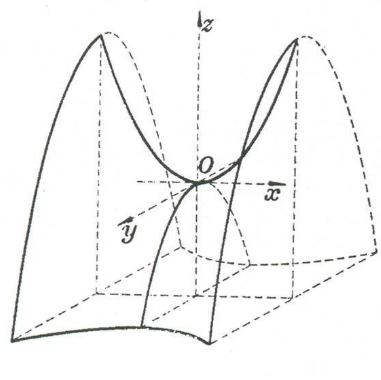
  Az elliptikus paraboloid egyik végén határtalan.

  Ha a mozgó görbe kör, akkor forgásfelületként előállítható a paraboloid – így kapjuk a forgási paraboloidot.

  Az elliptikus paraboloid pontjai elliptikus pontok, így egy pontbeli érintősík csak egy pontban érinti a felületet.

  Egyenlete: $x^2/2p+y^2/2p'=z$.

- <u>*hiperbolikus paraboloid*</u>: Vegyünk két parabolát, melyek síkja egymásra merőleges, tengelyük összeeső és irányuk ellentétes. A parabolák fél paraméterei p illetve p'. „Csúsztassuk” végig az egyik parabolát a csúcsánál fogva a másik parabolán. Az így nyert felület az ún. nyeregfelület vagy hiperbolikus paraboloid.

  Ez az egyetlen nem elfajuló másodrendű felület, melyet nem lehet forgatással előállítani. Éppen ezért síkmetszetei nem lehetnek zárt görbék.

További érdekessége, hogy – az egyköpenyű hiperboloidhoz hasonlóan – vonalfelület. Két kitérő egyenestől egyenlő távolságra lévő pontok halmazaként is definiálhatjuk. Alkotói két seregbe sorolhatóak. Az azonos seregbeli egyenesek páronként kitérőek, a különböző seregbeliek páronként metszőek.

A felület pontjai kizárólag hiperbolikus pontok – az érintősíkok két alkotót fognak kimetszeni a felületből.

Egyenlete: $x^2/2p–y^2/2p=z$.

Egyéb forgásfelületek

Az általános jellemzésben már szóba került, hogy felületeket kaphatunk egy tetszőleges görbe megforgatásával is. Legyen adott egy tengely és egy attól különböző tér- vagy síkgörbe. Ekkor a görbe forgatása során forgásfelületet nyerünk.

Ha a görbe n-edrendű, akkor a forgatásával nyert felület általában $2n$-edrendű. Speciálisan rendvesztés történik, ha például egy tengelyre merőleges egyenest forgatunk meg és így síkot kapunk; vagy ha a tengelyre illeszkedő középpontú kört és ekkor gömb keletkezik.

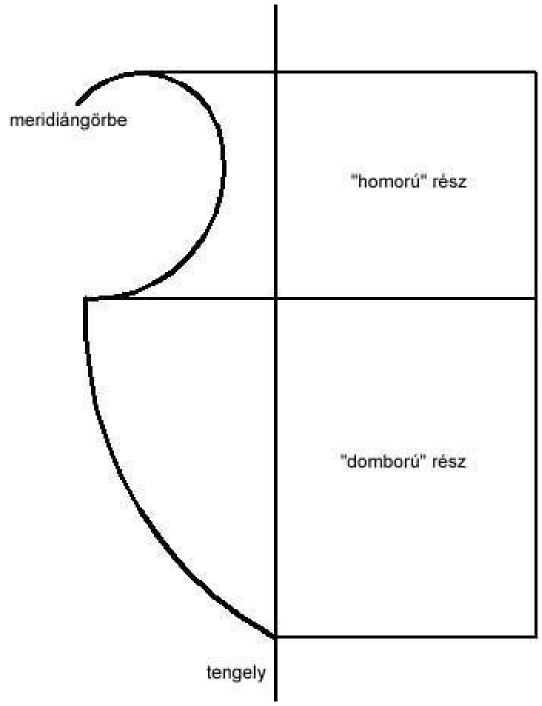
Egy-egy pont által leírt kör neve: *paralel kör*. A tengelyt tartalmazó síkkal való metszéskor pedig *meridiánmetszet*eket (meridiángörbéket) kapunk. Nyilvánvalóan minden ponton áthalad egy meridiángörbe és egy paralel kör. Ezek segítségével egy pontbeli érintősíkot általában úgy kapunk, hogy tekintjük a meridiángörbe és a paralel kör pontbeli érintőit (mint síkbeli alakzatok érintőit a saját síkjukban) és a két érintőegyenes által kifeszített síkot tekintjük a pontbeli érintősíknak.

A forgatás során a tengelyhez legközelebbi pont paralel körének neve *torokkör* (a legkisebb sugarú paralel kör), a legtávolabbi pont paralel körét pedig *ekvátorkör*nek (a legnagyobb sugarú paralel kör) nevezzük.

Az érintősíkok itt is különböző osztályokba sorolhatóak aszerint, hogy a felület pontja elliptikus, parabolikus vagy hiperbolikus. Tekintsük a meridiángörbét – ekkor a rajta fekvő pontok három csoportba sorolhatóak:

- „domború” rész pontjai – az érintő egy pont egy kis környezetében a tengelyt és a meridiángörbét azonos félsíkba zárja. A megforgatás során ezen a részen elliptikus pontok keletkeznek.

- „homorú" rész pontjai – az érintő egy pont egy kis környezetében a tengelyt és a meridiángörbét különböző félsíkokba szeparálja. Forgatással a pontok a felület hiperbolikus pontjai lesznek.
- „elválasztó" pontok – a konvex és konkáv íveket választják el. Itt az érintőegyenes vagy nem egyértelmű (lásd ábra) vagy pedig inflexiós pont. Inflexiós pont esetében az érintő a pont egy kis környezetében magát a meridiángörbét választja ketté.



Az érintők a forgatás során *érintőkúp*ot adnak. Ha a tengellyel párhuzamos az érintő, akkor *érintőhenger*t. Előfordulhat az is, hogy ezen érintőkúp érintősíkká fajul (például a tórusz legfelső illetve legalsó paralel köreinél).

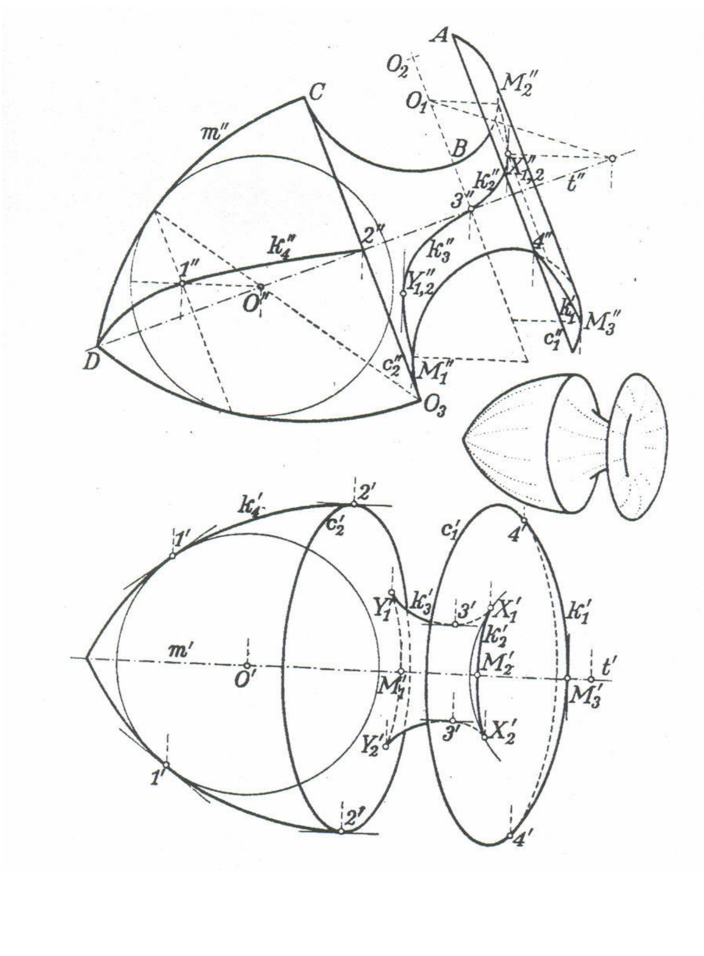
Ha meghatározzuk a meridiánmetszet egy pontjának a simulókörét (melynek középpontja a tengelyen lesz), akkor a forgatás után *érintőgömb*öt kapunk.

Az egyik legismertebb – fent nem említett – forgásfelület a *tórusz*. Ekkor a tengely körül egy kört forgatunk meg. A tórusz speciális tulajdonsága, hogy elliptikus, hiperbolikus és parabolikus pontok is vannak rajta.

Nyilvánvaló, hogy például a henger, a kúp, a gömb… a forgástestek csoportjába is beletartozik.

<u>*Forgásfelületek ábrázolása*:</u> Mivel tetszőleges görbét megforgathatunk, így az általános elveken kívül nem lehet speciális tulajdonságokat elmondani egy tetszőleges helyzetű forgásfelületre. Az ábrázolást egy általános forgástest esetén úgy könnyíthetjük, hogy a tengelyét speciális helyzetbe hozzuk.

Ha a forgásfelület tengelye párhuzamos valamely képsíkkal, akkor a felület egyik képe (azon kép, melyet a tengellyel párhuzamos síkon kapunk) egy meridiánmetszetet mutat. Az ábrán látható felület három körrészből áll (1. ív – *A*-tól *B*-ig; 2. ív – *B*-től *C*-ig; 3. ív – *C*-től *D*-ig) és ezek megforgatásával keletkezett a felület. A második kép a speciális helyzete miatt egyszerű, de az első kép ábrázolása nehézségekbe ütközik. A feladat az, hogy megkeressük a felületen azon pontok halmazát, melyek az első képkontúrt adják. Néhány pont az eddigi tanulmányokból biztosan és azonnal adódik. Így például a *D* pont biztosan rajta lesz az első kontúrgörbén – és a képe az első képkontúron. Az első kép kontúrja pontokból áll, melyekhez tartozó első vetítőegyenesek a felületet érintik. A *C* pont megforgatásával nyert kör egy szakaszban látszik. A kör ábrázolásáról tanultak szerint a szakasz felezőpontja adja majd meg a kör két szélső helyzetű pontját az első képen (a képellipszis nagytengelyét). *C* és *D* pontok közötti rész megrajzolását segédgömbök segíthetik. A képen az *1* ponthoz tartozó segédgömböt szerkesztettük meg először a második képen, azután az első képen – végül az első kép segítségével megkaptuk a második képen az első kontúrgörbe egy pontját. Mivel az *1* pontnak két képe is keletkezett – így a második kép az első kontúrgörbe kettős vetülete. Több pontot megszerkesztve természetesen pontosabban tudjuk megrajzolni a görbét.



A *C* és *B* illetve *B* és *A* pontok közötti rész az alábbiak szerint történik. Az általános helyzetű pontokat – akárcsak a *C* és *D* közötti esetben – párhuzamoskör-érintőgömb módszerrel szerkeszthetjük. A főmeridiángörbének M_1, M_2 és M_3 pontjai olyanok, hogy ott az érintők éppen első vetítőegyenesek (vagyis mindkét kontúrgörbén rajta vannak), ezek segítségünkre lesznek a kontúrgörbe megrajzolása során. Azok az első vetítőegyenesek, melyek a megrajzolás során szerepet játszanak általában olyanok, hogy a képeik a felületet érintik és az első kontúrgörbe második képét metszik. Léteznek olyan kivételes helyzetű pontok, melyekben az előbb említett metszés helyett érintés áll fenn. Az ábrán ilyen pontok az $X_{1,2}$ és $Y_{1,2}$. E pontok képei az első képkörrajz csúcspontjai, ezek a felületet a pontokon átmenő paralel kör mentén érintő gömb első képkörrajzán vannak. Ezen pontok választják el a görbe látható részeit a nem látható részektől.

A végeredmény nyilván nem szerkeszthető meg teljes pontossággal, csak közelítőleg, hiszen véges sok pontot tudunk megszerkeszteni belőle. Az első kontúrgörbe második képe tehát: k_1”, k_2”, k_3” és k_4” görbék (nyilvánvalóan azért szakadt szét a görbe a második képen darabokra, mert különböző felületdarabok összeillesztésével keletkezett a felületünk).

Az ábrázolás további megkönnyítése érdekében azonban képsíktranszformációval a forgásfelület tengelyét vetítőegyenessel párhuzamos helyzetbe hozhatjuk. Így valamely képe a forgásfelületnek egy koncentrikus körsereg lesz (pontosabban a paralel körök képei egyik képen valódi nagyságban láthatóak). Ez a megoldás a szerkesztéseket lényegesen megkönnyítheti, bár szemléletesség szempontjából nem előnyös.

Az előbb tárgyalt példa azért is fontos, mert a felületábrázolás lényegét magában foglalta. A felhasznált elvek és módszerek természetesen bármilyen forgásfelületre alkalmazhatóak.

ÁTHATÁSSZERKESZTÉS

Az áthatások tanulmányozása során a gyakran vizsgált felületekre korlátozódunk. Síklapú felületek esetén a gúlákra és hasábokra; görbelapú felületek esetén a másodrendű felületekre és néhány fontosabb egyéb forgásfelületre (például tórusz).

Nem vizsgáljuk azokat a speciális eseteket sem, amikor az egyik felület sík. Bár ezek a feladatok is áthatásnak tekinthetőek – nem tárgyaljuk ebben a dolgozatban.

ÁTHATÁSOK ÁLTALÁNOS ELMÉLETEI

A különböző áthatásokhoz és módszerekhez tartozó példákat a következő részben láthatunk. Ebben a fejezetben csak általános eljárásokat és elveket fogalmazunk meg.

Síklapú felületek áthatása

Síklapú felületek vagy testek egymást általában térbeli zárt töröttvonalban metszik. A metszéspoligon állhat egy vagy több különálló részből; annak oldala mindig a két felület/poliéder egy-egy lapjának metszésvonala, szögpontja pedig az egyik felület/poliéder valamely élének a másik felület/poliéder valamely lapjával való döfése. Az áthatás megszerkesztésénél tehát az egyik felület/poliéder éleinek a másikkal, a másik éleinek az egyik felülettel/poliéderrel való metszéspontjait keressük, s ezeket megfelelő módon összekötjük.

A két alakzat közös része térfogattal rendelkező test. Felületek áthatása során előfordulhat, hogy ez a test a végtelenbe nyúlik (ha például a két felület tengelye párhuzamos). Az áthatás során kapott test élei az áthatási töröttvonalból és a testek éleinek szakaszdarabjaiból állnak.

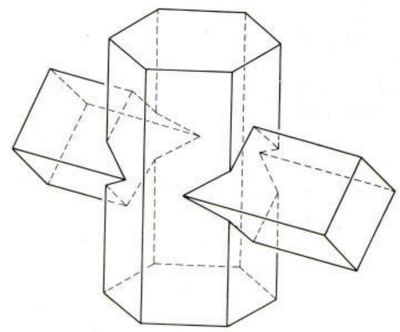
Az áthatásban nem biztos, hogy minden él vagy lap részt vesz. Továbbá nem nevezzük áthatásnak azokat az eseteket, amikor a két felület vagy poliéder egy élben vagy egy lapban érintkezik.

Mindezek figyelembevételével két fő csoportra oszthatjuk a síklapú testek áthatásának eseteit.

Áthatások típusai

*Két síklapú alakzat áthatás*a az alábbiak közül valamelyik:

a) *teljes áthatás*: Ebben az esetben az áthatási töröttvonal két zárt térbeli poligonból áll. Teljes áthatást kapunk, ha az egyik alakzat minden oldala metszi a másik alakzatot. Szemléletesen szólva az egyik alakzat a másikba „belefúródik”.



Példák: → → → 1., 2. PÉLDA.

Speciális esete a teljes áthatásnak, amikor az áthatási töröttvonal egyetlen zárt térbeli poligon. Néhány ilyen eset:

- Ha az egyik áthatásban szereplő alakzat olyan, hogy valamely oldalról nem végtelen felület (például gúlafelület egyik ága vagy véges hasáb) és(!) a véges része a másik felület/test belsejében helyezkedik el.
- Ha az alaplapok egy síkban vannak, és az egyik alaplap tartalmazza a másikat. Ebben az esetben áthatás csak akkor keletkezik, ha a kisebb alaplappal rendelkező alakzat magassága nagyobb, mint a másiké.
- Ha az alaplapok párhuzamos síkban vannak, teljes áthatás áll fenn, létezik áthatási töröttvonal, és az alaplapok nem vesznek részt az áthatásban („egymás felé fordulnak”).

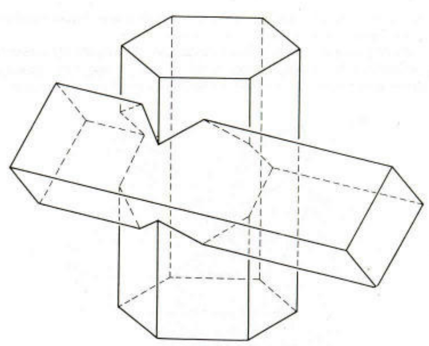
További speciális eset olyan áthatás, ahol két áthatási töröttvonal létezik, melyek két ponton átmetszik egymást – ezt az esetet a lengősíkos módszernél vizsgáljuk.

b) *bemetszés*: Bemetszéskor mindkét alakzaton vannak olyan alkotók és/vagy lapok, amelyek nem tartalmaznak áthatási pontokat.

Szemléletesen ez annyit tesz, hogy az egyik alakzat „belemar” a másikba. Ilyen esetben az áthatási töröttvonal egyetlen zárt térbeli sokszög lesz.

A bemetszés speciális eseteként említhető olyan áthatási töröttvonal, mely önmagát metszi („8”-as formája van). Ennek részletesebb tárgyalására a lengősíkos eljárásnál kerül sor.

Példák: → → → 3, 4. PÉLDA.

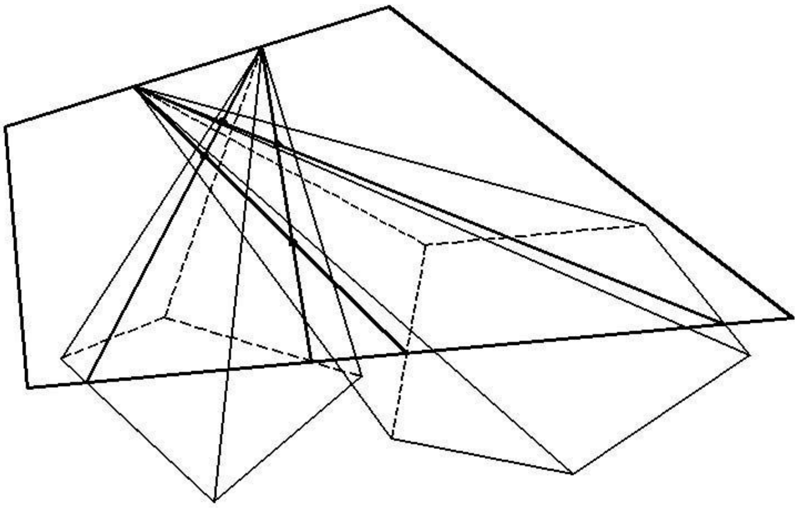


Lengősíkos eljárás

Gúlák és hasábok esetében az áthatás megszerkesztését nagyban megkönnyíti az ún. *lengősíkos eljárás*. Az eljárás ismertetése előtt fontos látni a gúlák és a hasábok közötti erőteljes kapcsolatot, miszerint egy hasáb speciális gúlának tekinthető – olyan gúla, melynek csúcsa végtelen távoli pont. A cél természetesen az, hogy minél kevesebb lépéssel és a lehető legkönnyebb módon tudjunk áthatási pontokat szerkeszteni.

A módszer lényege, hogy két gúla (speciálisan hasáb) csúcspontján át síkokat lengetünk. A két gúla csúcsa (hasáb esetén az alkotók egyenesállása) meghatároz egy egyenest. Ezen az egyenesen, mint tartóegyenesen át, veszünk egy síksort. Minden egyes lengősík 1 vagy 2 alkotót metsz ki egy gúlából. Ez azért van így, mert a sík áthalad a gúla csúcspontján. (Ez mindkét gúlára igaz.) Tehát gúlánként 1 vagy 2 alkotót kapunk, melyek közös síkban vannak.

Az alkotók metszéspontjai könnyen szerkeszthetők és biztosan áthatási pontok, mivel különböző gúlák alkotóinak metszéspontjait kapjuk (melyek egy síkban vannak).



Az áthatás során általában zárt töröttvonalat kapunk, ezért nem célszerű véletlenszerűen lengetni a síkokat. Mindig egy-egy alaplap csúcspontján (másképp fogalmazva: a gúlák egy-egy oldalélén) vezetjük azokat.

A gúlák és hasábok áthatása a gyakorlatban 3 alapesetre bontható:

1) *Gúla-gúla áthatása*: a lengősíkok tartóegyenese a két gúla csúcspontján halad át.

   Példák: → → → 1. PÉLDA.

2) *Gúla-hasáb áthatása*: a tartóegyenes a hasáb alkotóival párhuzamos és áthalad a gúla csúcspontján.

   Példák: → → → 2. PÉLDA.

3) *Hasáb-hasáb áthatása*: mindkét hasáb alkotójával párhuzamos síkot tolunk a térben.

   Példák: → → → 3. PÉLDA.

Mindhárom eset tehát ugyanazt az elvet követi. Például hasáb-hasáb áthatása esetén mivel mindkét csúcspont a végtelen távolban van, így az őket összekötő tartóegyenes is. Ez a véges részen azt jelenti, hogy a lengősíkok párhuzamosak.

A lengősíkos eljárás még azt is megmutatja, hogy az áthatásunk teljes vagy csak bemetszés történt. Vizsgáljuk meg az alábbi eseteket:

1) Ha létezik két olyan lengősík, amelyek az egyik gúlát/hasábot érintik, de a másikat abban a pillanatban nem érintik, és nem is metszik, akkor teljes áthatást kaptunk. Speciálisan, ha van két olyan sík, mely mindkét testet érinti, akkor az áthatási töröttvonal két olyan részre szakad, melyek két pontban (a síkok általi érintési pontokban) átmetszik egymást.

2) Ha létezik egy olyan lengősík, mely az egyik alakzatot érinti, de a másikkal nincs közös pontja, és nem találunk több ilyen síkot, akkor bemetszés történt (ekkor a másik alakzatnak is van egy ilyen típusú lengősíkja). Speciálisan, ha ez a sík a másik gúlát/hasábot is érinti, akkor az áthatási töröttvonal átmetszi önmagát (az érintési pontban). Ekkor a vonal egy „8”-ashoz hasonló alakot ölt.

A lengősíkos eljárás bármilyen helyzetű gúlákra és hasábokra alkalmazható – nem függ attól, hogy az objektumok alapjai közös síkban vannak-e vagy sem.

Az áthatás ábrázolása

Ha az áthatási pontokat helyesen megszerkesztettük 2 kérdés merül fel:

1) Hogyan kapjuk meg a pontokból a töröttvonalat?
2) Vannak-e speciális láthatósági kérdések és lehetőségek?

Elsősorban nézzük meg, hogy milyen módszer alapján köthetjük össze az áthatási pontokat, hogy a töröttvonalat vagy töröttvonalakat megkapjuk. A lengősíkok alapján tudjuk, hogy teljes áthatást vagy bemetszést kaptunk. Ennek megfelelően vizsgálódunk. Legbiztosabb eljárás az, hogyha az egyik gúlát/hasábot figyeljük, hogy hogyan helyezkednek el rajta az áthatási pontok. Kiválasztjuk az egyik élét és megszámoljuk, hogy hány darab áthatási pont van rajta. Ha nincs rajta pont, akkor továbbhaladunk például az óramutató járásával megegyezően (lényeg az, hogy fix körüljárást válasszunk és ne „csapongjunk”) a következő oldalt figyelve. Ha egy pont van rajta, akkor az vagy duplapont (teljes áthatás esetén) vagy pedig a bemetszés egyik „széle”. Ha két pont van, akkor azok a teljes áthatás egy-egy töröttvonalához tartoznak vagy pedig a bemetszés össze nem köthető pontjai. Kiválasztjuk az egyik pontot és valamely irányban továbblépve figyeljük az oldalt. Mindig „él-oldal-él-oldal-…” a körüljárás szabálya. Az oldalon szemmel tartjuk a metszéspontokat. Ha többet találunk, akkor kell megvizsgálni a másik objektumot. Ugyanis azok és csakis azok a pontok összeköthetőek, melyek mindkét testen a testre írható szakaszként előállíthatóak! Ennek alapján azt a pontot kötjük össze a már meglévő (jelen esetben élen tartózkodó) ponttal, amely a másik testen is azzal a ponttal szakaszt alkothat (vagyis ugyanazon lapon helyezkednek el, egy alakzaton). Az eljárást addig folytatjuk, míg az egyik alakzatot teljesen körbe nem jártuk (teljes áthatás esetén kétszer).

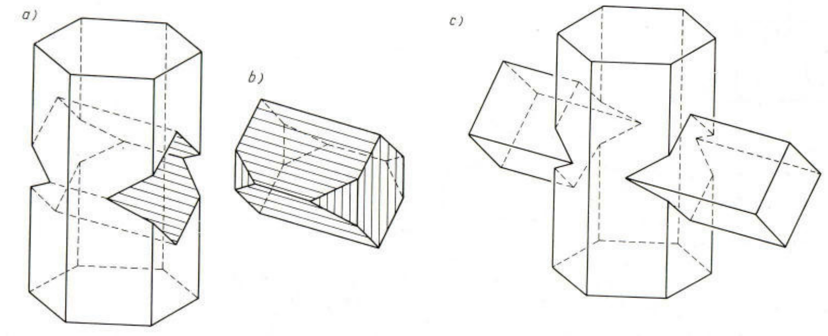
Láthatóság szempontjából a klasszikus fedőpontok módszerét kell követni.

A kapott áthatásunkat többféleképpen ábrázolhatjuk:

a) Az egyik testet eltávolítva a megmaradt test csonka változatát ábrázoljuk.

b) Csak az áthatás során kapott metszetet – mint testet – ábrázoljuk.

c) A két testet együttesen ábrázoljuk.



Másodrendű felületek áthatásáról általában

Két felület áthatási vonala a két felület közös pontjainak halmaza. Azt már korábban említettük, hogy két másodrendű felület áthatása során negyedrendű térgörbét kapunk. Az így kapott térgörbét *elsőfajú negyedrendű térgörbé*nek nevezzük (ha pedig a görbe nem állítható elő két másodrendű felület metszésvonalaként, akkor másodfajú negyedrendű térgörbének mondjuk).

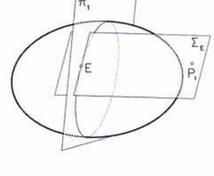
Ha az áthatás során zárt görbét/görbéket kapunk – értelmezhetjük az áthatási görbe és a felületek által határolt térrészt is. (Ez az ábrázolás során kaphat szerepet.)

Ahhoz, hogy meghatározhassuk az áthatás típusát (valódi negyedrendű térgörbét kapunk-e, esetleg szétesik két másodrendű görbére stb.), projektív geometriai oldalról kell megközelíteni a felületeket.

A két másodrendű felület egyértelműen meghatároz egy *másodrendű felületsor*t. Az áthatási görbét ekkor a *felületsor alapgörbéjé*nek nevezzük.

Igaz továbbá az a tétel is, hogy a tér egy általános helyzetű pontján pontosan egy eleme megy át az *A* és *B* másodrendű felületek által meghatározott felületsornak, azaz (az alapgörbe kivételével) egyrétűen kitöltik a teret.

Áthatás szempontjából az alábbi tételek érdekesek számunkra:



- Ha egy pont illeszkedik két másodrendű felületre, akkor illeszkedik a felületek által meghatározott felületsor minden elemére, tehát a másodrendű felületsor bármely két elemének ugyanaz a görbe lesz az áthatási görbéje.
- A projektív tér egy pontjának a felületsor egyes elemeire vonatkozó polársíkjai általában síksort alkotnak. A síksor sorozóegyenese nem más, mint a ponthoz konjugált egyenes a felületsor bármely elemére vonatkozólag.
- A másodrendű felületsorba tartozó másodrendű kúpok az alapgörbét kettősen vetítik.
- Ha egy pont polársíkja a felületsor bármely elemére nézve ugyanaz a sík, akkor a felületsor adott pontra illeszkedő eleme éppen egy másodrendű kúp.
  A lehetséges pontok a felületsort indukáló felületek közös polártetraéderének csúcspontjai. Ez a polártetraéder nemcsak az előbbi két felületnek, hanem a felületsor bármely két elemének is közös polártetraédere!

Az utolsó tétel azért különlegesen fontos, mert ha találunk a térben két ilyen tulajdonságú pontot, akkor *a másodrendű felületeink áthatása visszavezethető két kúp áthatására*!

Ezek meghatározásához elég a felületsor közös polártetraéderének két csúcspontját ismerni. Az eljárás a következő: Adottak *A* és *B* másodrendű felületek, melyek egy felületsort indukálnak. Legyen *P* egy tetszőleges pont, melyből indítunk három tetszőleges *g*, *i*, *j* egyenest. A *g*-re illeszkedő pontoknak az *A*-ra vesszük a polársíkjait, melyek egy *g*-hez projektív síksort alkotnak. Ugyanezt tesszük a *B*-re nézve is, így egy másik *g*-hez projektív síksort kapunk. A két síksor egymáshoz is projektív, ekkor az egymásnak megfeleltetett síkok metszési alakzata egy egyköpenyű hiperboloid. Ennek egy tetszőleges alkotója a *g* valamely pontjához mindkét felületre nézve konjugált egyenes. Ehhez hasonlóan az *i* és *j* egyenesekhez is tudunk rendelni egy-egy hiperbolikus hiperboloidot. A *P* pont a *g*, *i*, *j* egyenesek mindegyikén rajta volt, ezért a hozzá tartozó konjugált egyenes mindhárom hiperboloidon megtalálható. Ezért a három hiperboloidnak van egy közös alkotója. Ha a közös alkotókon kívül páronként tekintjük a hiperboloidokat, akkor van még egy-egy harmadrendű áthatási görbe (mivel két másodrendű felület áthatása negyedrendű térgörbe – itt egy egyenes és még egy harmadrendű térgörbe). A három harmadrendű görbének a közös pontja legyen *S* (nem mindig létezik). A *g* egyenes egy bizonyos *G* pontjához az *A* és *B* felületekre nézve konjugált egyenes át fog haladni az *S* ponton. Hasonlóan találhatunk egy *I* és *J* pontot az *i* és *j* egyeneseken. Ekkor a *G*, *I* és *J* pontok síkja az *S* polársíkja az *A* és *B* felületekre vonatkozóan. Általában négy, *S*-sel megegyező tulajdonságú pont található, melyek a közös polártetraéder csúcsait adják.

A polártetraéder csúcsaira a következő esetek állhatnak fenn:

- Minden csúcs valós, a belőlük kiinduló négy kúpra pedig fennáll a következő: vagy mind a négy valós, vagy kettő valós, kettő pedig képzetes. Ez utóbbi a széteső áthatást jelenti.
- Két csúcs valós, kettő képzetes, ekkor az áthatási görbének egyetlen ága van.
- Mind a négy csúcs képzetes (ez csak vonalfelületek esetén lehetséges), ekkor a metszetgörbe másodfajú negyedrendű térgörbe.

Az áthatási görbe esetei

Az előbbiekben láthattuk: a közös polártetraéder segítséget ad abban, hogy az áthatás során milyen görbét kapunk. A legnagyobb előnye az, hogy a másodrendű felületek áthatása során elég másodrendű kúpokat és hengereket vizsgálni.

Ha olyan kúpok és hengerek áthatását tekintjük, ahol a vezérgörbék algebrai görbék, akkor a felületek is olyan rendűek, mint a vezérgörbe. Így másodrendű felületek metszésével negyedrendű görbét kapunk. Negyedrendűnek nevezzük az olyan térgörbéket, melyeket síkkal metszve négy metszéspontot kapunk. Ezek a metszéspontok lehetnek párosával képzetesek és kettő, három vagy mind a négy metszéspont egybe is eshet.

Két kúp áthatásgörbéjének vannak véges pontjai és lehetnek további képzetes vagy végtelenben fekvő pontok.

Ha két kúpnak van végtelenben fekvő pontja, akkor az áthatásgörbének végtelen ága keletkezik. Ez azt jelenti, hogy a két kúpon léteznek párhuzamos alkotók (melyek a végtelenben metszik egymást). Ezeket az alkotókat könnyen megkereshetjük. Toljuk el az egyik kúp csúcspontját a másik kúp csúcspontjába. Ha az így kapott két kúp metszi vagy érinti egymást, akkor a két kúpnak van párhuzamos alkotója, ez adja meg az áthatási görbe aszimptotájának irányát. Szemléletesen az áthatási görbe az aszimptotához tartva halad a végtelenbe. Ezeket a végérintőket megkapjuk, ha a párhuzamos alkotókhoz érintősíkokat szerkesztünk és meghatározzuk a két érintősík metszésvonalát. (Ugyanis a pontbeli/alkotóbeli érintősíkok minden érintőt tartalmaznak, így a metszésvonal az áthatási görbe érintője lesz.) Ha az érintősíkok párhuzamosak, akkor az áthatási görbének végtelen távolban fekvő aszimptotája van, vagyis egy parabolikus ága lesz a görbének. Ha nem találunk ilyen alkotókat, akkor az áthatás során véges zárt görbét kapunk.

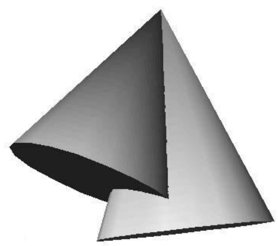
Egy kúp és egy henger esetén, ha a hengernek nincs végtelen távolban fekvő alkotója (a vezérgörbéjének nincs végtelen távoli pontja), csak akkor lehet végtelen ága az áthatásnak, ha a henger alkotói párhuzamosak a kúp valamely alkotójával. Ha a hengernek végtelenben fekvő alkotója van, mely a kúpot metszi, akkor az áthatásgörbének végtelen ága lesz.

Ha két hengernek nincs végtelenben lévő alkotója, nem tartalmaznak végtelen ágat. Kivételt képez az az eset, amikor a két henger alkotói párhuzamosak – ekkor az áthatás alkotókból áll.

Az áthatási görbének (a fokszám figyelembevételével) az alábbi fő típusait különböztetjük meg:

A) *Az áthatási görbe kizárólag egyenesekből áll.* Az áthatási görbe 4 egyenesből tevődik össze. Például két henger, melyeknek az alapjai ellipszisek, 4 közös pontjuk van és a alkotóik párhuzamosak.

Előfordulhat, hogy ezek az egyenesek egybeesnek. Például az előző esetet továbbgondolva – ha az alapellipsziseknek 3, 2 vagy 1 közös pontja van, akkor az áthatási görbe szintén párhuzamos alkotókból áll (ha 3 alkotó van, akkor a rendszám miatt az egyik alkotót duplán kell számolni – azaz egybeeső egyenes).



További példa lehet két kúp, melyek közös csúccsal rendelkeznek és van metszésük. Ekkor is alkotókra bomlik az áthatási görbe.

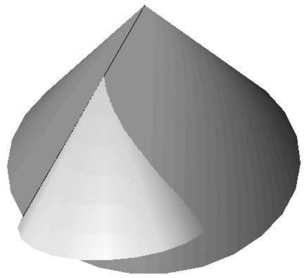
Összefoglalva ha az áthatás csak egyenesekből áll, akkor az alábbi esetek lehetségesek:

- négy valós alkotó;
- két valós és két képzetes alkotó;
- négy képzetes alkotó;
- négy valós alkotó, melyek közül kettő egybeesik;
- két-két valós alkotó egybeesik;
- két egybeeső valós és két képzetes alkotó.

B) <u>*Az áthatási görbe tartalmaz egyenest és egyéb görbét is.*</u>

1) <u>*Az áthatási görbe egy egyenest tartalmaz.*</u> Az olyan kúpok, melyeknek egy alkotójuk közös, de csúcsaik nem esnek össze – az áthatás során egy egyenes keletkezik. Az áthatásnak az egyenese éppen a közös alkotó. Ezenkívül két különböző eset lehetséges: a fennmaradó görbe –

a) <u>*harmadrendű térgörbe*</u>. Ez az eset akkor áll fenn, ha a közös alkotóban a kúpok érintősíkjai különbözőek. A harmadrendű térgörbe – a végtelen távoli síkhoz viszonyított helyzetéhez képest – az alábbi négy típus egyikébe tartozik:



i) *kubikus hiperbola* – ekkor a végtelen távoli síkot a harmadrendű görbe három pontban metszi.

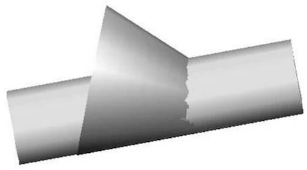
ii) *kubikus ellipszis* – a végtelen távoli síkkal egy metszéspontja van.

iii) *kubikus hiperbolikus parabola* – a görbe három végtelenben fekvő pontja közül kettő egybeesik, tehát a végtelen távoli sík a görbe érintősíkja.

iv) *kubikus parabola* – mindhárom végtelenben fekvő pont egybeesik, azaz a végtelen távoli sík a görbe simulósíkja.

<u>Példák:</u> → → → 13. PÉLDA.

b) <u>*másodrendű görbe*</u>. Ha a közös alkotókban az érintősíkok egybeesnek, akkor az áthatás egy egybeeső egyenes és egy másodrendű görbe.



2) <u>*Az áthatási görbe két egyenest tartalmaz.*</u> A két egyenesnek és a fennmaradó görbének összesen negyedrendűnek kell lennie. Éppen ezért a görbe másodrendű lesz!

Vizsgáljuk meg az alábbi példát: Legyen adott egy egyköpenyű hiperboloid és egy olyan kúp, melynek alapköre a hiperboloid valamely paralel köre és a kúp csúcsa legyen a hiperboloid bármely más pontja. Ekkor az áthatási görbe a kúp alapköréből és a kúp csúcsán áthaladó két hiperboloidalkotóból áll.

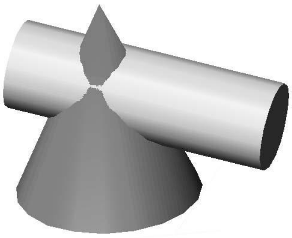
C) <u>*Az áthatási görbe nem tartalmaz egyenest.*</u>

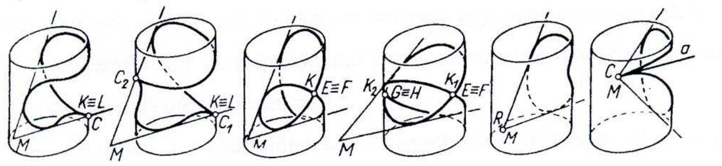
1) <u>*Az áthatási görbe egy görbéből áll.*</u> Ez általában a bemetszés esete. Az áthatás során egy negyedrendű térgörbe keletkezik.

Két különböző ilyen áthatás lehetséges:

a) <u>*A görbe metszi önmagát.*</u> Ez az áthatás a bemetszés és a teljes áthatás közötti eset!

Ha a két felületnek egy pontban létezik közös érintősíkja, akkor ebben a pontban a görbe kétszer halad át. Ezen pontot *kettőspont*nak nevezzük. Ilyen kettőspontot találhatunk például a Viviani-görbe esetében (az ábrán nem ez az eset látható). A kettőspont esetében nehézkes a görbéhez tartozó érintő meghatározása, ennek problémáját később tárgyaljuk. A kettőspontok az alábbi típusúak lehetnek:

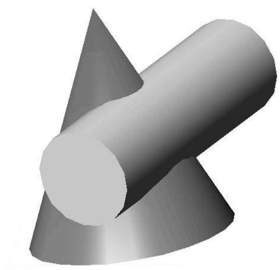




- *valóságos kettőspont* – a görbe ezen ponton kétszer halad át;
- *izolált kettőspont* (remetepont) – nem függ össze az áthatás többi részével. Ilyen pontot kapunk, ha egy kúp-henger áthatás során a kúp csúcsa a hengeren van;
- *csúcspont* – a valóságos kettőspont azon határesete, amikor az egyik hurok egyetlen ponttá zsugorodik. Például henger és kúp áthatása esetén csúcspontot kapunk, ha a kúp csúcsa a henger palástján van úgy, hogy benne a két felület érintősíkja közös.

<u>Példák:</u> → → → 11, 19, 20. PÉLDA.

b) <u>*A görbe nem metszi önmagát.*</u> Két általános helyzetű másodrendű felület, melyeknél nem teljes áthatás áll fenn.



<u>Példák:</u> → → → 6, 7, 12, 18. PÉLDA.

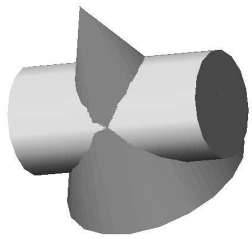
2) <u>*Az áthatási görbe két görbére esik szét.*</u> A teljes áthatás esete – az egyik felület minden alkotója döfi a másik felületet.

A görbék helyzete kétféle lehet:

a) <u>*A két görbe metszi egymást.*</u> Ekkor *két másodrendű görbé*t kapunk áthatásként. (Egy pontbeli érintkezés visszavezet az önmagát egyszeresen metsző negyedrendű görbére.)

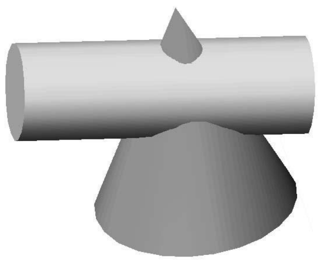
A két görbe két pontban metszi egymást.

Ez a fajta áthatás akkor keletkezik, ha a két felületnek két pontjában közös az érintősíkja. Klasszikus példa erre – az ábrán látható áthatáson kívül – két (a fenti tulajdonságokkal rendelkező) kúp áthatása. Ekkor az áthatási görbe két ellipszis lesz.



<u>Példák:</u> → → → 15. PÉLDA.

b) <u>*A két görbe nem metszi egymást.*</u> A negyedrendű áthatási görbe szétesik két nem másodrendű(!) görbére. Ez az eset nem bír különösebb tulajdonságokkal.



<u>Példák:</u> → → → 9, 14, 16, 17. PÉLDA.

Speciális esetként két másodrendű görbét kapunk, ha a felületek tengelyei egybeesnek.

<u>Példák:</u> → → → 5. PÉLDA.

<u>*Másodrendű felületek és egyéb forgásfelületek áthatása - módszerek*</u>

Az alábbiakban végigvizsgáljuk az áthatásszerkesztés legfontosabb módszereit, később pedig eljárásokat mutatunk a speciális helyzetű térelemek (például kontúrpontok, érintőegyenesek) megkeresésére. Általánosságban elmondható, hogy forgásfelületek esetében minden módszer csak véges sok pont megszerkesztését biztosítja, pontos görbét sohasem kaphatunk – ez a globális elvekből természetes módon következik.

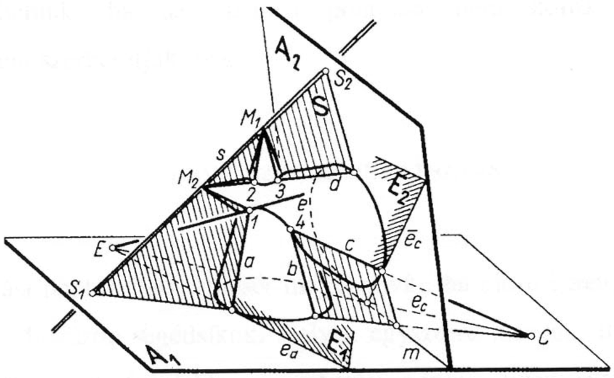
Lengősíkos eljárás

Az elv ugyanaz, mint amit a gúlák esetében tárgyaltunk.

Az egyszerűség kedvéért – az előzőekhez hasonlóan – kúpokra részletezzük az eljárást, hiszen egy henger speciális kúpnak tekinthető, melynek csúcsa végtelen távoli.

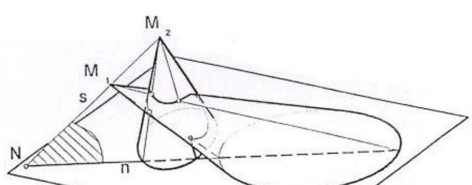
<u>*A módszer elve:*</u> Adott két kúp, melyeknek keressük az áthatási pontjaikat. Tekintsük a két kúp csúcspontján áthaladó egyenest – ez lesz a lengősíkok tartóegyenese. Ha ebből a

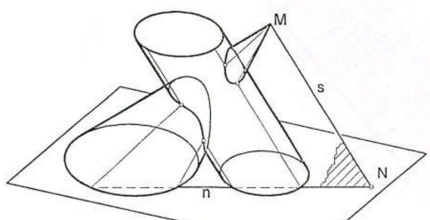
síksorból választunk egy elemet, akkor az a kúpokat általában 2-2 alkotóban metszi (ez azért teljesül, mert a sík a kúpok csúcspontján halad át – tehát a síkmetszet egy-egy egyenespár). A 4 alkotó egy síkban van, tehát metszéspontjaik kijelölhetőek. Az így kapott metszéspontok az áthatási görbe pontjai.

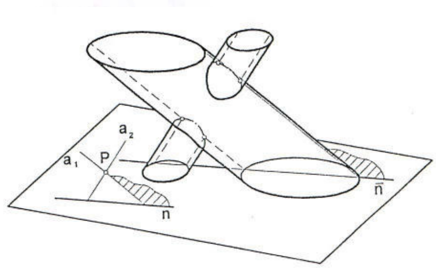


Kúpok és hengerek áthatása három csoportba sorolható:

- Kúp-kúp áthatás – a tartóegyenes ebben az esetben a két kúp csúcspontján halad át.
  Példák: → → → 6. PÉLDA.
- Kúp-henger áthatás – a tartóegyenes a kúp csúcspontján áthaladó hengeralkotókkal párhuzamos egyenes.
  Példák: → → → 7. PÉLDA.
- Henger-henger áthatás – a tartóegyenes végtelen távoli. A síksor mindkét hengeralkotóval párhuzamos síkokból áll.







<u>*Lengősíkos eljárás és az áthatási görbe:*</u> A lengősíkok különböző helyzetei segítenek eldönteni, hogy milyen áthatási görbét kapunk. Vegyünk két kúpot, melyek alapjai egy

síkban állnak. Legyen *N* a tartóegyenes síkhoz tartozó nyompontja, k_1 és k_2 pedig a két kúp alapgörbéje. Vizsgáljuk meg, hogy a két szélső helyzetű lengősíkot, azaz azokat a lengősíkokat, melyek valamely kúpból éppen egy alkotót érintenek.

Az alábbi eseteket kapjuk:

a) Az egyik szélső helyzetű lengősík a másik kúpba belemetsz, míg a másik ilyen sík a második kúpot nem érinti, és nem is metszi. Az egyik felület egyoldalról behat a másikba, az áthatás most bemetszés.

<u>Példák:</u> → → → 6, 7. PÉLDA.

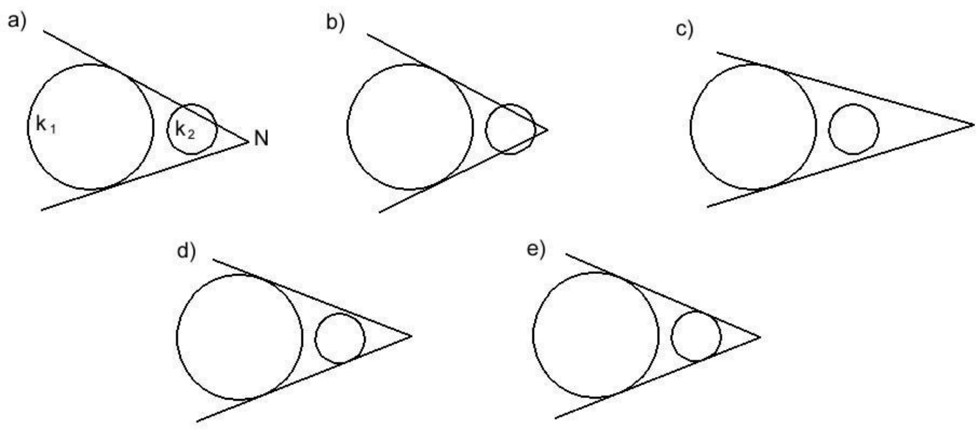
b) A két szélső helyzetű lengősík egy kúpot érinti, és a másikat metszi. Így az első felület átfúródik a másikon. Az áthatás teljes, az áthatási görbe két részből tevődik össze.

c) A két szélső helyzetű lengősík a másik kúpot érinti, és az elsőt metszi. Ekkor a második felület fúródik át az egyiken. Itt is teljes áthatás van és az áthatási görbe két részből áll.

d) Az előbbi síkok egyike mindkét felületet érinti. Ebben az esetben az áthatás egy duplaponttal bír.

<u>Példák:</u> → → → 11. PÉLDA.

e) Mindkét szélső lengősík rásimul a kúpokra (azaz egy-egy sík érinti mindkét kúpot), tehát az áthatásnak két duplapontja van. Ekkor az áthatás általában szétesik két kúpszeletre.



Fontos megjegyezni, hogy a b) és c) esetekben az áthatás nem két kúpszeletre esik szét, csupán a negyedrendű térgörbe áll két részből.

A módszerek további tárgyalása előtt lényeges átnézni a két forgásfelület egymáshoz viszonyított lehetséges helyzeteit. Így könnyebben tudunk válogatni a szerkesztési módszerek között.

Két forgásfelület kölcsönös helyzetét a tengelyeik állása segítségével osztályozhatjuk:

a) *A két felület forgástengelye megegyezik.* Ilyen esetben tekintünk egy közös meridiánsíkot. Ahol a meridiángörbék metszik egymást, azon pontok megforgatásával keletkező paralelkörök adják az áthatási görbét.

   Példák: → → → 5. PÉLDA.

b) *Párhuzamos forgástengelyek.* Ekkor általában a segédsíkok módszerét alkalmazzuk.

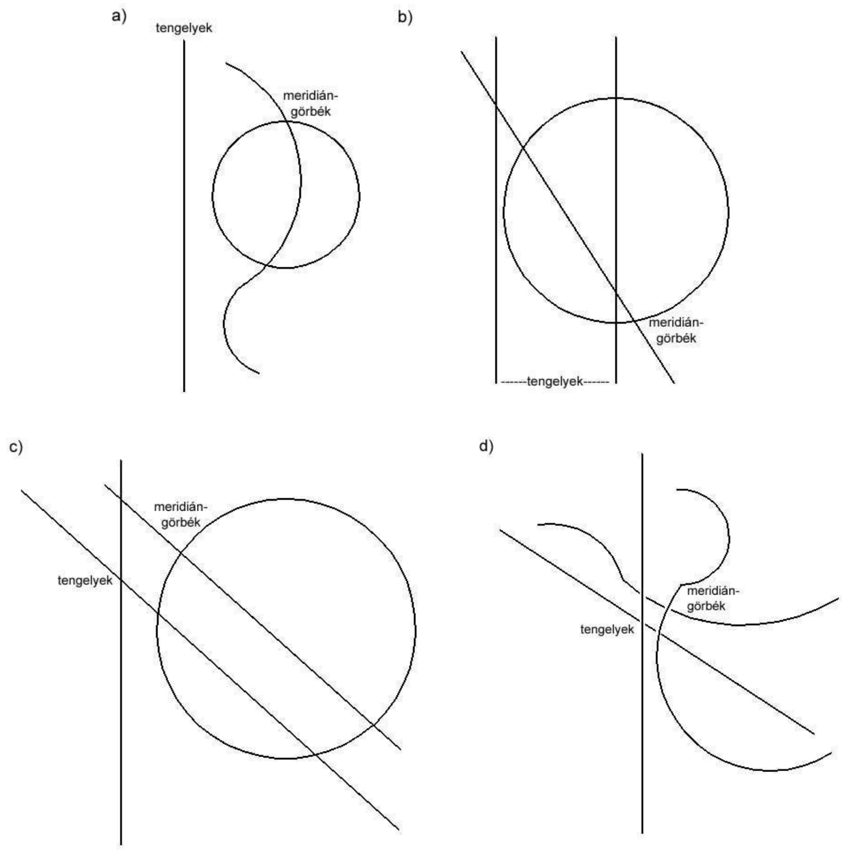
   Példák: → → → 8, 10, 19, 20. PÉLDA.

c) *Metsző forgástengelyek.* Metsző tengelyű forgásfelületeknél a segédgömbök módszerét érdemes használni.

   Példák: → → → 9, 14-18, 22. PÉLDA.

d) *Kitérő tengelyű forgásfelületek.* A segédsíkok módszere talán az egyetlen, mely segítséget nyújthat. Speciálisabb forgásfelületek esetén az új képsík bevezetése is hasznos lehet.

   Példák: → → → 6, 7, 11-13, 21, 23, 24. PÉLDA.



Segédsíkok módszere

Két felület áthatási pontjait megkaphatjuk úgy is, hogyha speciális síkokkal szeleteljük fel a felületeket. A speciális síkjaink olyanok, hogy a felületekből paralelköröket, egyeneseket vagy meridiángörbéket metszenek ki.

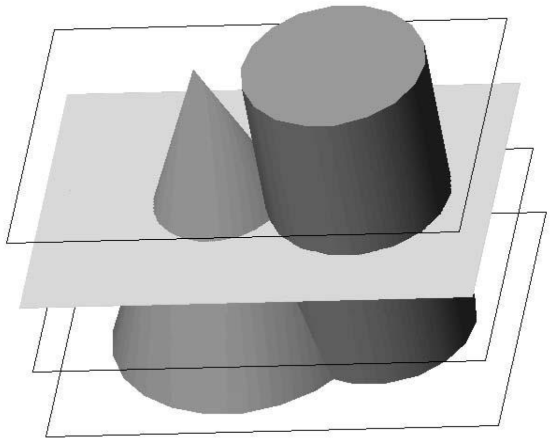
Tulajdonképpen az előbb említett lengősíkok módszere is a segédsíkok módszerének egyik esete, de jelentősége miatt külön tárgyaltuk.

Elsődleges cél tehát olyan síkok megválasztása, melyek a két felületből olyan görbéket metszenek ki, melyek nemcsak könnyen szerkeszthetőek, de a kapott görbék egymással alkotott metszéspontjai is egyszerűen kijelölhetőek. Például egyenesek vagy körök metszése, esetleg másodrendű görbe és egyenes közös pontjai.

A lengősíkos eljáráshoz hasonlóan a segédsíkokat egy meghatározott szisztéma szerint kell végigfuttatni a két felületen – ez a kapott áthatási görbe pontjainak összekötését is nagyban megkönnyíti.

Az alábbiakban rendszerezzük, hogy adott felületek esetén illetve adott tengelyállások mellett milyen segédsíkokat érdemes választani. A segédsíkok választásánál igyekezzünk mindkét felületet figyelembe venni.

Példák: → → → 8-10, 12, 19-24 . PÉLDA.



Rendszerezés a *felületek* szempontjából:

- Kúpok és hengerek esetében a megszokott lengősíkos eljárás hamar célra vezet. Általános elvként elmondható, hogy a kúpokat és hengereket tekintve érdemes a tengelyeikre merőleges síkokkal metszeni őket, mert ekkor körmetszeteket nyerünk. Kúp esetében a csúcsára illeszkedő síkok alkotókban metszik, míg a hengert a tengellyel párhuzamos síkok metszik alkotóban.

- Gömbök esetében bármilyen sík megfelelő, ugyanis a gömb síkmetszete minden esetben kör.
- Egyéb forgásfelület esetében tengelyére merőleges síkok paralelkörben metszik, tehát az ilyen síkok jó választásnak bizonyulnak. Ha a megforgatott görbe elemi geometriai szempontból könnyen szerkeszthető, akkor tengelyre illeszkedő síkkal is elvághatjuk a felületet (meridiánmetszetek).

Rendszerezés a *tengelyállások* szempontjából:

Korábban már említettük a 4 lehetséges tengelyállást. Most kizárólag a segédsíkok elvének szempontjából vizsgáljuk meg őket.

- Egyező forgástengely esetén nincs szükség segédsíkokra, mivel már a meridiánmetszetek elárulják az áthatási görbét.
- Párhuzamos forgástengelyek esetén a segédsíkok módszere adja a lehető leggyorsabb és legegyszerűbb szerkesztést. A segédsíkok ebben az esetben a forgástengelyekre merőleges (és így egymással párhuzamos) síkok. Ezeket szokás *szeletelősíkok*nak is nevezni. A szeletelősíkok mindkét felületből köröket (paralelköröket) metszenek ki. Az áthatás szerkesztése tehát abból áll, hogy minden szeletelősíkban megkeressük két kör metszéspontjait. Ezek pedig könnyen meghatározhatóak.
- Metsző forgástengelyeknél ritkán használjuk a segédsíkok módszerét, mivel a segédgömbök módszere célravezetőbb lesz. Olyan esetekben használhatjuk, ha a két forgástengely egymásra merőleges és az egyik forgásfelület henger. Ekkor a másik forgásfelület tengelyére merőleges síkokkal metszve a felületeket – a forgásfelületből paralelköröket, míg a hengerből alkotókat metszenek ki a síkok.
- Kitérő tengelyű forgásfelületek esetében is ez a legjobban használható eljárás. Ilyenkor általában egyik tengelyre merőlegesen szeletelünk. Ha valamelyik felület henger, kúp, gömb vagy más viszonylag egyszerű forgásfelület és a másik felület tőle „bonyolultabb”, akkor a nehézkesebben szerkeszthető felület tengelyét kell választani (tehát arra vesszük a merőleges metszeteket). Ugyanis abból a síkok köröket metszenek ki, amíg a másik felületből általános síkmetszeteket. (Azt kell elemezni, hogy mely forgásfelület általános síkmetszeteit állíthatjuk elő

könnyebben.) Továbbá fontos megfigyelni, hogy az egyszerűbb felület síkmetszeteit körökkel tudjuk-e úgy metszeni, hogy az áthatási pontok könnyen szerkeszthetők legyenek. Vagyis az egyszerűbb alakzat síkmetszetei és a másik paralel köreinek metszéspontjai adják meg az áthatási pontokat.

Egyszerűbbé válik a helyzet, ha a kitérő tengelyek egymásra merőlegesek. Ilyen esetben bármely tengelyre is merőlegesek a szeletelősíkok, az egyik felületből folyamatosan paralelköröket, a másikból pedig tengellyel párhuzamos síkmetszeteket vágnak ki a síkok. Az előbbi elv itt is életbe lép: annak a felületnek a tengelyét választjuk ki, melynek nehezebben szerkeszthetőek a tengellyel párhuzamos síkmetszetei.

Összefoglalva: A segédsíkok módszerét az alábbi esetekben érdemes használni:

- kúpok és hengerek áthatása (lengősíkos eljárás);
- párhuzamos tengelyű forgásfelületek áthatásakor;
- speciális kitérő tengelyek estében;
- ha valamely felület gömb;
- ha valamely felület henger.

Segédgömbök módszere

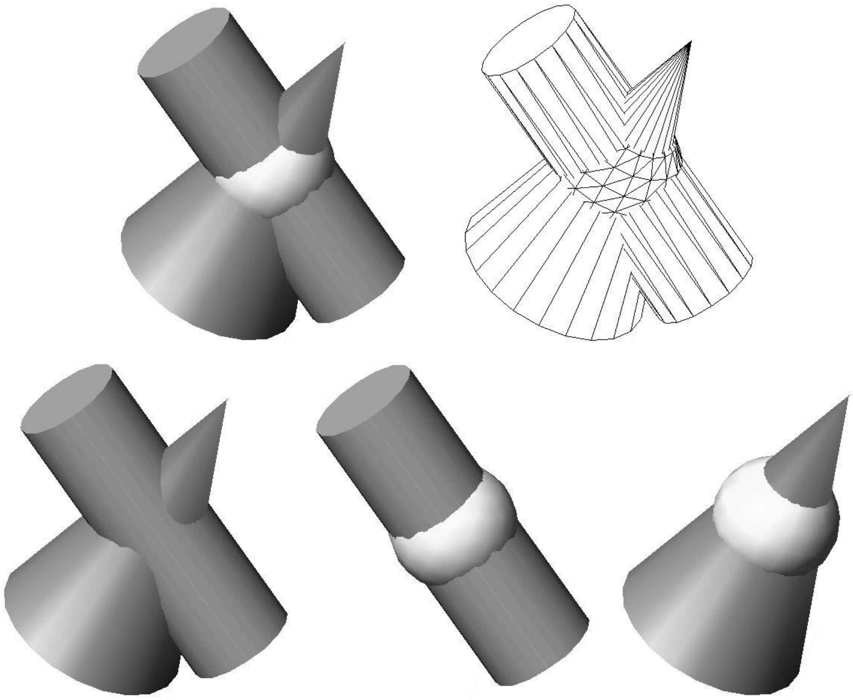
A segédsíkok módszere szinte minden esetben a legkényelmesebb szerkesztést biztosítja. Metsző forgástengelyek esetében azonban a *segédgömbök módszere* hatásos és gyors eljárásnak bizonyul.

<u>*A módszer elve:*</u> Figyeljük meg a két tengely metszéspontját. Ha egy ilyen középpontú gömböt veszünk, akkor az a két felületből legfeljebb két-két kört metsz ki. Ez azért igaz, mert a gömböt és az egyik forgásfelületet tekinthetjük úgy, mint két azonos tengelyű forgásfelületet. Ekkor a gömb meridiángörbéje egy (fél)kör, amely a másik forgásfelület meridiángörbéjét általában 2 pontban metszi. (Itt jegyezzük meg, hogy a meridiánmetszet két szimmetrikus meridiángörbét tartalmaz, tehát bizonyos esetekben – ha szükséges – különbséget teszünk a meridángörbe és a meridiánmetszetben található görbe között.) Ez a két metszéspont a meridiángörbéken a forgatás során két kört ad.

Tehát a következő szerint járunk el. Veszünk egy megfelelő sugarú gömböt, melynek középpontja a tengelyek metszéspontja. Ez két-két körben metszi el a felületeket. Ezeknek a köröknek kell megkeresni a metszéspontjait. Általában a legkisebb – fentieknek megfelelő – gömbtől haladunk a legnagyobb gömbig, ugyanis az áthatási görbe pontjainak összekötését ez egyszerűbbé teszi.

A legkisebb és legnagyobb sugarú gömböt úgy kereshetjük meg, hogy olyan képsíkot vezetünk be, amely a két tengellyel párhuzamos. Ekkor a két felület ide vetett képe egy-egy meridiánmetszet. A két meridiánmetszetbe, mint síkbeli görbékbe egyszerűen beírhatjuk a legkisebb és legnagyobb köröket – ezek lesznek a legkisebb és legnagyobb gömb ezen képsíkra vetett képei.

Az alábbi módszer azért is hasznos, mert a segédgömbök által kimetszett körök ebben a képsíkban szakaszban látszanak.



Példák: → → → 14-18. PÉLDA.

Új képsík bevezetése

Ezt a módszert általában akkor alkalmazhatjuk, ha az egyik forgásfelület olyan tulajdonságú, hogy valamely irányból nézve egyszerű alakzat a képe.

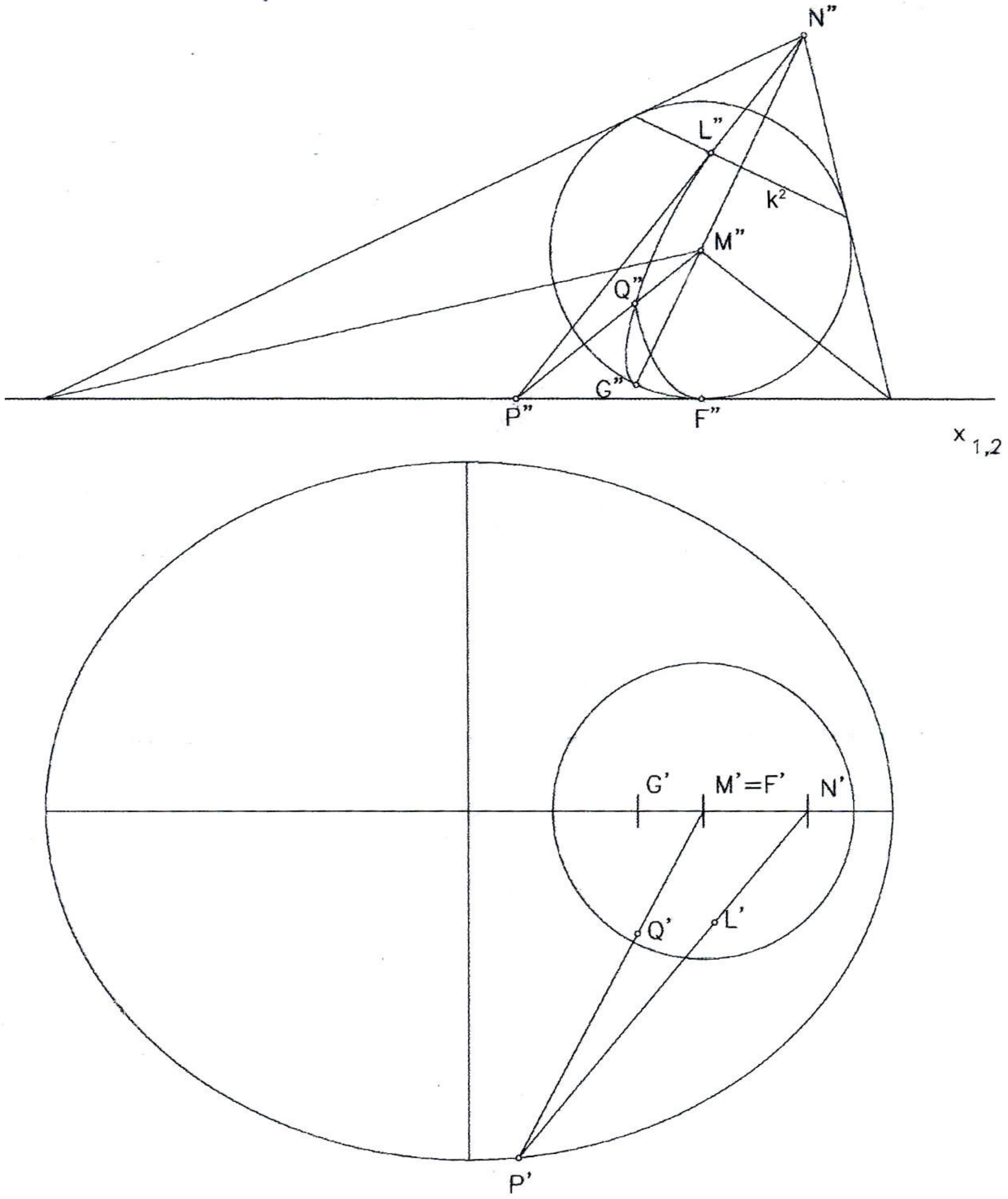
A gyakorlatban az új képsík bevezetését kizárólag olyan helyzetben használjuk, amikor az egyik felület henger. Ekkor választható olyan képsík, ahol a henger képe kör. Ilyenkor az áthatási görbe ezen a képen egy körív lesz – ez nyilvánvalóan következik a henger speciális képe miatt.

Példák: → → → 9, (11). PÉLDA.

Egy speciális áthatás – szférikus kúpszelet

Vegyünk egy másodrendű kúpot és egy olyan gömböt, melynek középpontja a kúp csúcspontjában van. Ekkor a két felület áthatási görbéje (ha a kúpnak csak egyik ágát tekintjük) egy *szférikus kúpszelet*. A szférikus kúpszelet érdekessége abban áll, hogy bizonyos tekintetben rokonságot mutat a síkbeli ellipszissel, azaz analóg tételek mondhatók ki mindkét görbére.

Az ábrán a másodrendű kúp *M* csúcsponttal bír és ellipszis alapgörbéjű, míg a gömb *M* középpontú és *MF* sugarú. (Az *N* csúcsú, ugyanolyan ellipszis alapgörbéjű kúp csak segédkúp.)



Az ábrára támaszkodva – bizonyítások nélkül – néhány analógia:

- A szférikus kúpszelet olyan pontok halmaza, melyeknek *G*-től és *F*-től mért távolságösszege állandó. (Ellipszisnél – a két fókusz.)
- A gömbön olyan pontok alkotják a szférikus kúpszeletet, melyek k^2-től és az *F*-től egyenlő távolságra vannak. (Ellipszisnél – egy fókusz és a másik körüli vezérkör.)
- *FQ* és *GQ* – vezérívek (Ellipszisnél – fokális sugarak)
- *MG* és *MF* fokális sugarak. A másodrendű kúp alkotóira jellemző, hogy a fokális sugarakkal bezárt szögek összege állandó.

  Vezérsík – a kúp alkotója és az egyik fokális sugár által felfeszített sík. Alkotó mentén az érintősík a vezérsíkok külső szögfelezője lesz.

  A szférikus kúpszelet *Q*-beli érintője a vezérívek *Q*-beli érintőjének külső szögfelezője. (Ellipszisnél – ellipszis érintőegyenese egy adott pontban)

Másodrendű felületek és egyéb forgásfelületek áthatása – ábrázolás és speciális térelemek

Az áthatás ábrázolása

A forgásfelületek áthatásának ábrázolásáról is ugyanaz mondható el, mint a síklapú felületek áthatása esetében. Hasonló módon itt is két kérdés merül fel:

1) Hogyan köthetőek össze a kapott áthatási pontok?
2) Hogyan ábrázolhatjuk az áthatást?

Az áthatási pontok összekötése a következőképpen történik. Kiválasztunk egy felületet, melynek alkotóin haladva vizsgáljuk az áthatási pontokat. A könnyebb követhetőség kedvéért nézzünk egy egyszerű példát, két kúp áthatását. Kiválasztunk az egyik kúpon egy alkotót. Ezen az alkotón maximum 2 áthatási pont van. Az egyiket rögzítjük, és a kúpon az egyik irányban elindulunk. Fontos, hogy egy irányban haladjunk egészen addig, amíg vissza nem térünk a kiindulási helyzetbe! Tekintjük azt a következő alkotót, melyen áthatási pontokat szerkesztettünk. Ezen is valószínűleg két pont található. El kell dönteni, hogy melyik ponttal köthetjük össze a legelső pontot. Figyeljük most meg a másik kúpot. Az eredeti pontot és a két lehetséges pontot képzeletben kössük össze – így egy-egy görbét kapunk a fixált kúpon. A másik kúpon viszont az egyik görbe szintén a kúpon (mint felületen) haladó görbe lesz, míg a másik a kúp belsején áthaladó vonal. A másik kúp tehát megadja, hogy mely ponttal kell összekötni az első pontot. Ugyanis az áthatási görbe mindkét kúpon végighaladó görbe vonal lesz (esetleg több – ha szétesik). Ezt az eljárást ismételgetjük egészen addig, amíg a legelső ponthoz vissza nem érünk. Ha az áthatási görbe két görbére szakad, akkor a másik áthatási görbedarabnál is hasonló módon járunk el.

A fenti módszer alkalmas arra is, hogy bonyolult felületek esetében – ahol nem tudjuk azonnal megállapítani, hogy az áthatás milyen – is biztosan tudjuk összekötni a pontokat.

A másik kérdés az ábrázolás során az áthatás ábrázolása.

A speciális pontokat később tárgyaljuk – ezek nagyban megkönnyítik az áthatási görbe megrajzolását.

Az ábrázolásra pontosan ugyanazok a lehetőségek állnak fenn, mint síklapú felületek esetében:

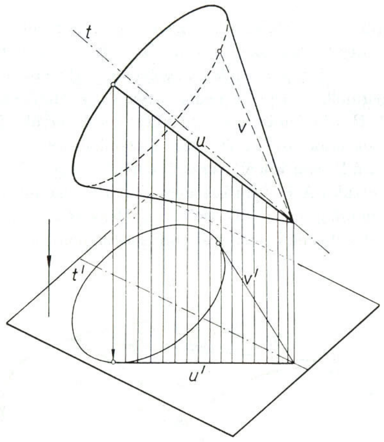
a) Az egyik felületet, mint csonkolt felületet ábrázoljuk.
b) Csak az áthatás során kapott metszetet, mint térrészt ábrázoljuk. (Ha létezik.)
c) A két felületet együttesen ábrázoljuk.

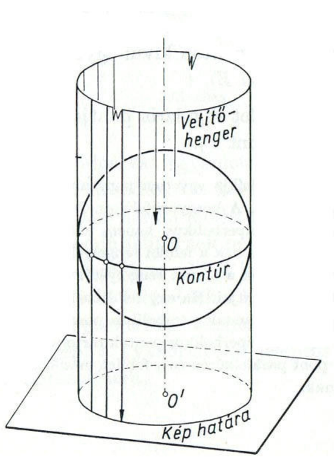
Speciális pontok

<u>*Kontúrpontok:*</u> Az ábrázolás során kulcsfontosságú a kontúrpontok meghatározása. Az áthatási görbe kontúrpontjai nagy segítséget adnak a végső ábra megrajzolásában. A görbe kontúrpontjai olyan pontok, melyek a két felület kontúrjához csatlakoznak. Ezek a pontok adják a képgörbe „határait”. De ennél több is elmondható: az áthatási görbe kontúrpontjai a felületek képkontúrjaihoz úgy csatlakoznak, hogy általában az áthatási görbe képe a kontúrpont képében hozzásimul a felület képkontúrjához. (Például kúp esetében a görbe képét a kontúrpontban a felület képkontúrja mint érintőegyenes érinti.)

A kontúrpont megkeresése egyszerű. A felületek kontúrgörbéjének ismeretében megszerkesztjük a kontúrgörbének azt a pontját, mely az áthatási görbén is szerepel. Henger esetében általában két alkotó a kontúrgörbe. A feladat tehát megkeresni a két alkotó metszéspontjait a másik felülettel – azaz a két alkotóhoz tartozó áthatási pontokat.

Meg kell jegyezni, hogy nem mindig léteznek kontúrpontjai az áthatási görbének.

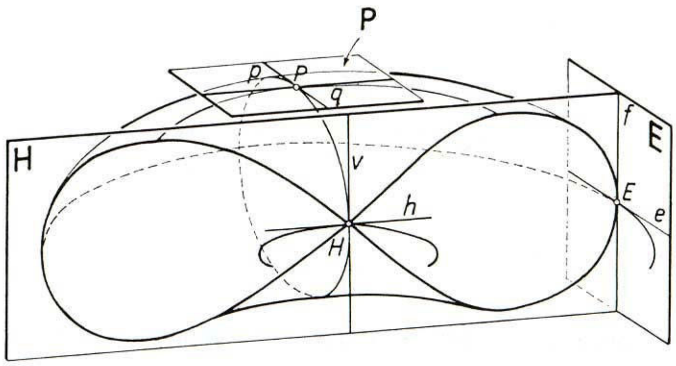




<u>*Kettőspontok:*</u> A kettőspontok fajtáit és előállítását már korábban tárgyaltuk.

Érintőegyenesek és érintősíkok

<u>*Érintősíkok:*</u> Egy általános helyzetű pontban az érintősíkok egy-egy felületre vonatkozóan a megszokott módon szerkeszthetőek. Előfordulhat, hogy például egy alkotóban a két felületnek az adott áthatási pontban közös az érintősíkja – ekkor keletkeznek kettőspontok.



Az ábrán egy tórusz parabolikus, hiperbolikus illetve elliptikus pontjában láthatunk érintősíkokat és érintőket. A tórusz „külső” része elliptikus pontokból áll (*E* pontban az *e* érintőegyenes, *e* és *f* feszíti ki az érintősíkot) – itt az érintősík csak egy pontban érinti a felületet. A tórusz „belső” része hiperbolikus pontokból áll (*H* pontban a *h* érintőegyenes, *h* és *v* feszíti ki az érintősíkot) – ezekben a pontokban az érintősík belemetsz a felületbe. A két részt a parabolikus pontok választják el (*P* pontban a *p* érintőegyenes, *p* és *q* feszíti ki az érintősíkot), melyeknek a pontbeli érintősíkjai egy teljes görbében érintik a felületet (itt egy paralel körben). Mindhárom esetben az érintősíkokat egy paralelkörhöz és egy meridiángörbéhez tartozó érintő határozta meg.

Érintőegyenesek: Általános helyzetű áthatási pontban az érintőt az alábbiak alapján szerkeszthetjük. Tudjuk, hogy az áthatási pont mindkét felületnek eleme, tehát a két felületre vonatkozóan egy-egy érintősíkot kapunk. A két érintősík metszésvonala lesz az áthatási görbe érintője (ez lesz az az egyenes, amely mindkét felületre nézve érintő).

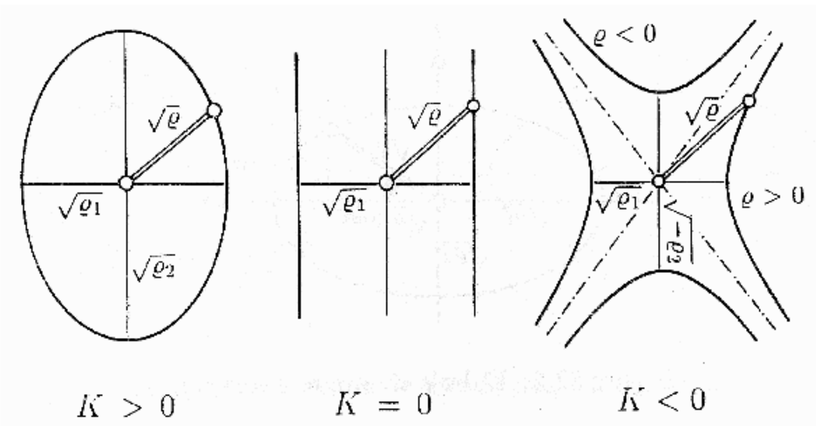
Dolgozhatunk felületi normálisokkal is. A két érintősíknak egy-egy normálisa nyilvánvalóan merőlegesek a síkokra. Tehát a két normális merőleges lesz az érintőegyenesre is. Továbbgondolva a két normális által meghatározott sík merőleges lesz a keresett érintőre.

Példák: → → → 7, 10, 12, 14, 17-21. PÉLDA.

Kettőspontok esetében azonban egyik módszer sem vezet célra, ugyanis a két érintősík egybeesik. A görbe érintőjének meghatározásában a *Dupin-indikátrix* segít.

A Dupin-indikátrix szemléletes jellemzése a következő:

Vegyünk egy tetszőleges felületet és annak egy tetszőleges pontjában az érintősíkot, illetve a felületi normálist. Az érintősík különböző érintőivel és a normálissal az érintősíkra merőleges síksort hozunk létre, melyek tartója a felületi pontbeli normális. Vegyük továbbá a síkokhoz tartozó metszeteket és az azokhoz tartozó görbületeket és görbületi sugarakat. Ezután a görbületi sugarak gyökeit felmérjük az adott pontbeli érintősíkon a megfelelő érintőegyenesre mindkét irányban. Így egy másodrendű görbét kapunk, melyet Dupin-indikátrixnak nevezünk.



A Dupin-indikátrix elliptikus pontban egy ellipszis, parabolikus pontban egy párhuzamos egyenespár, míg hiperbolikus pontban egy konjugált hiperbolapár. (Ennek indoklása a differenciálgeometria tárgykörébe tartozik.) Az így kapott másodrendű görbék tengelyeinek egyenesei differenciálgeometriai szempontból a felületi pontokhoz tartozó főirányok (a síkokban a hozzájuk tartozó főgörbületek). Ezek a nyilvánvalóan egymásra merőlegesek.

A Dupin-indikátrix esetében a mondottak szerint csak az egyenesállásokat keressük. A két főirány forgásfelületek esetében általában egyik sík a paralelkör érintője, a másik pedig a meridiángörbe érintője. Meghatározzuk mindkét felület pontbeli Dupin-indikátrixát – és megszerkesztjük a metszéspontjaikat. Az érintőket a két indikátrix „átlós" metszéspontjai adják (2-2 db metszéspont – 1-1 egyenes)!

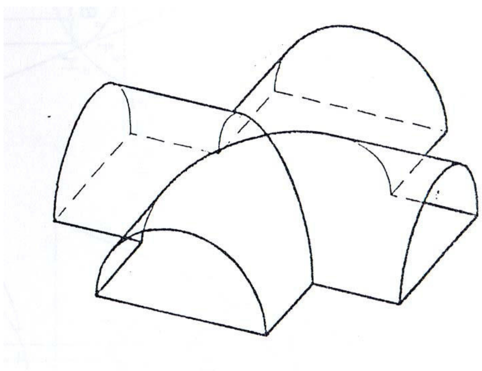
A gyökvonás miatt általában a ponttal, mint középponttal felnagyítjuk a Dupin-indikátrixot, hogy könnyebben szerkeszthessünk – ezzel az egyenesállások nem változnak.

<u>Példák:</u> → → → 11. PÉLDA. (Kettőspontban érintő – nem Dupin-indikátrixszal is!)

Kettős vetület

A gyakorlatban sokszor olyan felületek áthatását kell megszerkeszteni, melyeknek közös szimmetriasíkjuk van. Ekkor a felületek áthatási görbéje is szimmetrikus a közös szimmetriasíkra nézve, s így ha a képsíknak a közös szimmetriasíkot (vagy azzal párhuzamos síkot) választjuk, az áthatási görbe képének egy pontja mindig a görbe két pontjának képe, az áthatási görbe képe a térgörbének kettős vetülete. Negyedrendű térgörbe képe ekkor egy másodrendű görbe ívdarabjaiból tevődik össze.

Az ábrán két henger áthatásának kettős vetülete látható. Az áthatási görbe szétesik két ellipszisre. Az ellipszisek speciális helyzete miatt azonban a képsíkon már csak szakaszban látszanak.



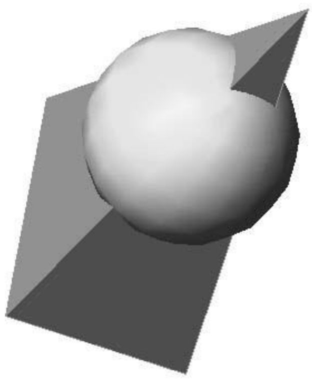
A kettős vetület mögött húzódó elmélet a következő: Egy n-edrendű térgörbe vetülete általában n-edrendű. Azt tudjuk, hogy egy görbét egy őt metsző vetítőhenger képezi le a képsíkra. Ezt a hengert általánosságban kúpnak tekinthetjük. Ha a kúpon rajta van az áthatási görbe és ráadásul ugyanaz a kúp vetíti azt, akkor a vetítőkúp minden alkotója a térgörbét két pontban metszi. Emiatt minden pont kétszer számítandó, tehát a görbének kettős vetülete van. (Minderről már korábban az algebrai görbék vetületénél beszéltünk.)

Példák: → → → 8, 9, 11, 12, 14-24. PÉLDA.

Síklapú és görbelapú felületek áthatása

Két azonos tulajdonságú felület áthatását már részletesen tárgyaltuk, azonban nem ejtettünk még szót arról az esetről, ha egy síklapú és egy görbelapú felület áthatását vizsgáljuk. Ezt nézzük most meg röviden.

Az ilyen áthatások rendkívül egyszerűek. A síklapú felület/test minden lapjával, mint síkkal végzünk síkmetszetet. Természetesen minden egyes síkmetszetet csak a lapok éléig veszünk figyelembe. Mivel ez a dolgozat nem foglalkozik síkmetszetekkel, ezért nem vizsgáljuk meg alaposabban ezt a kérdéskört.



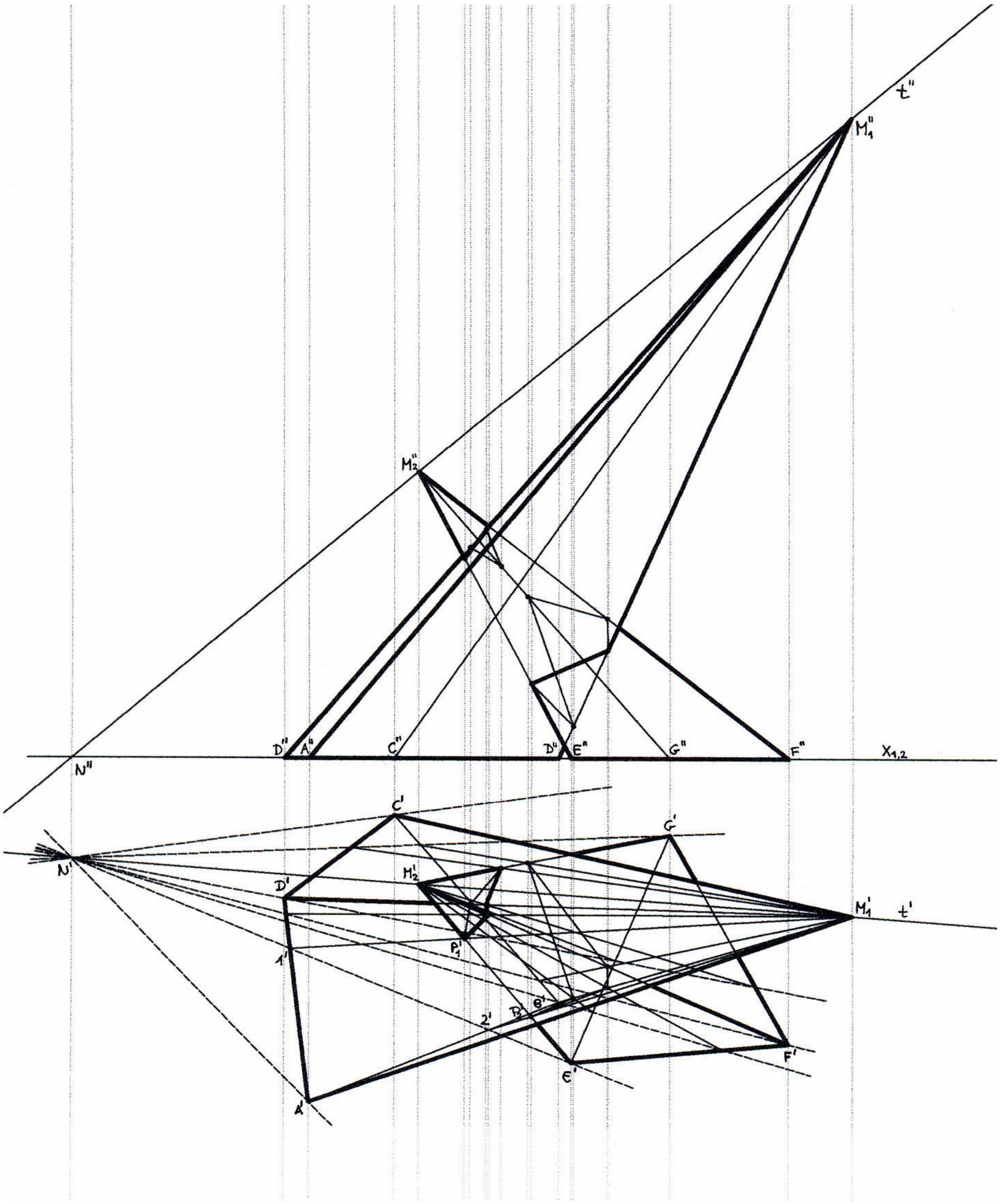
Példák: → → → 25. PÉLDA.

FONTOSABB PÉLDÁK AZ ÁTHATÁSOKRA

Ebben a szakaszban az eddig említett áthatásokra vizsgálunk meg néhány egyszerű, de fontos és tanulságos példát. A különböző típusú áthatások tárgyalásának végén utalások találhatóak az itt megoldott szerkesztésekre.

1. PÉLDA: *Két gúla áthatása*

Főbb tulajdonságok: lengősíkok-módszere; teljes áthatás.



Első lépésben a lengősíkok tartóegyenesét kell meghatároznunk. Az elmélet szerint a gúlák csúcspontjain kell átmennie ennek az egyenesnek (*t*). Keressük meg a tartóegyenes nyompontját. A nyompont (*N*) rajta lesz a lengősíkok nyomvonalán – hiszen a tartóegyenes az összes lengősíknak eleme. Vezessünk egyeneseket – mint nyomvonalakat – a két gúla alapjainak csúcspontjain át.

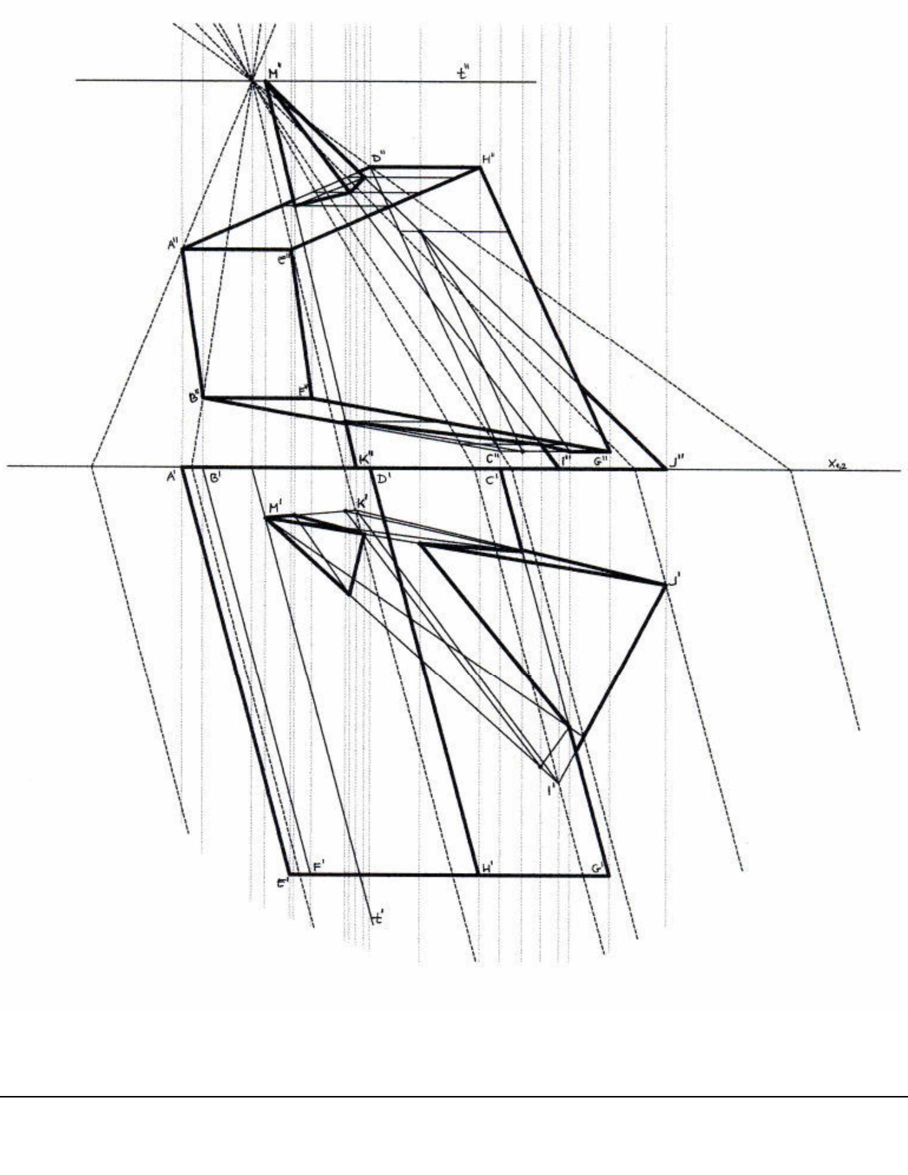
A feladat az, hogy egy-egy lengősíkban a metszéspontokat meghatározzuk. Vegyük például az *EN* általi lengősíkot. A lengősík a másik gúla alapjából kimetszi az *1* és *2* pontokat. Tehát a belőlük induló alkotók ($1M_1$ és $2M_1$) az EM_2 éllel egy síkban lesznek. A metszéspontjaik legyenek P_1 és P_2. Ez a két pont pedig biztos áthatási pont.

Látható, hogy az *AN* és a *CN* lengősíkjai nem érintik, és nem is metszik a másik gúlát. Ez biztosítja, hogy az $EFGM_2$ gúla belefúródik az $ABCDM_1$ gúlába.

Az áthatási pontok összekötésénél rögzítsük például az $EFGM_2$ gúlát. Induljunk ki az EM_2 alkotóból. Fixáljuk le az egyik pontját (a P_1-et). Haladjunk tovább a gúlán. A következő áthatásban szerepet játszó alkotó az EFM_2 lapon van. Ez viszont a BM_1-et metszi – mely az áthatás fenti ágánál nem használható (ugyanis az első áthatási pont az $1M_1$ segítségével keletkezett és ezzel nem alkotnának az áthatási pontok a felszínre simuló szakaszt), csak majd az alsó ágnál. A következő alkotó az FM_2. Ez már az $1M_1$–gyel egy lapon van és a másik gúlán is, tehát összeköthető pontok. Az eljárást addig folytatjuk, amíg vissza nem térünk az első pontba, azután hasonlóképpen kötjük össze az alsó ágat is.

<u>2. PÉLDA:</u> *Gúla és hasáb áthatása*

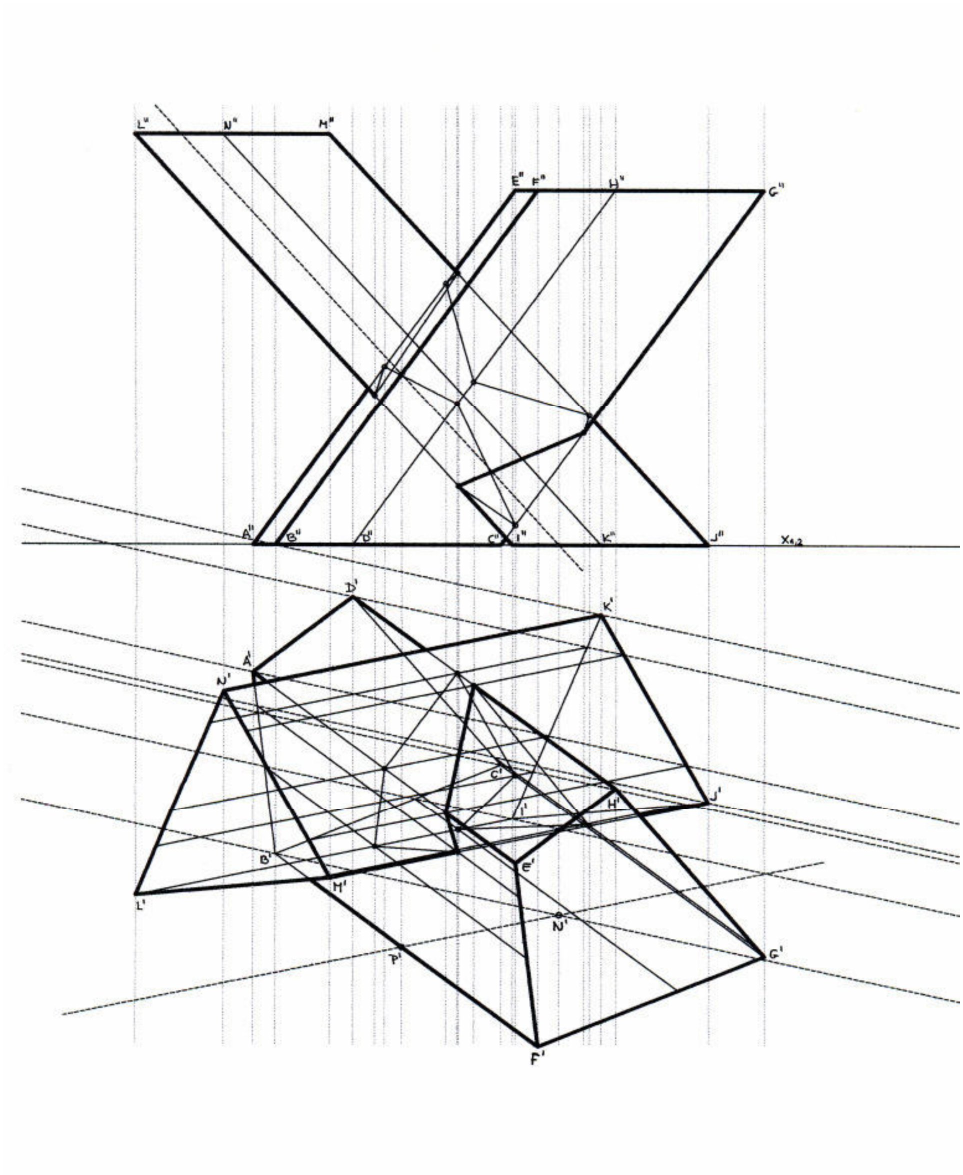
Főbb tulajdonságok: lengősíkok-módszere; teljes áthatás.



Az elvek teljes egészében azonosak az *1. példá*ban látottakkal. Itt az érdekesség csupán annyi, hogy a két test alapjai más képsíkon vannak. A lengősíkok tartóegyenese – *t* – átmegy a gúla csúcspontján és párhuzamos a hasáb alkotóival. A teljes áthatást itt is az biztosítja, hogy az *A*-n illetve *D*-n áthaladó lengősíkok nem metszik, és nem is érintik a másik testet (itt a lengősíkok első nyomvonalai nem metszik, és nem is érintik a gúla alapját).

<u>3. PÉLDA:</u> *Két hasáb áthatása*

Főbb tulajdonságok: lengősíkok módszere; bemetszés.

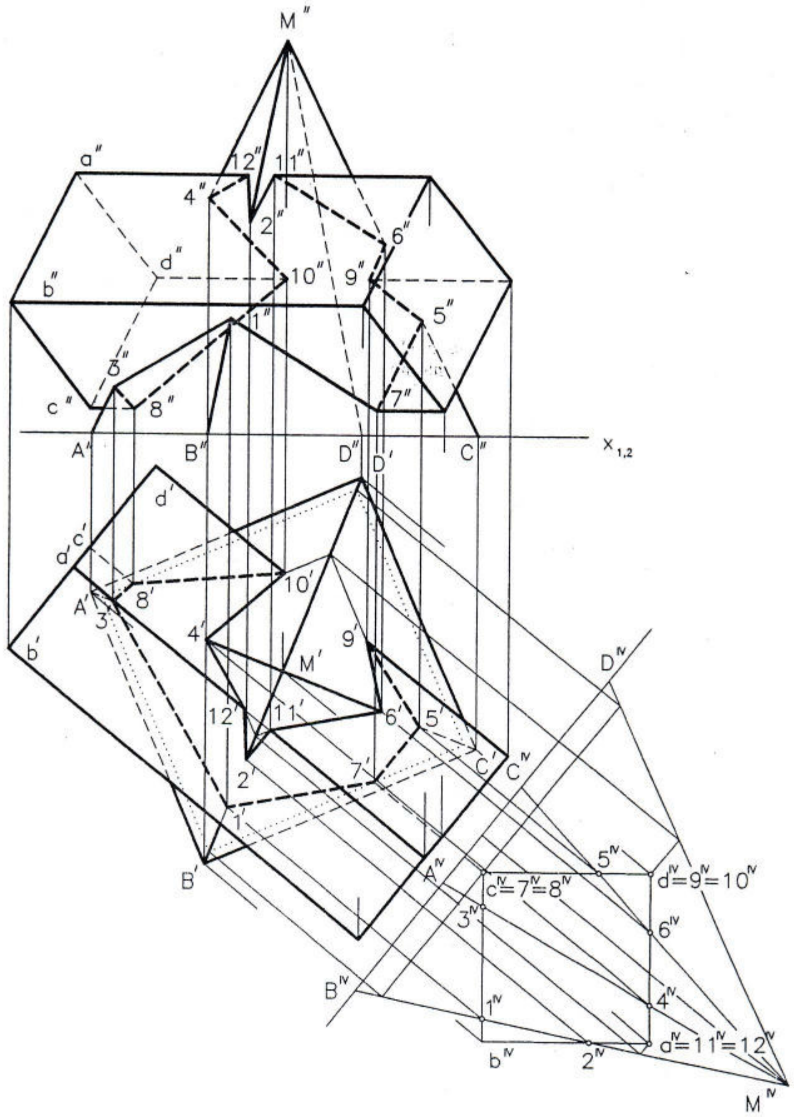


Ebben a példában is elmondható, hogy a módszerek az *1. példá*ban figyelhetőek meg. Itt a tartóegyenes végtelen távoli. Ez annyit tesz, hogy a lengősíkok egymással párhuzamosak, így a nyomvonalaik egymással párhuzamosak. Mindkét alkotósereggel párhuzamos síkok állását az alábbi módon kaphatjuk meg. Toljuk el például a *BF* alkotó tetszőleges *P* pontjába a másik alkotósereg egyik elemét. Ennek az eltolással kapott egyenesnek a nyompontja *N*. A *BN* tehát a metsző egyenespár általi sík nyomvonalát adja – így megadja a lengősíkok nyomvonalának állását! Ezt toljuk el párhuzamosan az alapok csúcspontjaiba.

Az ábrából kiolvasható, hogy a *K*-ból illetve a *B*-ből induló lengősíkok nem vesznek részt az áthatásban – így bemetszést kapunk.

4. PÉLDA: *Gúla és hasáb áthatása*

Főbb tulajdonságok: új képsík bevezetése; bemetszés.



A gúla az első képsíkon áll, míg a hasáb négyzet alapú és alkotói párhuzamosak az első képsíkkal. Vezessünk be egy új képsíkot, melyben a hasáb csak az alapjában látszik.

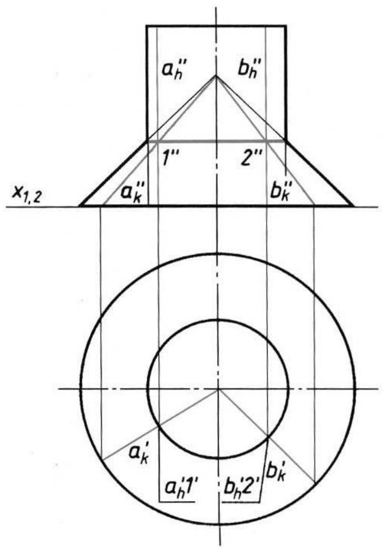
Az áthatást visszavezetjük a hasáb éleivel, mint egyenesekkel való döfésre, illetve a negyedik képen megfigyelhető, hogy a hasáb alapjai, mint síkok hol metszik a gúla éleit. Ezeket a pontokat vezetjük vissza.

Például: A *BM* él a hasáb lapjait 1 illetve 2 pontokban döfik, ezek tehát biztosan áthatási pontok. Továbbá a hasáb *a* éle a *11* és *12* pontokban szúrják át a gúlát. Így ezek is áthatási pontok. A döféspontok megszerkesztése a klasszikus módszerrel történhet.

Ez a speciális negyedik kép elősegíti az áthatási pontok összekötését is. Induljunk el például az *1*-es pontból és haladjunk végig a hasábon, míg vissza nem térünk. Segítségképpen elmondható, hogy az egy alkotóhoz tartozó pontok nyilvánvalóan nem köthetőek össze (hiszen egyenes-döféssel származtattuk őket – egy egyenes pedig általában össze nem köthető pontokban döfi át a testet).

5. PÉLDA: *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: közös tengelyű forgástestek.

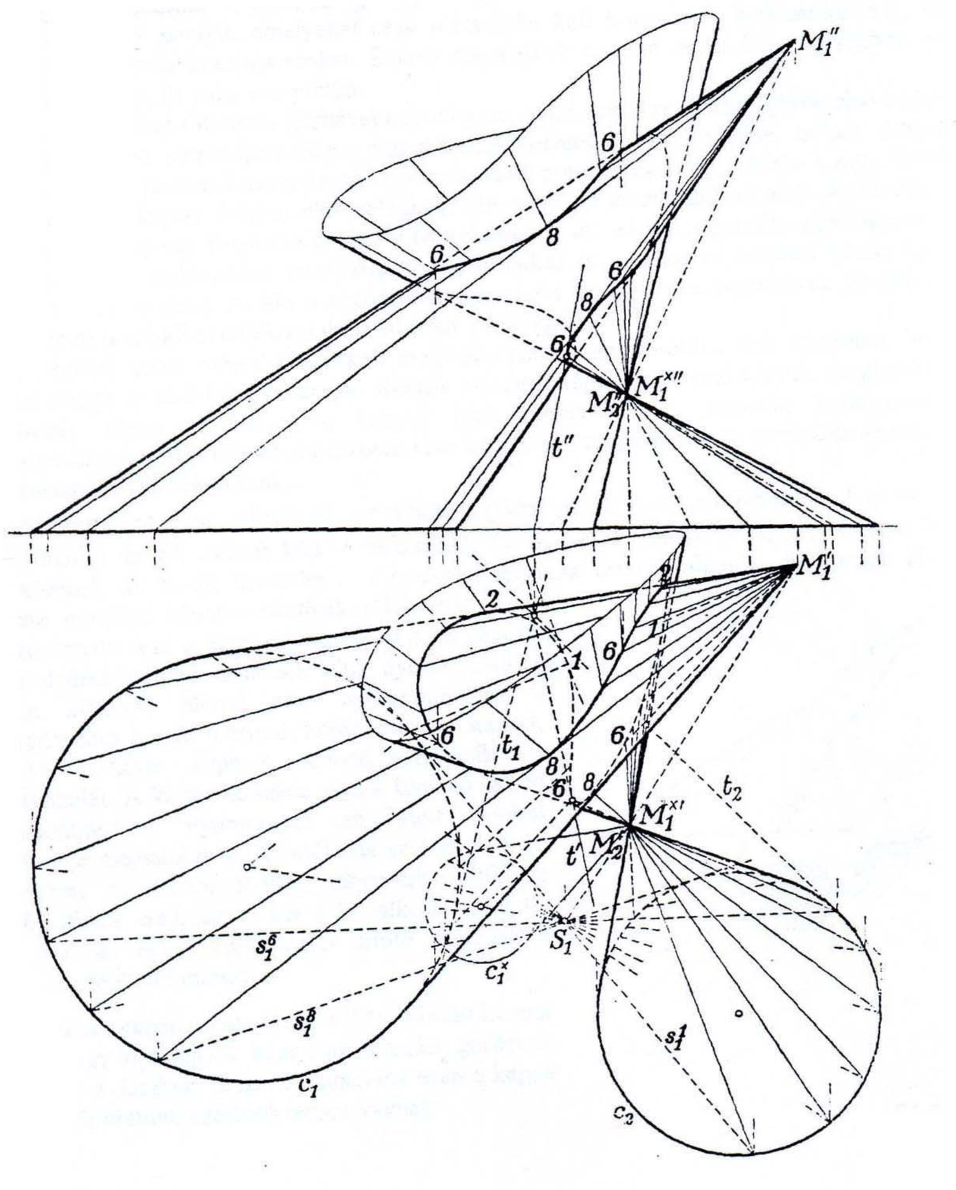


A közös tengelyű forgásfelületek áthatása rendkívül egyszerű. A második képen éppen egy-egy meridiánmetszetet láthatunk, így a közös pontok általi körök képe egy-egy szakasz.

Ebben az esetben egy kör lesz az áthatás. Mivel a közös forgástengely éppen első vetítőegyenes, ezért az áthatási görbeként kapott kör az első képen valódi nagyságban látszik.

<u>6. PÉLDA:</u> *Két kúp áthatása*

Főbb tulajdonságok: lengősíkok módszere, bemetszés.



A fenti szerkesztés lengősíkos eljárást alkalmaz. Mindenekelőtt meg kell vizsgálni, hogy a két kúpnak vannak-e párhuzamos alkotói. Ugyanis ha lesznek ilyen alkotók, akkor az áthatás széteső lesz. Toljuk el az M_2 csúcsba a c_1 alapgörbéjű kúpot – így kapjuk meg a c_1* alapkörű kúpot. A c_2-kúp és ez a kúp nem metszi és nem is érinti egymást. Tehát nincsenek párhuzamos alkotók.

Határozzuk meg a két kúp csúcspontján áthaladó egyenest és az első nyompontját (S_1) – ez lesz a lengősíkok tartóegyenese és a nyompont pedig a lengősíkok nyomvonalainak sorozópontja. Most végezzük el a korábbi példákból ismert lengősíkos módszert.

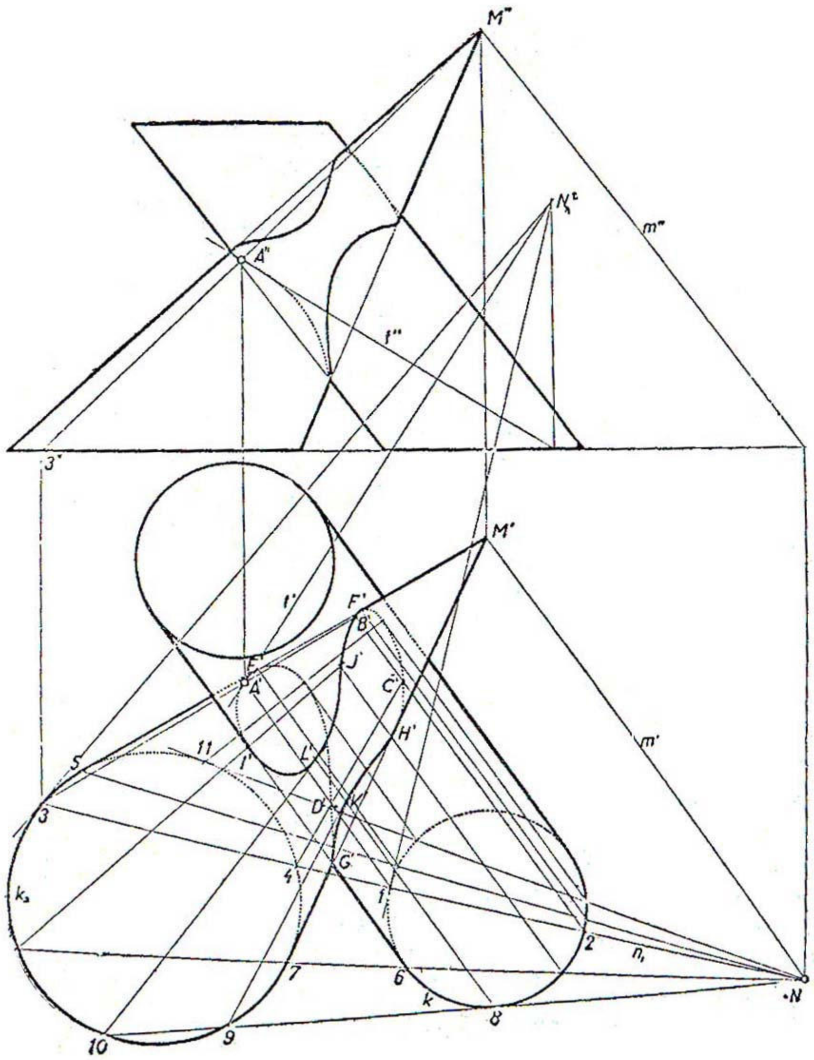
Az áthatás most bemetszés. Tekintsük a c_2 körhöz érintő helyzetű lengősíkot – ez adja meg a *8*-as pontokat, melyek a bemetszési görbe szélső helyzetű pontjai.

A pontok összekötése egyszerűbb, mint síklapú esetben. Kiválasztunk egy kúpot és az alkotókon egy irányban végighaladva kötjük össze a pontokat. Ahol két pont is található, akkor kell megvizsgálni a másik kúpot, hogy melyik ponttal köthető össze az előző pont úgy, hogy a felületen végighaladó görbe vonalat kapjunk.

Érdekes még megfigyelni a második képen a kontúrpontokat. Azt már tudjuk, hogy a kontúralkotókon találjuk az áthatási görbe kontúrpontjait – vagyis a kontúralkotók lengősíkjára van szükségünk. Ilyen pontok a *6*-os pontok.

<u>7. PÉLDA:</u> *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: lengősíkos eljárás; bemetszés; érintőegyenes az áthatási görbén.



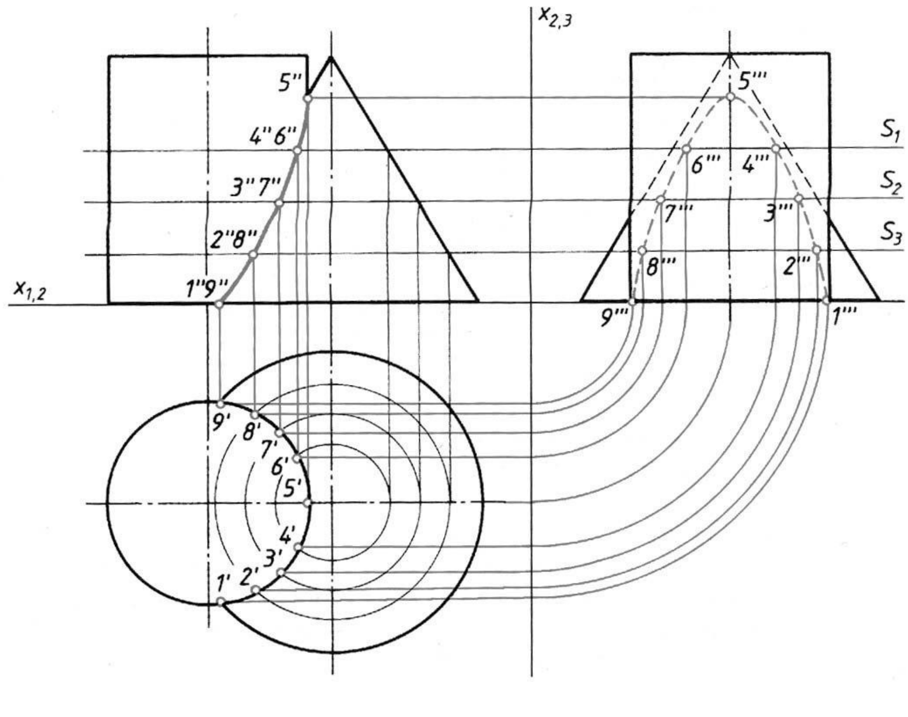
A lengősíkos eljárásra sok példát láthattunk az előzőekben. Emiatt csak azokra a szerkesztési lépésekre koncentrálunk, melyek eltérőek a korábbiakhoz képest.

A kúp és henger áthatása során a lengősík tartóegyenese a kúp csúcsán átmenő, a henger alkotóival párhuzamos egyenes (*m*). A nyompontjából (*N*) vezetjük a lengősíkokat.

Az ábrán példát láthatunk az áthatási görbe egy pontjának érintőjének meghatározására is. Ez a pont most az *A* pont. Azt már tudjuk, hogy legkönnyebben úgy kapjuk meg az érintőt, ha a pontot meghatározó két alkotóhoz vesszük a felületi érintősíkokat, majd megrajzoljuk a metszésvonalukat. Jelen esetben a két alkotó nyompontja *1* illetve *3* (természetesen egy lengősíkhoz tartoznak). Nem szükséges meghatározni a teljes síkokat, elég csupán a nyomvonalakat megszerkeszteni. Az érintőegyenes nyompontja ugyanis mindkét nyomvonalon rajta kell, hogy legyen – tehát a két érintősík nyomvonalának metszéspontja adja a nyompontját. Továbbá mint *A*-beli érintőegyenes természetesen áthalad az *A*-n. A két nyomvonal metszéspontja N_1^2 Ezt – mint nyompontot – kössük össze az *A'*-vel, majd határozzuk meg a második képet is. Ezzel megszerkesztettük az *A*-beli görbeérintőt (*t*).

8. <u>PÉLDA:</u> *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: párhuzamos forgástengelyek; szeletelősíkok módszere; közös szimmetriasík; kettős vetület.



A rajz egy párhuzamos forgástengelyű egyenes hengert és egyenes körkúpot ábrázol. A szeletelősíkok paralel köröket metszenek ki. A henger összes ilyen köre az első képen ugyanabban a körben látszik, míg a kúp esetében koncentrikus körök.

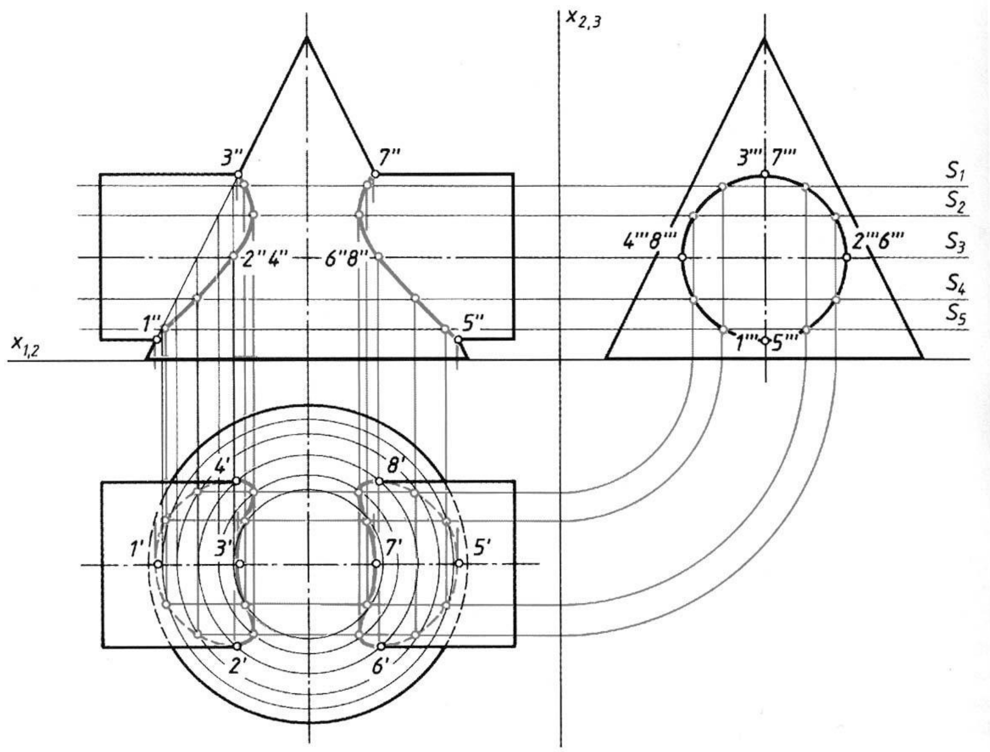
Az áthatás bemetszésnek tűnik, azonban ha a teljes felületeket megrajzolnánk, akkor a henger átdöfne a kúpon. A szélső helyzetű pontjai az alábbiak: *1*, *9*, *5*. Az *5* pont a legmagasabban fekvő pont, a legalacsonyabb pontok az *1* és *9*.

Vizsgáljunk meg egy szeletelősíkot – például a S_2 síkot. A második képen a szeletelősík egy egyenesben látszik (mivel merőleges a tengelyekre, melyek első vetítőegyenesek). Ez kimetszi a kúpból és a hengerből a megfelelő sugarú paralel köröket (mivel vetítősíkban vannak, ezért az átmérő valódi nagyságban látszik). Az első képre vetítve a körök metszéspontjait megszerkeszthetjük, majd rendezővel meghatározzuk az áthatási pontok második képét is.

A harmadik kép jelen esetben arra szolgál, hogy szemléletesebb képet kapjunk az áthatási görbéről. Figyeljük meg továbbá, hogy a közös szimmetriasík miatt a második kép kettős vetület.

9. PÉLDA: *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: merőleges és metsző tengelyek; teljes áthatás; szeletelősíkok módszere (+új képsík); közös szimmetriasík; kettős vetület.

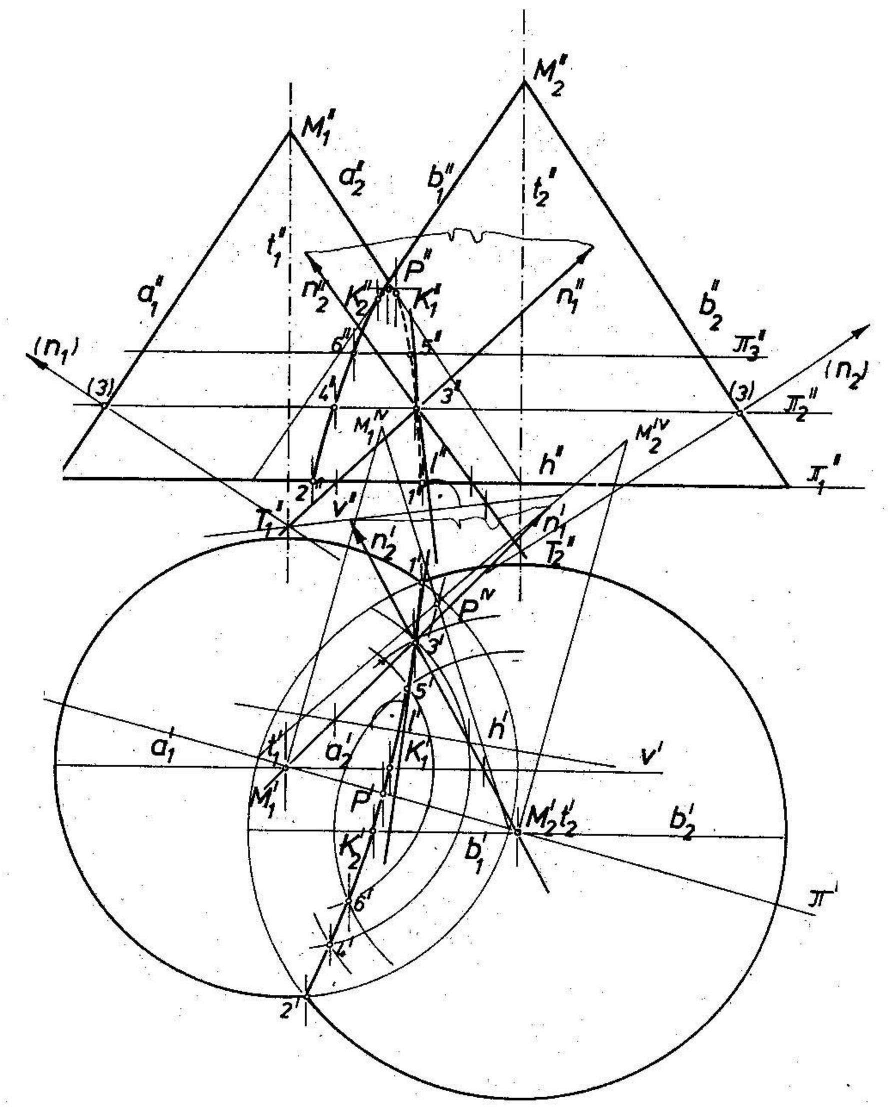


Ez a feladat az előző példa „nehezítése”. A probléma megoldása teljesen hasonló. Azonban itt a harmadik kép nyújt nagy segítséget, ahol a henger éppen körben látszik, így az áthatási görbe képe is ez. (A szerkesztés csak speciális helyzetű pontokat határozott meg.)

Lényeges látni, hogy mivel a testek közös szimmetriasíkokkal rendelkeztek, így az áthatási görbe mind a második, mind a harmadik képen kettős vetületben látszik.

<u>10. PÉLDA:</u> *Két kúp áthatása*

Főbb tulajdonságok: párhuzamos forgástengelyek; szeletelősíkok módszere; érintőszerkesztés; közös szimmetriasík.



A szeletelősíkok a tengelyekre merőlegesek – itt speciálisan első fősíkok. Az áthatási pontok megszerkesztése a korábbiakkal egyező módon történhet. Létezik közös szimmetriasík, melyet π–vel jelöltünk. A szimmetriasík viszont nem első- és nem második vetítősík – így nem keletkezik kettős vetület (azonban a képeken szimmetria fennáll).

A K_1 és K_2 pontok kontúrra eső pontok – meghatározásuk lengősíkos eljárás nélkül is könnyen megoldható. Bár a rajz már csak a végeredményt mutatja – a kontúralkotókkal mint egyenesekkel döftük el a másik kúpot.

Az ábra azonban példát hoz érintőszerkesztésre is – a *3* pontban. Az érintő meghatározása felületi normálisok segítségével történik. Forgassuk ki mindkét kúpon a *3* pontot a második kontúralkotókig – itt meg tudjuk határozni a két normálist. Ahol a forgástengelyeket metszik a normálisok forgatottjai ((n_1) és (n_2)) – mivel a forgatás során a tengely fix – ugyanezen a pontokon átmennek a valódi normálisok. Továbbá átmennek a *3* ponton is. Tehát a két normális: $T_1 3$ és $T_2 3$. Vegyük az ezek által meghatározott sík első és második fővonalát (*h* és *v*). A normálisok síkjára – az elmélet szerint – merőleges lesz a pontbeli érintő. Ennek képi feltétele, hogy a sík nyomvonalaira vagy fővonalaira az érintő képe legyen merőleges. Emiatt utolsó lépésben a *3* pontból állítunk merőlegest a fővonalakra – így kapjuk meg az *l* érintőt.

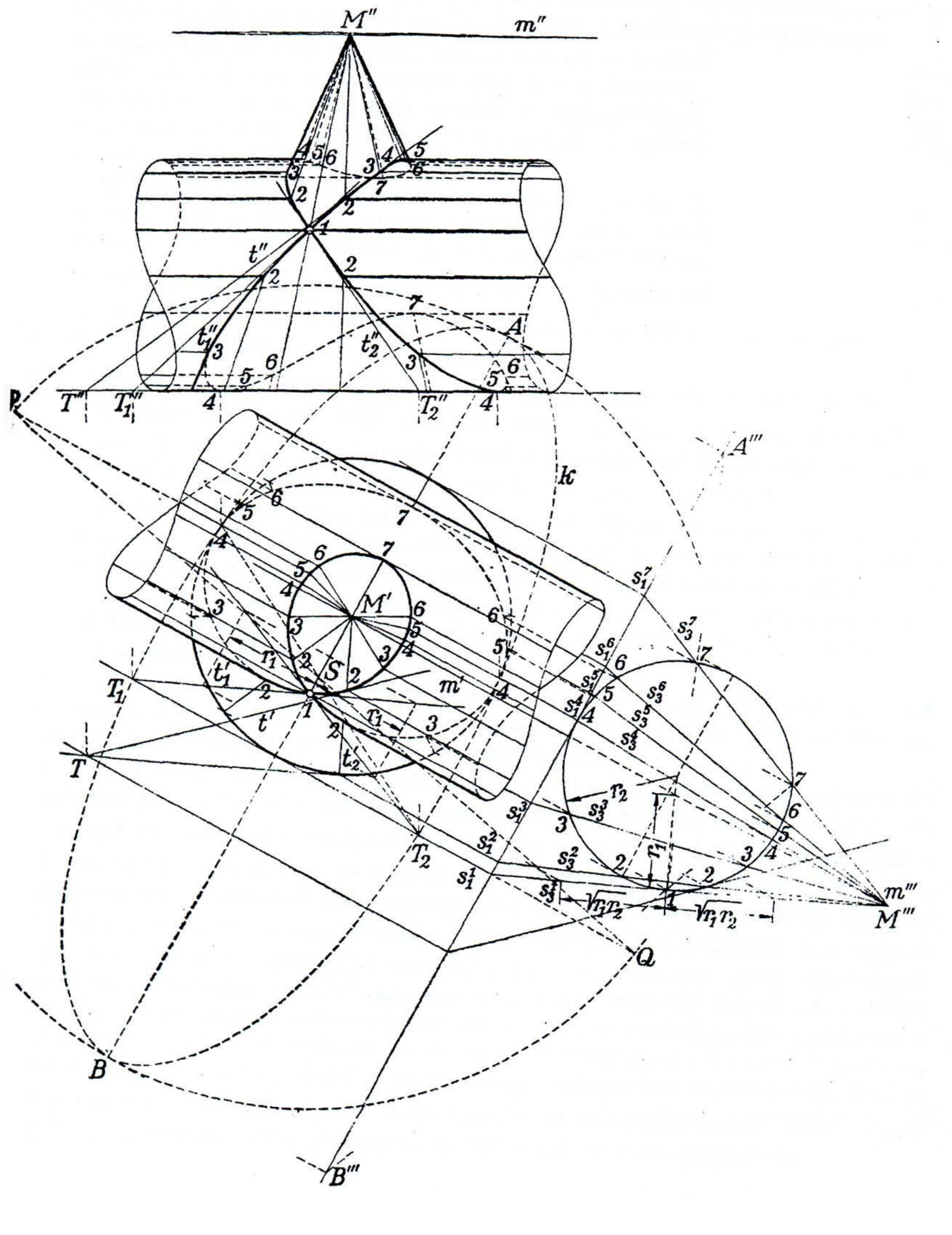
<u>11. PÉLDA:</u> *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: merőleges és kitérő forgástengelyek; kettőspont; érintő a kettőspontban – Dupin-indikátrix; közös szimmetriasík; lengősíkok módszere.

Ez az eset a bemetszés és áthatás átmenete. A lengősíkok között van egy, mely egy-egy alkotóban érinti mind a kúpot, mind pedig a hengert.

Itt tehát kettőspont keletkezik. Azt tudjuk, hogy a kettőspontban az érintő a Dupin-indikátrixok segítségével adható meg. Ebben a feladatban egy másik eljárással is meghatározzuk az érintőket.

A lengősíkos eljárás a már megoldott példákkal egyezően történik. A lengősíkok tartóegyenese: *m*. Mivel létezik közös szimmetriasík – így az áthatási görbe szimmetrikus alakzat lesz. A kontúralkotókon lévő pontok megkeresése is azonos a korábbi módszerekkel, ahol lengősíkot használtunk (a lengősíkot a kontúralkotón vezetjük és megkeressük az áthatási pontot).

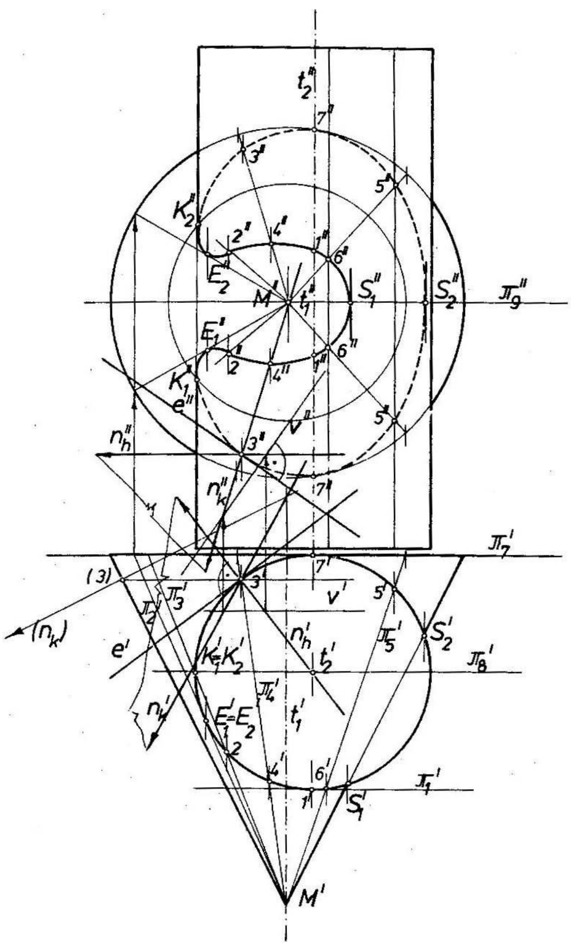


Térjünk rá az ábra problémásabb részére – az *1* pontban az érintők meghatározására. Tudjuk, hogy a keresett két érintő nyompontjai a közös érintősík nyomvonalán helyezkedik el (s_1^1). Kössük össze a görbe pontjait az *1*-es ponttal és keressük meg ezen egyenesek nyompontjait. Így egy folytonos görbét kapunk. Ez a görbe az áthatási görbe kétszeres pontjából való vetítéssel keletkezett – tehát a negyedrendű térgörbe képe másodrendű síkgörbe lesz!!! (Ebben az esetben egy ellipszis.) A másodrendű görbének a *7*-es pont megadja a tengelypontjait. Keressük meg az ellipszis és a nyomvonal közös pontjait ortogonális tengelyes affinitás segítségével. A két kapott nyompont adja a keresett érintők nyompontját.

Mindezt a Dupin-indikátrixok felhasználásával is megadhatjuk. Vegyünk egy új képsíkot, mely párhuzamos a közös szimmetriasíkkal. Ismert, hogy a kúp és a henger pontjai parabolikus pontok, tehát az indikátrixok párhuzamos egyenespárok lesznek. A kúp *1*-beli alkotójától az érintősíkban $\sqrt{r_1}$ távolságban vannak a párhuzamos egyenesek, hasonlóan a henger esetén is, ott a távolság $\sqrt{r_2}$. Ezek egy téglalapot adnak – amelyet felnagyíthatunk $\sqrt{r_1}$-szeresen. Mérjük rá a $\sqrt{r_1 \cdot r_2}$ hosszúságot a kúpalkotóra, ezek végpontján át párhuzamost húzva a hengeralkotóval, majd a hengeralkotóra mérjünk fel r_1–et és húzzunk a végpontokból párhuzamost a kúpalkotóval. Ennek a téglalapnak az átlói éppen az érintők.

<u>12. PÉLDA:</u> *Kúp és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: merőleges és kitérő forgástengelyek; szeletelősíkok módszere; érintő egy áthatási pontban; közös szimmetriasík; kettős vetület.

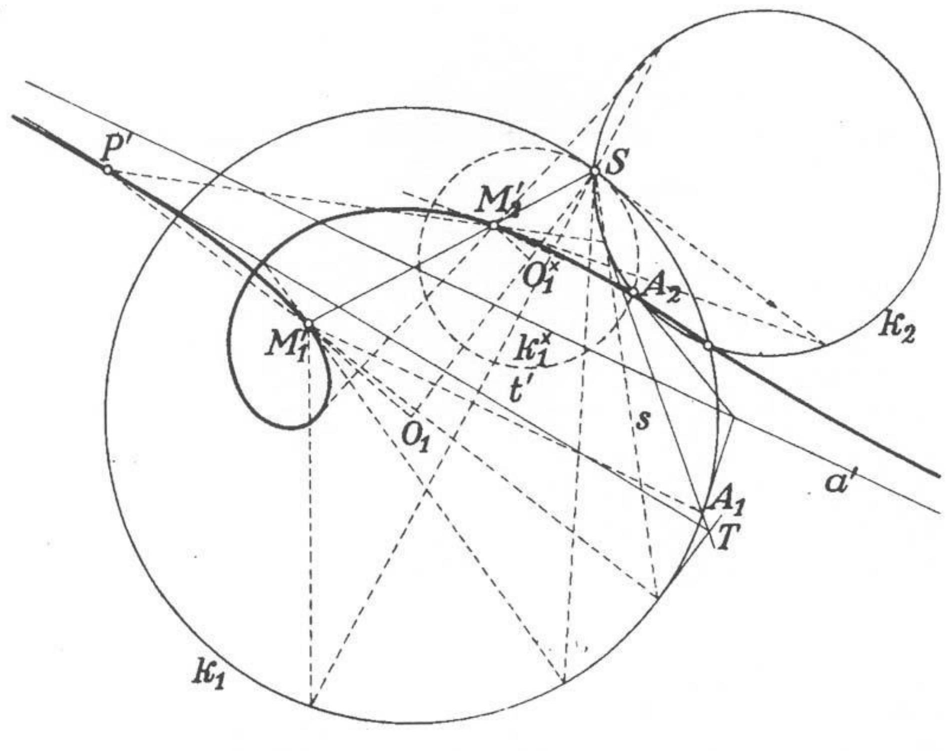


A fenti rajz egy hengert és egy kúpot ábrázol. A henger tengelye első vetítőegyenes, a kúp tengelye második vetítőegyenes. A kúp tengelyére merőlegesen szeletelünk – így a kúpból paralel köröket, a hengerből párhuzamos alkotókat metsz ki.

Az *3*-as pontbeli érintő meghatározása a *10. példa* szerint történt (a henger esetében – a speciális helyzete miatt – nem szükséges az alkotó kiforgatása).

<u>13. PÉLDA:</u> *Két kúp áthatása*

Főbb tulajdonságok: harmadrendű térgörbe; lengősíkos eljárás.



Ez az áthatás klasszikus példa arra, amikor a negyedrendű térgörbe szétesik egy alkotóra és egy harmadrendű térgörbére.

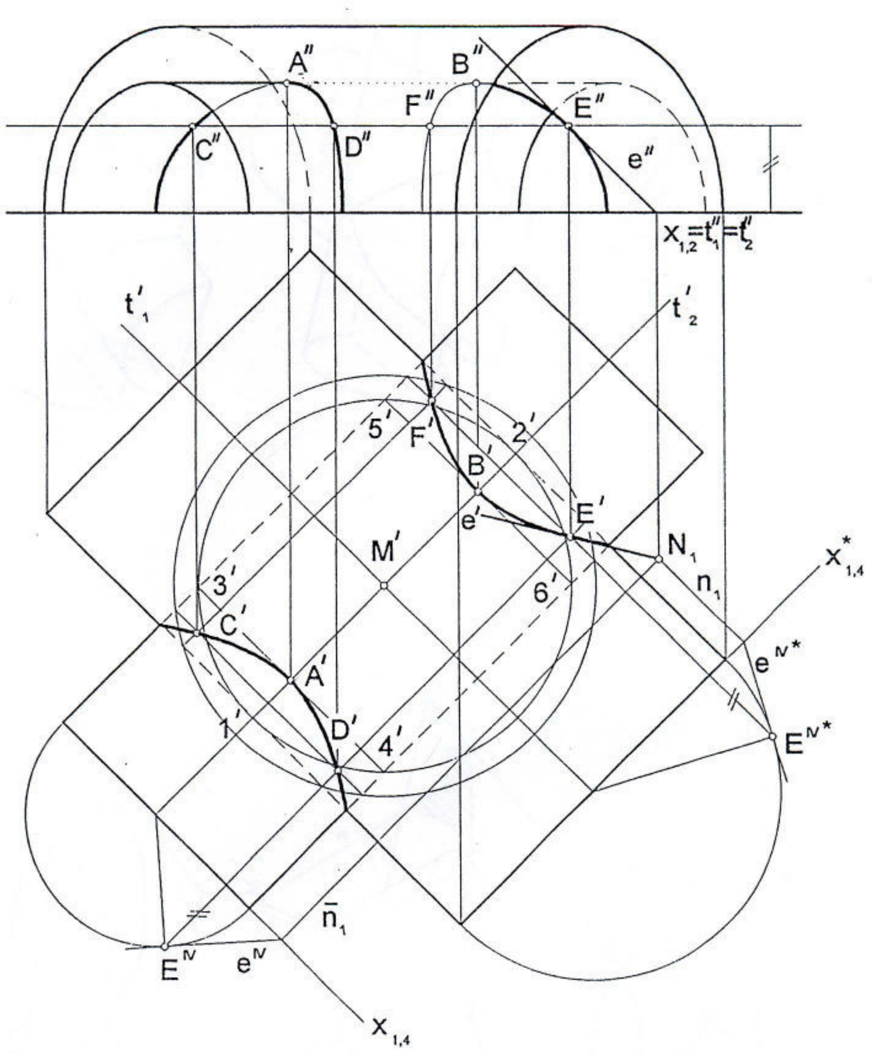
Közös alkotó tehát az M_1 és az M_2 általi egyenes. Ezen keresztül lengetjük a síkokat, a nyompont: *S*. Egy ilyen lengősíkkal most csak egy „használható" metszéspontot kaphatunk (a többi valamely csúcspontba vezet).

Szerkesszünk meg egy *P* példapontot: Vezessünk *S*-en át egy *s* nyomvonalú lengősíkot. A már jól ismert módon megkapjuk *P*-t. A kúpokhoz érintőt húzva a nyomvonalat egy *T* nyompontot adnak, ez a *t* (*P*-beli) érintőegyenes nyompontja.

Egy pont meghatározása lehet érdekes – a végtelen távolban lévő ponté. Toljuk el az M_1 csúcspontú kúpot az M_2–be. A két alapkör hasonlósági középpontja S, az arány pedig SM_1:SM_2. Legyen az A_2 az új alapkör és a másik alapkör metszéspontja. Az M_2A_2 adja meg a szükséges irányt (párhuzamos alkotók iránya). A pontba mutató aszimptota helye pedig a két párhuzamos alkotó érintősíkjának metszésvonala (nyompontok metszéspontjába kell eltolni a közös irányt). Ez azért igaz, mert az érintőknek rajta kell lenni az érintősíkon, tehát az áthatási görbe érintőjének rajta kell lennie mindkét érintősíkon – azaz az érintősíkok metszésvonala lesz.

<u>14. PÉLDA:</u> *Két félhenger áthatása*

Főbb tulajdonságok: kettős vetület; merőleges és metsző tengelyek; közös szimmetriasíkok; teljes áthatás; segédgömbök módszere; érintő egy pontban.



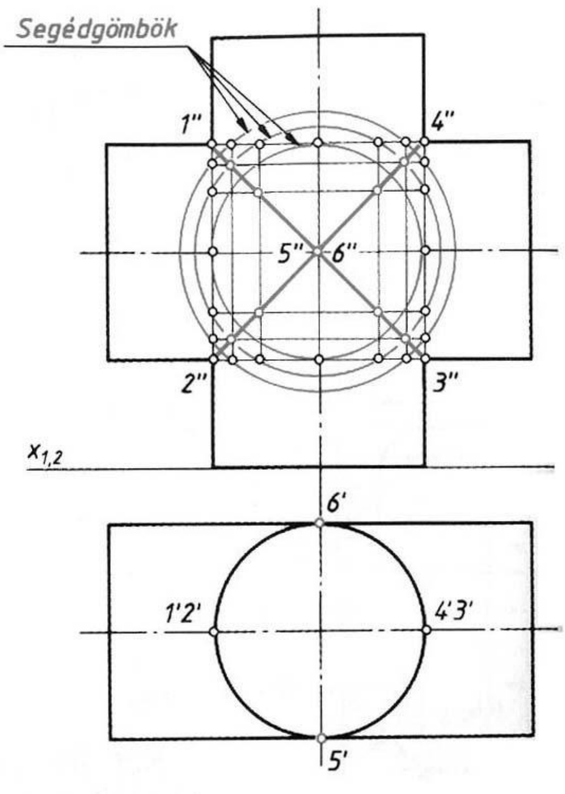
Az áthatás megszerkesztését segédgömbök segítségével végezzük el – ugyanis a tengelyek metszőek. Maga az eljárás nem bír különösebb érdekességgel. Ami fontos az ábrában az a kettős vetület, és az áthatási pontbeli érintő meghatározása.

Azt tudjuk, hogy egy negyedrendű térgörbe kettős vetülete másodrendű görbe. Mivel itt a görbe két részből áll – a képe is két részből tevődik össze. Az áthatási görbe kettős vetülete tehát egy hiperbola (illetve itt annak darabjai).

Tekintsük az *E* pontot és keressük meg az érintőjét. Az érintőt a két érintősík metszésvonala adja meg. Adjuk meg a félhengerek speciális negyedik képeit (különbözőek!). A hengerek félkörökben látszanak, az érintősíkok pedig a félkörök érintőegyeneseiben. A két érintősík nyomvonala a negyedik képek segítségével azonnal megadható – és ezek metszéspontja az érintő nyompontja. Az érintőt tehát az N_1 és *E* pontok adják.

<u>15. PÉLDA:</u> *Két henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: másodrendű görbékre széteső áthatás; kettős vetület; teljes áthatás; segédgömbök módszere.

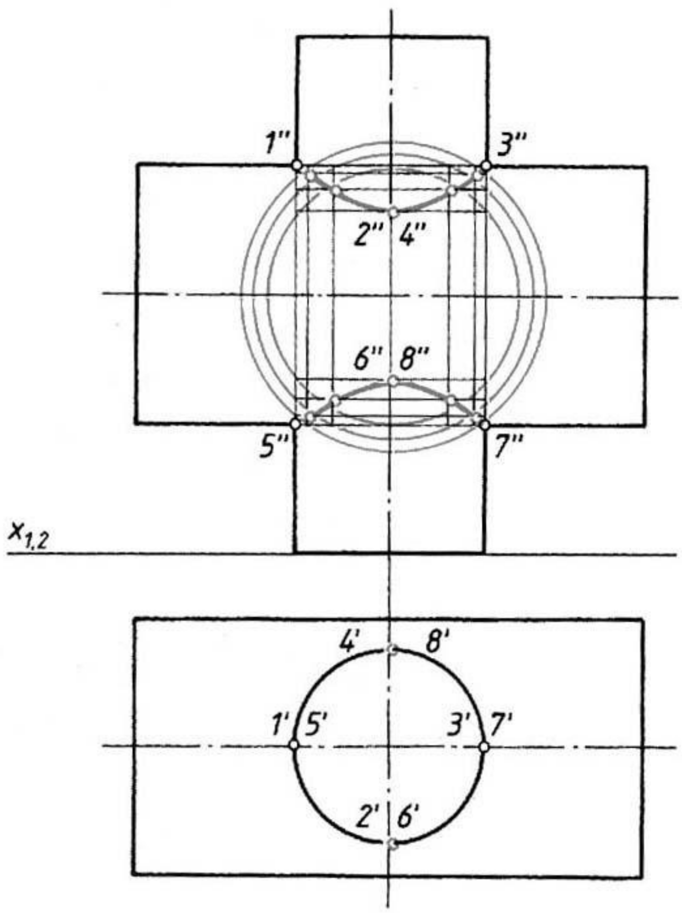


Az ábra az egyszerűsége miatt nem kíván sok magyarázatot.

Csupán annyit kell megindokolni, hogy miért esik szét két ellipszisre az áthatás. Azt láthatjuk az első képen, hogy a hengereknek az *5* és *6* pontban közös az érintősíkjuk (első vetítősíkok) – tehát két kettőspont keletkezik. A két kettőspont miatt a negyedrendű térgörbe két másodrendű síkgörbére esik szét. A második képen a kontúrpontok metszéspontjai biztos áthatási pontok (*1,2, 3* és *4*). Megfigyelhető továbbá, hogy az *13* és a *24* által adott második vetítősíkok éppen úgy metszik el mindkét hengert ellipszisben, hogy azok az ellipszisek – triviális módon – egybeesnek. Azaz kétféle módon is megindokoltuk, hogy miért esett szét az áthatás két ellipszisre.

<u>16. PÉLDA:</u> *Két henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: teljes áthatás; kettős vetület; közös szimmetriasíkok; segédgömbök módszere.

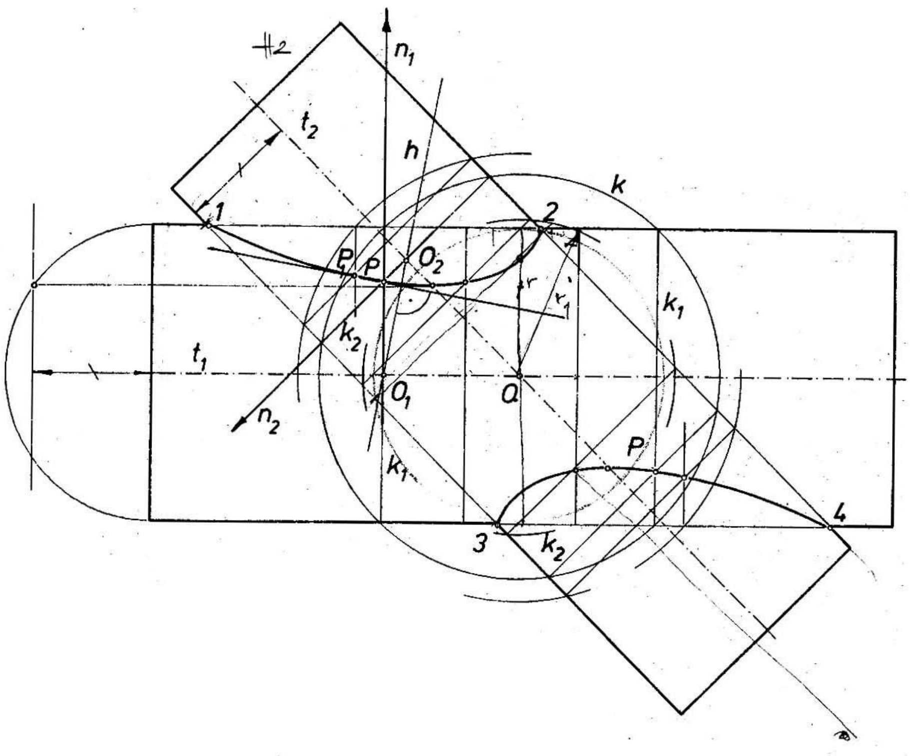


A két hengernek 3 közös szimmetriasíkja van – első, második fősíkok és egy profilsík. Emiatt mindkét képen kettős vetületre számíthatunk.

Az első képen a kisebb sugarú henger képe éppen az áthatási görbe képe. Vizsgáljuk meg a második képet. Vegyük a két párhuzamos egyenespárba beírható köröket (segédgömbök képei) és a kontúrok találkozásánál adódó segédgömböt, végül egy általános helyzetű segédgömböt. A legkisebb gömb a *2,4,6* és *8* pontokat adja, a legnagyobb az *1,3,5* és *7* pontokat. Jelzés nélkül látható a nagyobb sugarú hengerbe beírt gömb képe illetve egy tetszőleges gömb. Ahol a gömb képei metszik a henger képeit – az azok általi paralel körök metszéspontjai adják az áthatási pontokat. A paralel körök itt szakaszokban látszanak.

17. PÉLDA: *Két henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: metsző forgástengely; közös szimmetriasík; kettős vetület; segédgömbök módszere; érintő egy pontban.



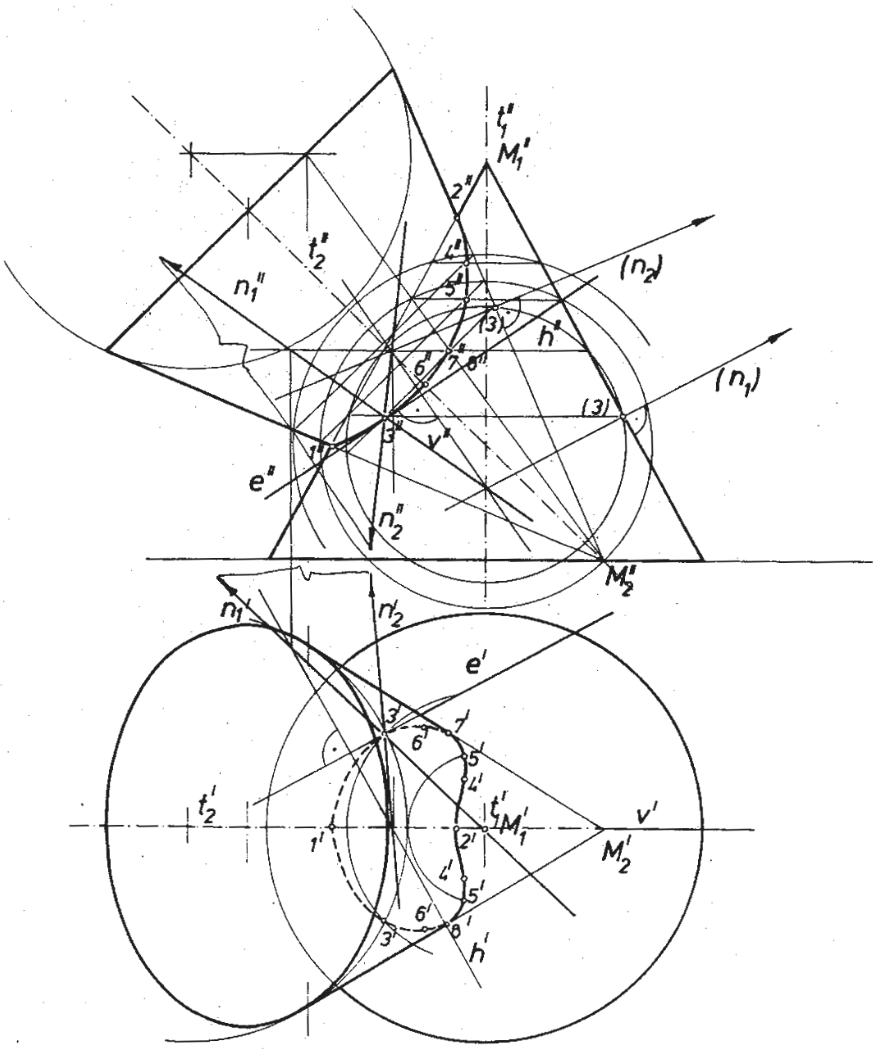
A tengelyek által meghatározott sík éppen első fősík. Az áthatási görbe éppen ezért kettős vetületben látszik. A kontúrpontok az *1, 2, 3* és *4*.

Vizsgáljuk végig egy tetszőleges helyzetű *P* pont szerkesztését. Vegyünk egy tetszőleges segédgömböt, melynek első képe a *k* kör. A segédgömb köröket metsz ki a hengerekből. Ezek a körök itt speciálisan szakaszokban látszanak. Egy-egy szakasz metszéspontja – azaz egy-egy kör (k_1 és k_2) metszéspontjaiból egy lesz a *P* pont.

Szerkesszük meg az *O*-ra szimmetrikus másik *P* pont érintőjét. A *10. példá*hoz hasonlóan járunk el – azaz normálisokkal határozzuk meg az érintőt.

18. PÉLDA: *Két kúp áthatása*

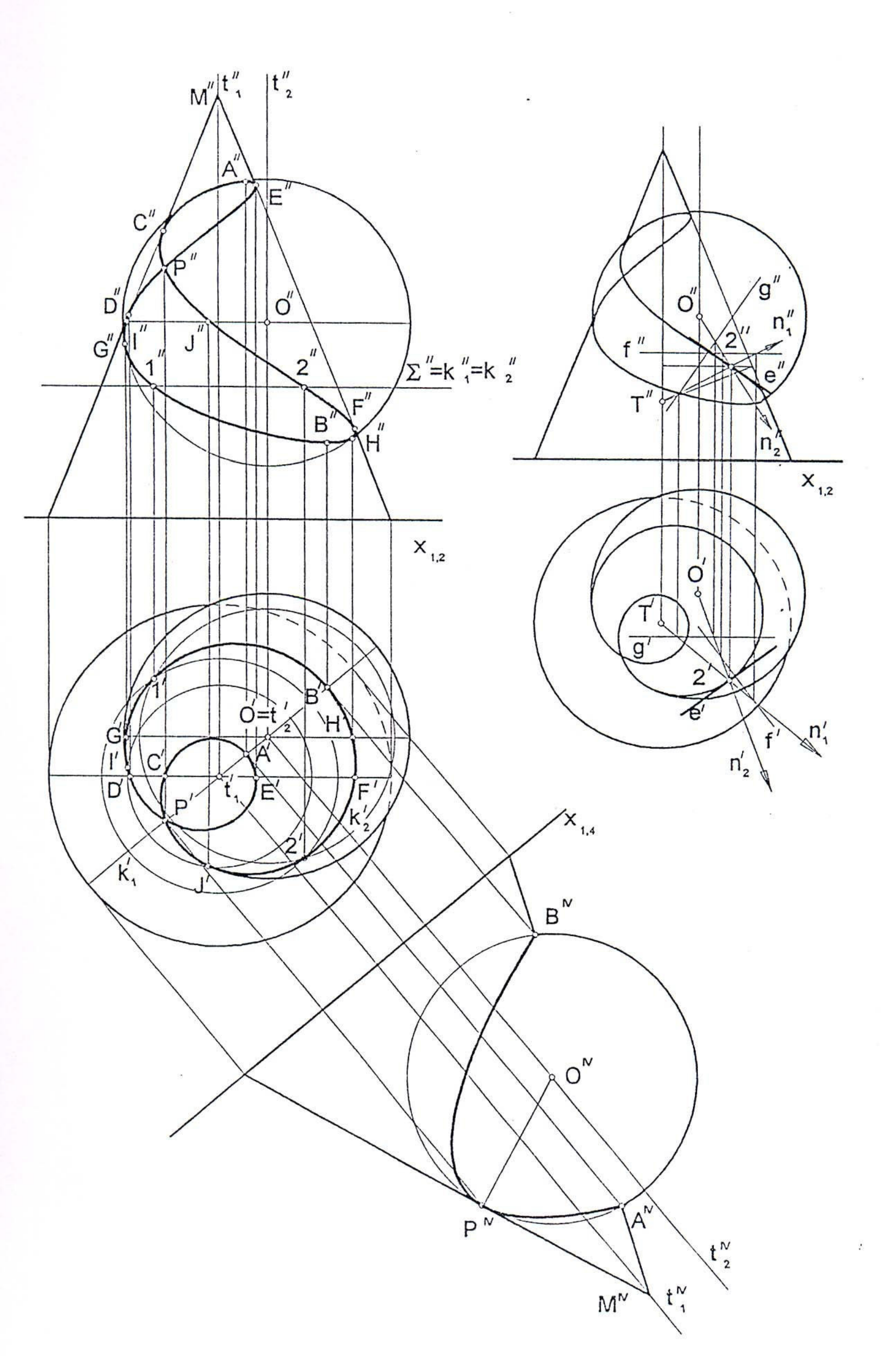
Főbb tulajdonságok: metsző tengelyek; segédgömbök módszere; érintő egy pontban; érintőgömb a kontúrhoz; közös szimmetriasík; kettős vetület.



A kúpok közös szimmetriasíkja a második képsíkkal párhuzamos, ezért a második képen kettős vetületet kapunk. Tehát az *1* és *2* pontok kivételével a második képen minden áthatási pont két pont képe. Első kontúrpontok – *7* és *8*. A kontúrpontokat itt nem segédgömbökkel kapjuk – hanem úgy tekintünk a kontúralkotókra, mint egyenesekre és eldöfjük ezekkel a másik kúpot.

19. PÉLDA: *Gömb és kúp áthatása*

Főbb tulajdonságok: párhuzamos forgástengelyek; kettőspont; közös szimmetriasík; kettős vetület; érintő egy pontban; szeletelősíkok módszere.



A párhuzamos forgástengelyek miatt a tengelyekre merőlegesen szeleteljük. Így egy-egy kör metszéspontjait kell meghatározni.

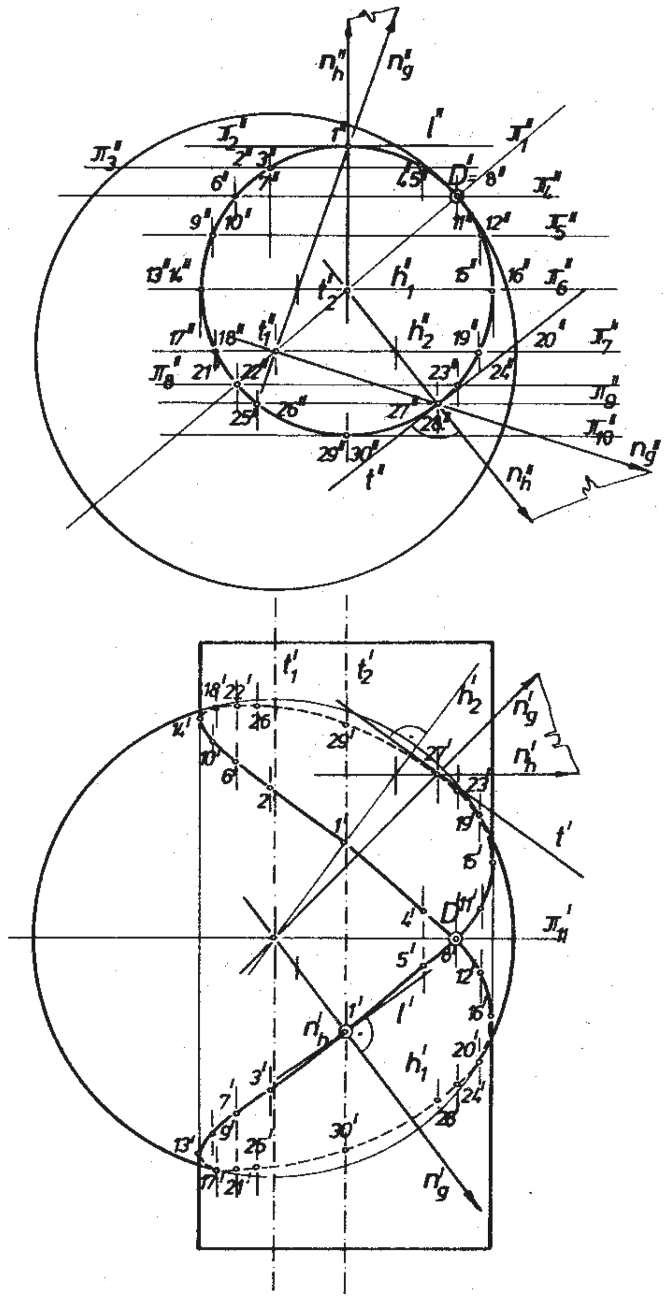
A gömbnek és a kúpnak a *P* pontban közös az érintősíkja – itt kettőspont keletkezik.

A 4. képsík a közös szimmetriasíkkal párhuzamos – emiatt a 4. képen kettősvetület keletkezik. Ezen a képen könnyű látni az áthatás legalsó illetve legfelső pontját: *A* és *B* pontokat.

A másik ábrán a *2* pontban érintőszerkesztést láthatunk – normálisok segítségével.

<u>20. PÉLDA:</u> *Henger és gömb áthatása*

Főbb tulajdonságok: Viviani-görbe; párhuzamos forgástengelyek; kettőspont; közös szimmetriasík; kettősvetület; szeletelősíkok módszere; érintőegyenesek szerkesztése.



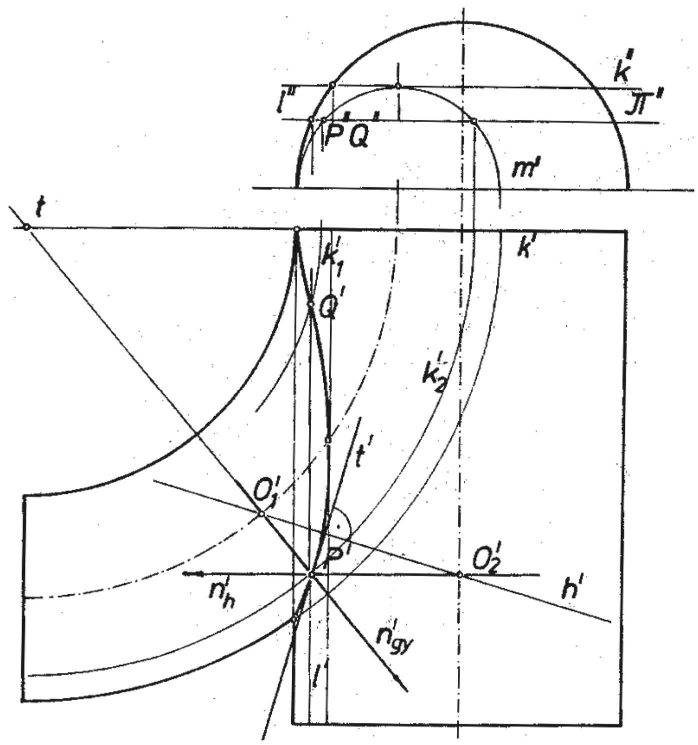
Az ábra érdekessége maga az áthatási görbe – az úgynevezett Viviani-görbe.

A második képen jól látható, hogy a *D* pontban közös lesz az érintősík, a π_1 a közös szimmetriasík. Az érintőszerkesztés normálisok segítségével történik – az *1* és a *27* pontokban.

A szerkesztés többi része a korábbi példák segítségével könnyen elvégezhető.

21. PÉLDA: *Tórusz és henger áthatása*

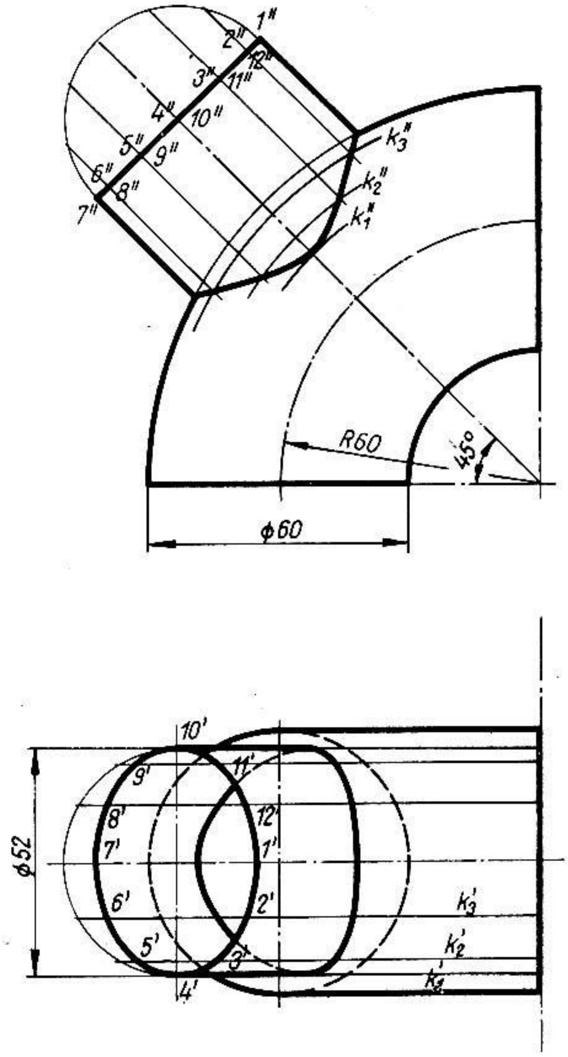
Főbb tulajdonságok: kitérő tengelyű forgásfelületek; kettőspont; közös szimmetriasík; kettős vetület; érintő egy pontban; szeletelősíkok módszere.



A rajz egy nyolcad tórusz és egy félhenger áthatását mutatja. A tengelyek kitérőek, de merőlegesek egymásra – ezért a szeletelés könnyen adja az áthatási pontokat. A tóruszból köröket, a hengerből alkotókat metsz ki. A közös szimmetriasík első fősík – az első két tehát kettősvetület. A görbe kettőspontja jelen esetben éppen a testek végpontja és kontúrpontja is. A *P*-beli érintőt normálisok segítségével szerkesztettük meg.

22. PÉLDA: *Tórusz és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: „teljes” áthatás; metsző tengelyek; szeletelősíkok módszere; közös szimmetriasík; kettős vetület.

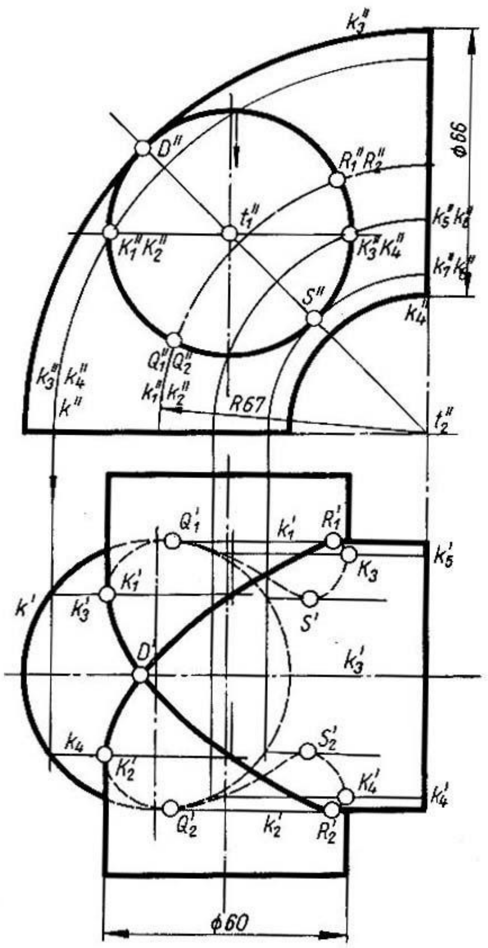


A fenti szerkesztés egy negyed tórusz és egy hengerdarab áthatását mutatja. A henger csonkolt állapotban látszik – azaz az áthatási görbéig rajzoltuk csak meg.

A tengelyek metszőek, azonban itt a segédgömbös szerkesztés helyett érdemesebb szeletelősíkokkal dolgozni. Az előbbi feladathoz hasonlóan a hengerből alkotókat, a tóruszból paralel köröket metsz ki. A szimmetriasík második fősík, így a második képen az áthatási görbe kettős vetületben látszik. Az első képen a szélső helyzetű áthatási pontokat a henger kontúralkotói és a szimmetriasík áthatási pontjai adják.

23. PÉLDA: *Tórusz és henger áthatása*

Főbb tulajdonságok: kettőspont; kitérő és merőleges tengelyek; szeletelősíkok módszere; közös szimmetriasík; kettős vetület.

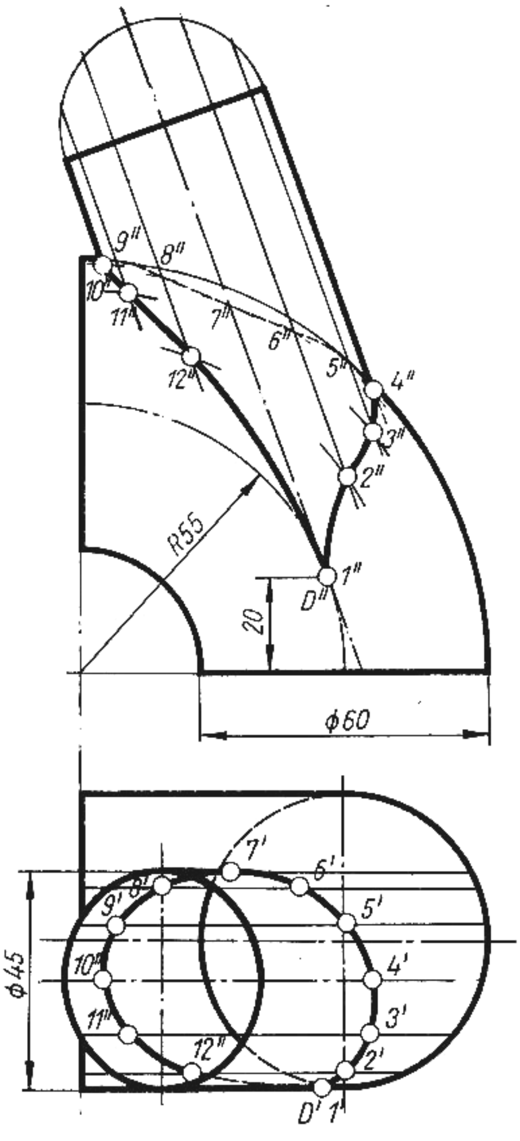


A példa az előző rajz módosítása. A *D* pontban közös az érintősík – tehát itt kettőspont keletkezik. Az első képen a legfelső és legalsó pontokat a tórusz két szélső helyzetű köre adja, melyek parabolikus pontokból állnak.

Láthatóság szempontjából vizsgálva a szerkesztést, azt kell megállapítani, hogy mely pontokon csatlakoznak egymáshoz a forgástestek kontúralkotói és az áthatási görbe. Ezek a pontok azonnal adódnak, például: K_1 és K_2 pontok azért lesznek csatlakozópontok, mert a henger kontúrgörbéjén vannak, és áthatási pontok is egyben.

<u>24. PÉLDA:</u> *Tórusz és henger áthatása*

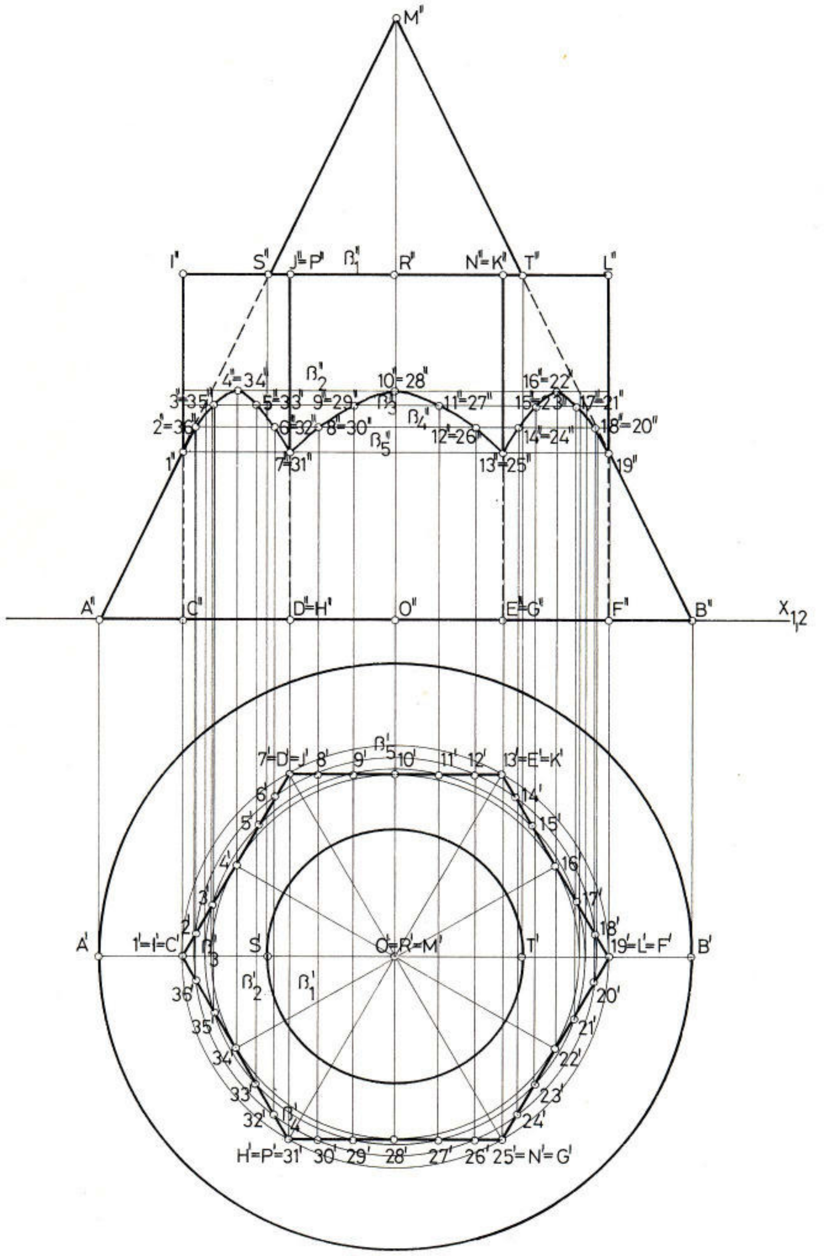
Főbb tulajdonságok: „teljes" áthatás; kitérő és merőleges tengelyek; szeletelősíkok módszere; közös szimmetriasík; kettős vetület; csúcspont.



A feladat az előző két példához hasonló. Érdekessége az áthatási görbe *1*-es pontja, mely csúcspont. Szemléletesen szólva ez a pont azért keletkezett, mert az *1* pont éppen a tórusz legmagasabb pontjában lett kettőspont. Az ábrán nem látható a henger másik része – de természetesen itt az *1* ponton keresztül megy át a közös szimmetriasík, amire maga az áthatási görbe is szimmetrikus.

<u>25. PÉLDA:</u> *Kúp és hasáb áthatása*

Főbb tulajdonságok: közös tengelyű forgástestek; „vegyes” áthatás; szeletelősíkok módszere.



Az ábrán látható áthatást síkmetszések segítségével végeztük el. A speciális helyzet miatt érdemes szeletelősíkokat használni. A hasáb első képe mindig hatszög, míg a második képe minden szeletelés esetén szakasz. Hasonlóan a kúp első képe egy koncentrikus körsereg, a második képen a paralelkörök szakaszokban látszanak.

Érdekességként elmondható, hogy egy-egy hasáblapon keletkező áthatási görbedarabok egybevágóak.

A FORGÁSFELÜLETEK ÉS AZOK ÁTHATÁSAINAK TANÍTÁSA A KÖZÉPISKOLÁBAN

AZ ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA HELYE ÉS SZEREPE AZ OKTATÁSBAN

Az ábrázoló geometria helye az oktatásban

Az ábrázoló geometria mint önálló tárgy az alap- illetve középfokú oktatási intézményekben eléggé ritka. Alapfokú iskolákban szinte egyáltalán nincs ilyen tantárgy. Középfokú iskolákban – tehát gimnáziumokban és szakközépiskolákban – főként a műszaki beállítottságúak tanítanak ábrázoló geometriát. A klasszikus gimnáziumi oktatás keretén belül általában a rajzórákon ismerkednek meg a diákok ennek a tudománynak az alapjaival. A mindennapi élet alátámasztja az ábrázoló geometria oktatásának szükségességét. Ezt a tényt már a jelenkori tankönyvírók is belátták és bizonyos matematika tankönyvekben helyet is kap – azonban még csak mint érdekesség és nem mint használható ismeret.

Az ábrázoló geometria tanításának kérdése megosztja a szakembereket. A humán tárgyakat preferáló oktatók és kutatók nem látják különösebb hasznát és arra hivatkoznak, hogy a mai fejlett technika mellett szükségtelenné válnak a kézzel készített szemléltető ábrák és a térbeli szerkesztések.

A másik csoport ezzel szemben fontosnak tartja az oktatását több okból is. Elsősorban az ábrázoló geometria tanításával a diákok térlátása és gondolkodási módja rendkívüli módon fejlődik. Másodsorban a technika fejlődését éppen az segítheti elő, ha mind a jelenben, mind pedig a jövőben magasan képzett szakemberek segítik a számítógépes-programkészítők munkáját.

Egyetértés van abban, hogy az ábrázoló geometriát főként középfokú oktatási intézményekben érdemes tanítani. Habár az alapok elsajátításához nincs szükség komoly geometriai ismeretekre, de a tárgy igazi lényegét és hasznosságát csakis legalább középiskolás szinten lévő diák értheti meg.

Az ábrázoló geometria a mindennapi életben

Nemcsak módszertani, hanem gazdasági-társadalmi szempontból is kettősség jellemzi az ábrázoló geometriát. Az Európai Uniós csatlakozással mindinkább előtérbe kerül annak fontossága, hogy egy fiatal állampolgár sokrétű és magas szintű képzést kapjon. Megfigyelhető, hogy egyre nagyobb a kereslet a műszaki és építészeti szakképzettséggel rendelkezők iránt. Az ő képzésük szempontjából pedig egyértelműen elengedhetetlen ennek a tárgynak az oktatása. Ugyanakkor a dinamikus technikai fejlődéssel összhangba próbál kerülni a gazdasági élet. Ezért ebben a szférában kulcsfontosságú az olcsó és gyors munkaerő kérdése valamint az élő munka gépi pótlása. Ezeket – sajnos – a mai szakemberek általában úgy oldják meg, hogy minél modernebb technikai eszközökkel cserélik fel a dolgozókat. Ebből kifolyólag a kézi szerkesztések lassúságát és pontatlanságát felváltják a gépi szerkesztések. A számítógépes programokat még a mai napig is emberek készítik el, akik csakis úgy tudnak helyes eredményekre jutni, ha az oktatásuk során gépek nélkül sajátítják el a geometria és az ábrázoló geometria alapjait.

Úgy tűnik tehát, hogy az ábrázoló geometria fenn tud maradni a jövőben is. Bár gyakorlati alkalmazásai háttérbe szorultak, ennek ellenére igen fontos a műszaki, építészeti és matematikai szakképzésekben.

Az ábrázoló geometria előnyei az oktatás során

A következőkben felsoroljuk az ábrázoló geometria tanításának néhány előnyét. A pozitív hatások a többsége a matematika és rajz oktatásában belül figyelhető meg, azonban néhány következmény túlmutat az alap- és középfokú oktatás rendszerén.

1. *Az ábrázoló geometria fejleszti a térlátást.* Ugyanis célja, hogy síkbeli szerkesztésekkel térbeli szerkesztéseket tudjunk végrehajtani. A diákoknak hozzá kell szokni, hogy bizonyos síkbeli ábráknak térbeli jelentésük van. Így a képsík(ok)on látható objektumokból a képzeletükben kell tudni visszaállítani a térbeli objektumokat. A feladatok során pedig a látásmódjuk alkalmazkodik ehhez a helyzethez – azaz fejlődik az a képességük, hogy bizonyos síkbeli ábrákhoz térbeli halmazokat társítsanak. A megfelelő térlátás az élet sok területén

hasznos lehet – például az autóvezetés során is, de a műszaki és építészeti életben mindenképpen. A jó térlátás továbbá matematikai szempontból is hasznos. A bonyolultabb térgeometriai példákhoz szinte elengedhetetlen, hogy a tanuló megfelelően átlássa a térbeli viszonyokat és ilyen nézőpontból kezelje a problémát.

2. *Az ábrázoló geometria csiszolja a problémamegoldó készséget.* Számtalan olyan feladat adódik a tárgy oktatása során, amikor a megoldáshoz több módon eljuthatunk. Tucatnyi út megadhatja a helyes eredményt, ezért a diákokat arra szoktatja, hogy törekedjenek egy-egy példa minden megoldását megtalálni. Megfelelő mennyiségű ábrázoló geometria órával elérhető, hogy ez a fajta megközelítése a problémáknak átterjedjen a geometria és a matematika többi területére. Végső célként pedig megvalósítható, hogy a tudományok minden ágában és az életben is a tanuló ezt a fajta problémamegoldást alkalmazza.
3. *Az ábrázoló geometria finomítja a pszichomotoros képességeket.* A szerkesztések során lényeges, hogy pontos ábrákat készítsünk. A végrehajtás során a gyermekek igyekeznek minél szebb rajzokat csinálni, hogy a végeredmény is korrekt legyen. Általában a tanítás elején ki kell hangsúlyozni a precíz szerkesztés fontosságát. Eredményként a diákok nagy részénél megfigyelhető a rajzok pontosságának növekedése – ezzel együtt a pszichomotoros képességek fejlődése. A mozgásos képesség ilyen módon kiváltott ugrásszerű – akár fél év alatt bekövetkező – növekedése az élet minden területén hasznos.
4. *Az ábrázoló geometria növeli a koncentrációt.* Ugyancsak a precíz rajzolás pozitív hatásaként tartjuk számon azt a tényt, hogy a foglalkozások előrehaladtával fejlődik a koncentrációs képesség és a fegyelem. Az enyhe figyelemzavarban szenvedő tinédzserek és fiatal felnőttek a tárgy tanulása során egyre több ideig képesek koncentrálni, ez pedig ismét nyomonkövethető mindennapjaikban.

Oktatási célok és lehetőségek

Az előzőekben felsorolt érvek nyilvánvalóvá teszik, hogy az ábrázoló geometria sok képesség és készség fejlesztésére alkalmas. A Bloom-féle célrendszert tekintve a három terület minden szintjén megállja a helyét. Röviden:

- *Értelmi fejlesztés* – Különösképpen a három legfelső szint (analízis szintje, szintézis szintje és értékelés szintje) csiszolására szolgálhat az ábrázoló geometria.
- *Érzelmi-akarati fejlesztés* – A fentebb leírtak alapján a koncentrálást és a türelmet (fegyelmet) fejleszti leginkább. Pozitív hatásként ismét megemlítjük a gyenge figyelemzavarban szenvedők állapotának javulását. Ez azért is lényeges, mert 14-16 év felett nehezebb a koncentráción és a fegyelmen változtatni, javítani.
- *Mozgásos fejlesztés* – Itt egyértelműen a finommozgásos tevékenységek jelentős mértékű fejlődését érhetjük el.

Az ábrázoló geometria tanítása során igyekezzünk nagy hangsúlyt fektetni a szemléletességre. Mindenképpen be kell vonni a diákokat egy-egy feladat elkészítésébe, márcsak azért is, hogy a csoport minél több megoldáshoz jusson. Így a tanulók egyre nagyobb kedvvel és javuló problémamegoldó készséggel állnak hozzá a példákhoz. Törekedni kell a közös tanári-tanulói irányításra. Az ábrázoló geometria tanítása általában felfedeztető, továbbá jellegéből adódóan módszerek és ötletek együttesére támaszkodik.

Differenciálás az ábrázoló geometria oktatása során minden probléma nélkül lehetséges. Lehetőséget ad ugyanis arra, hogy egy-egy feladatot kis módosítással különböző képességű gyermekekhez igazítsunk.

Például: Egy sík és egy egyenes döféspontjának megkeresése. A gyengébb képességűeknek egy általános síkot nyomvonalaival adunk meg és egy vetítősugárral keressük a közös pontot. Az ügyesebb diákok egy pontjával és egy egyenesével adott síknak és egy általános helyzetű egyenesnek keresik a döféspontját.

Összességében elmondható, hogy az ábrázoló geometria tanításának alapvető elvei és módszerei megegyeznek a klasszikus matematikatanítás módszereivel. Különbségük csak abban áll, hogy az ábrázoló geometria erőteljesebben igényli a szemléltetést. Könnyebbsége azonban az, hogy középfokú szinten a tanítása nem kíván különösebb definíciókat, nehéz tételeket vagy bizonyításokat – ugyanis inkább a rajz oktatásához hasonlónak tekintjük.

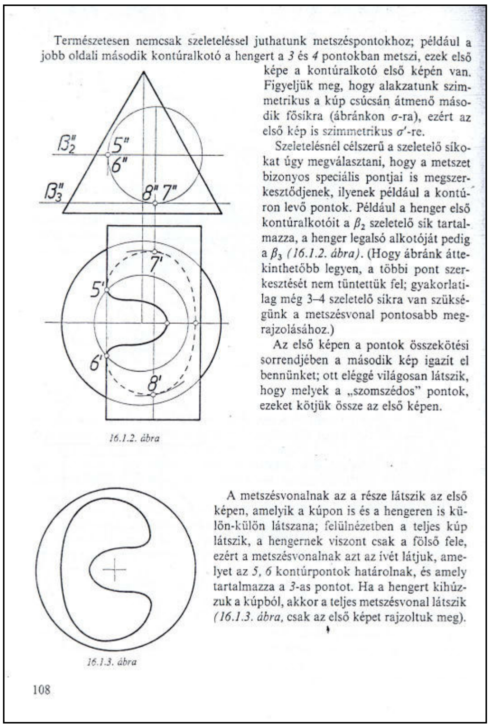
FONTOSABB ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIAI TANKÖNYVEK

A dolgozatnak ebben a fejezetében két tankönyvet mutatunk be, melyek a jelenlegi tankönyvpiacon nagy népszerűségnek örvendenek.

Reiman István: Ábrázoló geometria tankönyv

A *Reiman István* nevéhez fűződő *Ábrázoló geometria* című tankönyv klasszikusnak számít. Nagy előnye, hogy összeállítása és szerkezete lehetővé teszi, hogy nemcsak műszaki oktatásban használjuk, hanem fakultációkon és speciális matematikai tagozatos osztályokban is (a tankönyv is fakultációs foglalkozásokra ajánlja elsősorban).

Az alapvető tudnivalóktól kezdve végigtaglalja a Monge-projekció alapjait egészen az axonometria vázlatos ismertetéséig. A fontosabb szerkesztéseket végig a Monge-projekció segítségével oldja meg.


Természetesen nemcsak szeleteléssel juthatunk metszéspontokhoz; például a jobb oldali második kontúralkotó a hengert a *3* és *4* pontokban metszi, ezek első képe a kontúralkotó első képén van. Figyeljük meg, hogy alakzatunk szimmetrikus a kúp csúcsán átmenő második fősíkra (ábránkon σ-ra), ezért az első kép is szimmetrikus σ'-re.

Szeletelésnél célszerű a szeletelő síkokat úgy megválasztani, hogy a metszet bizonyos speciális pontjai is megszerkesztődjenek, ilyenek például a kontúron levő pontok. Például a henger első kontúralkotóit a β_2 szeletelő sík tartalmazza, a henger legalsó alkotóját pedig a β_3 *(16.1.2. ábra)*. (Hogy ábránk áttekinthetőbb legyen, a többi pont szerkesztését nem tüntettük fel; gyakorlatilag még 3–4 szeletelő síkra van szükségünk a metszésvonal pontosabb megrajzolásához.)

Az első képen a pontok összekötési sorrendjében a második kép igazít el bennünket; ott eléggé világosan látszik, hogy melyek a „szomszédos" pontok, ezeket kötjük össze az első képen.

16.1.2. ábra

A metszésvonalnak az a része látszik az első képen, amelyik a kúpon is és a hengeren is külön-külön látszana; felülnézetben a teljes kúp látszik, a hengernek viszont csak a fölső fele, ezért a metszésvonalnak azt az ívét látjuk, amelyet az *5, 6* kontúrpontok határolnak, és amely tartalmazza a *3*-as pontot. Ha a hengert kihúzzuk a kúpból, akkor a teljes metszésvonal látszik *(16.1.3. ábra,* csak az első képet rajzoltuk meg).

16.1.3. ábra

108

Minta

A könyv előnyei:

- Aprólékos tárgyalás, mely akár már 9. osztálytól lehetővé teszi az ábrázoló geometria oktatását.

- Tiszta és világos felépítés – nincsenek benne felesleges szerkesztések, zavaró vagy figyelmet elterelő ábrák és szövegek.
- A tananyag túlmutat az ábrázoló geometrián. Feldolgozása során a diákok alaposan megismerhetik a különböző mértani testek tulajdonságait. (Ezért is alkalmas a speciális matematikai tagozatok esetében.)
- A tankönyv végén nagy mennyiségű feladatlap áll a tanárok és a diákok rendelkezésére. Ezek kis módosítással az alapvető szerkesztéseket gyakoroltatják.

A könyv hátrányai:

- Túlságosan „klasszikus" tankönyv. A mai tankönyvpiac tucatnyi igényesen megszerkesztett, színes könyvet vonultat fel. Ez a tankönyv közel 20 éve változatlanul kerül piacra.
- Nem ad lehetőséget a differenciálásra. A tankönyv mellékletében található feladatlapok egy átlagos tudásszinthez igazodnak. A szerző a differenciálás feladatát teljes mértékben a tanárra hárítja.

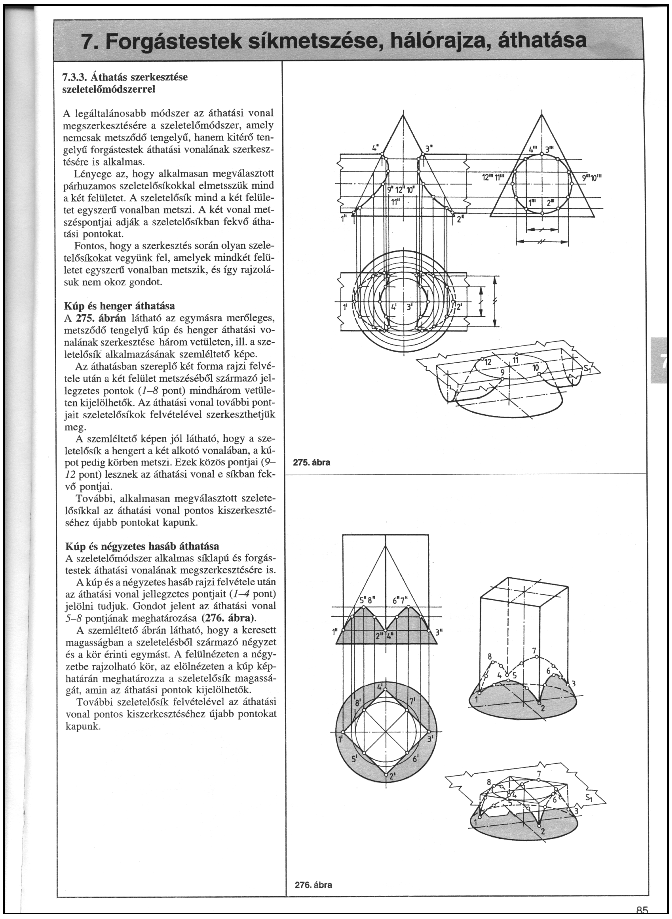
Összefoglalva tehát azt mondhatjuk, hogy a tankönyv egyszerűségében rejlik a megbízhatósága. 9. osztálytól 12. osztályig használható, mind a műszaki középiskolákban, mind pedig fakultációs jelleggel.

Ocskó – Seres: Gépipari szakrajz tankönyv

Az *Ocskó Gyula, Seres Ferenc* és *dr. Biszterszky Elemér* által szerkesztett *Gépipari szakrajz* című tankönyv mindképpen újszerű. Érdekessége abban áll, hogy szakít szinte minden klasszikus hazai hagyománnyal és egészen más szempont szerint épül fel. Ilyen különlegesség például a rajzokkal illusztrált tartalomjegyzék. Kétszínnyomással (zöld és fekete) készült, a rajzok és szerkesztések során ki is használja ezt a lehetőséget.

Legfontosabb tulajdonsága az, hogy minden egyes lapja fénymásolható feladatlap formájú. A lapok függőlegesen vannak kettéválasztva – a bal oldalra kerülnek a legfontosabb ismeretek és a szerkesztések magyarázatai, míg jobb oldalon a szerkesztések és térbeli ábrák találhatóak.

A tankönyv – címéből is nyilvánvaló módon – a műszaki középiskolákban tanulók számára íródott. Szintén végigtekint a Monge-projekción és az axonometrián. Tárgyal továbbá speciálisan műszaki rajzokhoz szükséges ismereteket – például mérethálózatokat, mérettűréseket, felületminőség megadását, sőt röviden elemzi az AutoCAD egy korai verzióját is.



7. Forgástestek síkmetszése, hálórajza, áthatása

7.3.3. Áthatás szerkesztése szeletelőmódszerrel

A legáltalánosabb módszer az áthatási vonal megszerkesztésére a szeletelőmódszer, amely nemcsak metsződő tengelyű, hanem kitérő tengelyű forgástestek áthatási vonalának szerkesztésére is alkalmas.

Lényege az, hogy alkalmasan megválasztott párhuzamos szeletelősíkokkal elmetsszük mind a két felületet. A szeletelősík mind a két felületet egyszerű vonalban metszi. A két vonal metszéspontjai adják a szeletelősíkban fekvő áthatási pontokat.

Fontos, hogy a szerkesztés során olyan szeletelősíkokat vegyünk fel, amelyek mindkét felületet egyszerű vonalban metszik, és így rajzolásuk nem okoz gondot.

Kúp és henger áthatása
A **275. ábrán** látható az egymásra merőleges, metsződő tengelyű kúp és henger áthatási vonalának szerkesztése három vetületen, ill. a szeletelősík alkalmazásának szemléltető képe.

Az áthatásban szereplő két forma rajzi felvétele után a két felület metszéséből származó jellegzetes pontok (*1–8* pont) mindhárom vetületen kijelölhetők. Az áthatási vonal további pontjait szeletelősíkok felvételével szerkeszthetjük meg.

A szemléltető képen jól látható, hogy a szeletelősík a hengert a két alkotó vonalában, a kúpot pedig körben metszi. Ezek közös pontjai (*9–12* pont) lesznek az áthatási vonal e síkban fekvő pontjai.

További, alkalmasan megválasztott szeletelősíkkal az áthatási vonal pontos kiszerkesztéséhez újabb pontokat kapunk.

Kúp és négyzetes hasáb áthatása
A szeletelőmódszer alkalmas síklapú és forgástestek áthatási vonalának megszerkesztésére is.

A kúp és a négyzetes hasáb rajzi felvétele után az áthatási vonal jellegzetes pontjait (*1–4* pont) jelölni tudjuk. Gondot jelent az áthatási vonal *5–8* pontjának meghatározása **(276. ábra)**.

A szemléltető ábrán látható, hogy a keresett magasságban a szeletelésből származó négyzet és a kör érinti egymást. A felülnézeten a négyzetbe rajzolható kör, az elölnézeten a kúp képhatárán meghatározza a szeletelősík magasságát, amin az áthatási pontok kijelölhetők.

További szeletelősík felvételével az áthatási vonal pontos kiszerkesztéséhez újabb pontokat kapunk.

275. ábra

276. ábra

85

Minta

A könyv előnyei:

- Újszerű megjelenés. A diákok szeretnek minden olyan tankönyvet, mely szakít a klasszikus tankönyv-szerkezettel. A tankönyv szeretete kedvet ad a tárgy tanulásához is.
- Feladatlap forma. A tanár munkáját megkönnyíti ez a fajta elrendezés.
- Világos és tiszta tárgyalásmód. A bal oldalon található szövegek könnyen érthető módon magyarázzák el a feladatokat és az elméletet.
- A nagyobb fejezetek végén ismétlő kérdések találhatóak. Ez nemcsak a tanár, hanem a diákok munkáját is segíti – alkalmas otthoni gyakorlásra és számonkérésre is.

- Kiváló példatár található a tankönyv mellékletében.
- A bevezető részben a Reiman-könyvnél jóval részletesebb és átfogóbb módon tárgyalja a segédszerkesztéseket, melyek a középiskolai geometriai feladatok során is hasznosak lehetnek.

A könyv hátrányai:

- Nem nyújt lehetőséget a differenciálásra. Hasonlóan a Reiman-könyvhöz, nem ad segítséget a tanárnak ebben a problémában.
- A szigorú menetrend és lényegre törés során elvesztek azok a részek, melyek az érdeklődő diákokat komolyabb műszaki illetve matematikai pályára terelhetnék. Nincsenek benne történeti hátterek, életrajzok, a tananyagon túli problémák, érdekességek.

Összefoglalva: Ez a tankönyv kizárólag a műszaki középiskolákban használható. Szilárd geometriai tudást igényel.

FORGÁSFELÜLETEK TANÍTÁSA

Ebben az általános magyarázatban főként a Reiman István–féle tankönyvre hagyatkoztunk.

A középiskoláig a diákok három fontosabb forgásfelülettel ismerkednek meg: a kúppal, a hengerrel és a gömbbel. Az ábrázoló geometriai tanulmányok közben úgy kezelik ezeket, mint véges testeket, tehát nem foglalkozunk a végtelen kúp- és hengerfelülettel.

Tanításuk során támaszkodhatunk a korábbi geometriai ismereteikre. A forgásfelületek ábrázoló geometriai szempontból 11. és 12. osztályban kerülnek előtérbe. Ekkora a tanulók már geometriából ismerik a három felület főbb tulajdonságait. Azonban azt már kevesebben tudják, hogy ezek a testek forgatással is előállíthatók.

Legegyszerűbb a henger és a kúp esetén egy alkotót és a tengelyt, gömb esetében a tengelyt és egy főkört tartalmazó fóliát bevinni az órára, ezeket a síkbeli modelleket például egy drót segítségével megforgatni. Így szemléletesen rögzül a diákokban, hogy a fent említett három felület valóban tekinthető forgásfelületnek.

Első cél tehát az, hogy bemutassuk a kúp, a henger és a gömb ábrázoló geometriai szempontból fontos tulajdonságait.

Ezen alakzatok ismerete nagyon fontos a diákok számára, hiszen többségük műszaki pályára készül, ahol rengeteg forgatással keletkező felülettel találkoznak, például: fogaskerekek, esetleg henger alakú épületek és kúpszerű tetőszerkezetek.

Ez az anyagrész az újdonság erejével hat a diákok számára – mivel addig csak síklapú testekkel találkoztak az ábrázoló geometria órákon –, mégis tanítását nagyban megkönnyíti a tucatnyi életből vehető példa. A gömb esetében a tanulók azonnal a labdára gondolnak, így máris tudják az új ismereteket társítani egy régi, biztos tudással. Hasonlóan a henger esetében oszlopokra, kúp esetén tölcsérre asszociálhatnak.

A gömb

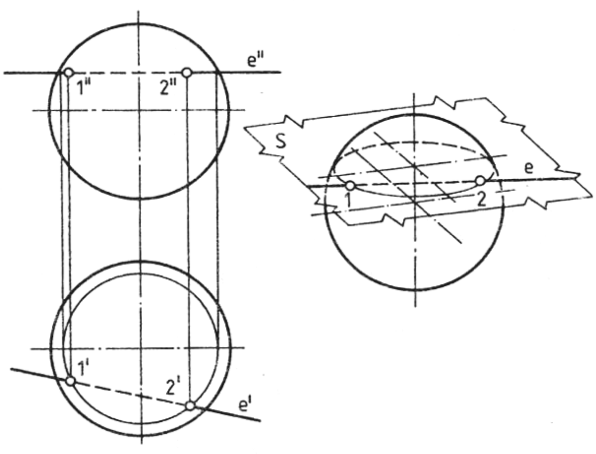
Első lépésben meg kell kérdezni a tanulókat, hogy tudják-e a gömb pontos definícióját. Rá kell világítani azokra a fogalmakra is, amelyeket eddigi tanulmányaik során nem ismertek meg, ide sorolható például a főkör fogalma. (Főkör azon kör a gömbön, melynek középpontja a gömb középpontja.) Legjobb megoldás az, ha egy üvegből készült gömböt tudunk mutatni a diákoknak. Ha ezt nem lehet megoldani, akkor bármilyen gömbfelülettel, például egyszínű labdával megmutathatjuk a főkört és egyéb köröket a gömbön. Szemléltetésnek megfelel egy földgömb is, amelyen a hosszúsági és szélességi körök jó alapul szolgálnak a különböző típusú körök magyarázatához, bár könnyen elvonja a tanulók figyelmét a lényegről. Már az elején fontos tisztázni, hogy bármely sík a gömbből köröket metsz ki. (Itt vissza kell utalni a gömbön elhelyezkedő körök definíciójára és el kell mondani a főkör másik definícióját is: a gömb középpontján átmenő síkok a gömbből főköröket metszenek ki.) Az életből is vehetünk példát, ha azt mondjuk, hogy amikor egy narancsot szeletekre vágunk, akkor körök keletkeznek. A gömb ábrázolásához fontos, hogy ezen fogalmakkal a tanulók teljesen tisztában legyenek.

Ahhoz, hogy a diákok meg tudják rajzolni a gömb első illetve második képét, meg kell kérdezni, hogy van-e már valamilyen elképzelésük a két képet illetően. A párhuzamos vetítés fogalmát már jól ismerik és tudják használni, a síklapú testek ábrázolásánál megtanulták, hogy mi adja egy test képének a kontúrját. Ha nem tudják kitalálni, akkor rá kell vezetni őket, hogy megtalálják a helyes választ. Nagy segítség lehet, ha felrajzolunk egy kört a táblára, majd megkérdezzük: „Lehet ez egy gömb első vagy második képe?” A válasz minden bizonnyal „igen” lesz. Ezután már csak azt kell világossá tenni, hogy ez a kör, ami a gömb képéül szolgál, egy főkör. Mivel általában a gömb az első nem síklapú felület, amivel a diákok megismerkednek, itt kell megemlíteni a kontúrgörbe és a képkontúr fogalmát. Ezt például Reiman István tankönyve részletesen leírja és nagyon szép szemléltető ábrát hoz.

Mindezek után felrajzolhatjuk a táblára a megszokott Monge-rendszert és benne a gömböt a két képével. Ki kell hangsúlyozni, hogy a két képen a képkörök ugyanakkora sugarúak – és az indoklást a diákoktól várjuk. A táblai rajzon bejelölünk egy pontot az első képen és megszerkesztjük a lehetséges második képeket. Fel kell hívni a figyelmet arra, hogy itt egy első képhez két második kép is tartozik, így tehát gömb esetében egy kép ismeretében nem kapjuk meg egyértelműen a pontot. Hasonlóan járhatunk el a második képnél is, ezt viszont önálló munkára adjuk ki a gyerekeknek, majd ellenőrizzük a szerkesztésük helyességét. Ezután a tankönyvek ábráját is megvizsgáltatjuk.

Ha ezzel készen vagyunk, rátérhetünk érintőlegesen a gömbi körök ábrázolására. A speciális helyzetű (képsíkokkal párhuzamos) köröket már a diákok is meg tudják rajzolni, hiszen a gömbi pontok ábrázolásánál ilyen köröket használtak. Az általános helyzetű kör esetén elég visszautalni a tetszőleges síkban fekvő kör ábrázolására.

Ezekután elkezdhetjük a metszési feladatok tárgyalását. Mivel középiskolai szinten oktatunk, elég csak speciális helyzetű egyenesekkel és síkokkal foglalkozni. A diákok a (korábban tanult) képsíktranszformáció segítségével bármilyen általános helyzetű egyenest/síkot speciális helyzetbe tudnak hozni.



Az egyenessel való döfés során például egy első képsíkkal párhuzamos egyenest veszünk. Új rajzot készítünk és belerajzoljuk az egyenest. Megkérdezhetjük a tanulókat, hogy van-e ötletük a feladatra vonatkozóan. Miután meghallgattuk a válaszokat és elmondjuk, hogy melyik válasz miért jó illetve nem jó, rátérhetünk a megoldásra. Hasznos lehet az is, ha a tanár az óra elején gyurmából készít egy gömbformát, abba hurkapálcikát szúr és annak megfelelő síkjával elmetszi a gyurmagömböt. Így egy szép kész modellt kaptunk, mellyel megmutathatjuk az egyenessel való döfést, és a felesleges rész eltávolításával a diákok is láthatják, hogy mely gömbi körbe metsz bele az egyenes. Ha a diákok lerajzolták a példát és tanulmányozták a modellt, megnézhetjük a Reiman-tankönyv ábráját is, amely a második képsíkkal párhuzamos egyenessel mutatja be a feladatot.

Síkkal való metszésnél szintén speciális helyzetű síkot veszünk. Felelevenítjük a kör ábrázolásánál tanultakat. Megnézzük a metszet speciális helyzetű képét, majd ebből kiindulva tisztázzuk, hogy a hiányzó képen mik lesznek a speciális pontok, melyekkel a kép egyértelművé válik. Az egyenesnél használt gyurmamodell most is segítségünkre lehet. Könnyen megmutathatjuk, hogy mely körátmérőkből válnak a képellipszis kis- és nagytengelyei. Az előbbi esethez hasonlóan itt is megnézzük a könyvek ábráit.

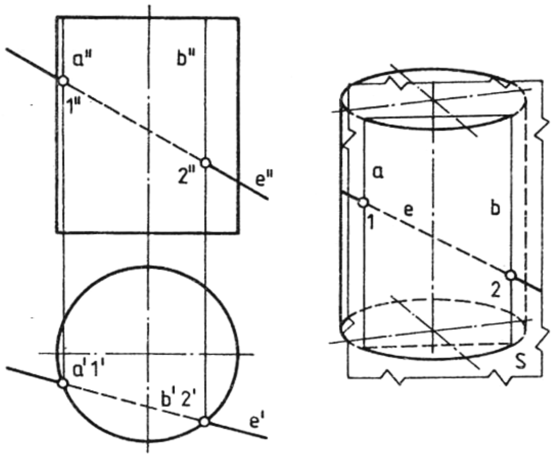
A henger

A henger esetében is sok példát mondhatunk, amelyek segítségével könnyebben elképzelhetik a tanulók az ábrázolandó felületet. Példának hozhatjuk az egyszerű papírhengereket, az épületek oszlopait stb.

Meg kell kérdezni, hogy hogyan definiálnák a diákok a hengert. Ezután leíratjuk velük a pontos definíciót és megbeszéljük mi a különbség az egyenes és ferde henger között (az órán csak egyenes körhengerekkel dolgozunk). A tanulók segítségével ábrázolunk egy első képsíkon álló, egyenes körhengert. Megkérdezhetjük, hogy a henger mely alkotói szolgálnak kontúralkotókként és miért. Ha nem kapunk helyes választ, elmondjuk és leírjuk a kontúralkotó definícióját. Miután lerajzolták és megértették ezt az egyszerű esetet, rátérhetünk arra, amikor a körhenger tengelye az első képsíkkal párhuzamos. Ez ugyanis nehezebb, mivel az alap és fedőkör képe ellipszis lesz.

A tanulók bevonásával ábrázolunk néhány pontot a hengeren. Ez igen könnyű feladat, akár teljes egészében kiadhatjuk önálló munkára az óra folyamán. Természetesen a munka befejeztével azonnal ellenőrizzük a megoldásokat és korrigálunk, ha szükséges.

Egyszerűbb esetben tárgyalhatjuk a henger döfését egyenessel. Nagyon könnyen megérthető és hasznos ismeret. Ha az óra idejébe nem fér bele, szorgalmi feladatnak is kiadhatjuk.



Végül tárgyaljuk a henger síkmetszeteit. El kell mondani, hogy milyen lesz a kép, ha a sík párhuzamos illetve ha merőleges a tengelyre. Egyszerű papírhenger és kartonpapír segítségével szemléltethetjük is a síkmetszeteket. Az általános síkkal való metszést új rajzon kezdjük el magyarázni. Fontos kihangsúlyozni, hogy képsíkon álló egyenes körhenger esetében a metszetgörbe (ellipszis) pontjai hogyan viszonyulnak a kontúrokhoz (ha például első képsíkon álló hengerről van szó, akkor az első kép egy kör, melyen a metszetgörbe pontjai sorakoznak, a másik képen pedig – nyilvánvalóan – fővonalakkal visszük vissza a pontokat és a henger kontúrjain belülre esnek).

A henger tárgyalásának befejezéseként megnézzük a könyvbeli ábrákat és értelmezzük az órán tanultak szerint.

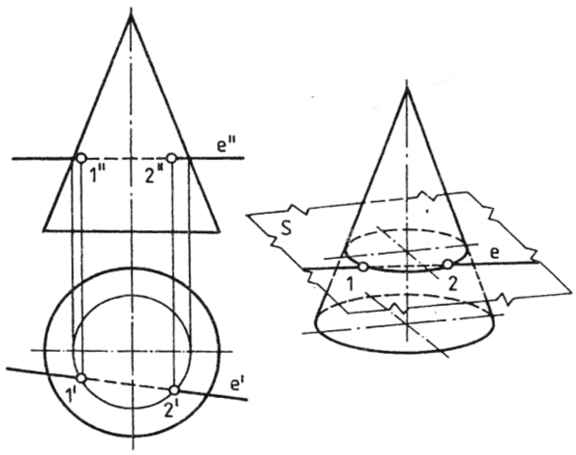
A kúp

A gömb és a henger ábrázolása után a kúp egyszerű feladatnak tűnhet és speciális esetekben ez valóban így van.

Első dolog most is az, hogy tisztázzuk a diákokkal a (egyenes- és ferde-) kúp fogalmát és a hozzá tartozó speciális alakzatokat (csúcspont, alkotók, alapkör). Megemlítünk néhány egyszerű példát a kúpra, például egy tölcsért.

Ezután rátérünk a kúpon lévő pontok ábrázolására. Legegyszerűbb eset az, amikor első képsíkon álló egyenes forgáskúpot veszünk. Fontos elmondani, hogy egy kúpnak valójában két „tölcsére” van, viszont a gyakorlatban általában csak egyet tekintünk. A pontok ábrázolásánál is ki kell térni arra, hogy egy első illetve második képhez két pont is tartozik a kúpon. A kúp esetében is definiálni kell a kontúralkotó, kontúrgörbe stb. fogalmakat.

Ki kell térni a metszési feladatok előtt az általános helyzetű kúp ábrázolására. Az ilyen kúp alapkörét és kontúralkotóit ugyanis nehéz ábrázolni (a segédgömbös-„trükköt” alkalmazzuk). A szerkesztés előtt ki kell térni a módszer geometriai hátterére. Mivel a diákok számára bonyolultnak tűnhet az eljárás geometriai tartalma, így a kúp esetében feltétlenül szükség van szemléltető modellekre, bármilyen gömbfelületre (hiszen most nem ez játssza a főszerepet) és egy rá illeszkedő kúpfelületre, amelyre krétával vagy tollal rajzolni lehet. Érdemes színes, átlátszó műanyaglapból készíteni a kúp modelljét. A segédgömbös-módszert nemcsak a táblánál kell végigszerkeszteni, hanem érdemes azután a tankönyv ábráját is végigtanulmányozni, így jobban rögzül a tanulókban az eljárás lényege.



Az egyenessel való döfést a Reiman-tankönyv nem tárgyalja, ellentétben a Gépipari szakrajz c. tankönyvvel. Ezt (szigorúan kötelező) házi feladatként adhatjuk ki, elárulva azt a lényeges információt, hogy a megoldás kulcsa a kúp csúcspontja és az egyenes által adott sík.

A síkkal való metszés igényli talán a legtöbb odafigyelést. A tankönyvek szép szemléltető ábrákat hoznak, de itt sem maradhatnak el a papírból készített modellek. Az elméletre még nem szabad sok időt áldozni, hiszen megfelelő háttértudás híján fölösleges időrablás elmagyarázni, hogy miért van többféle metszete egy kúpnak. Az alapvető és elengedhetetlen geometriai tudnivalókat viszont el kell mondani. Ezen síkmetszeteket csak speciális esetben nézzük (azaz amikor a kúp is és a sík is nagyon könnyű szerkesztést biztosító helyzetben van).

Elsőként az ellipszismetszet esetét nézzük. Ez még könnyen megemészthető feladat. A papírmodell segítségével elmagyarázzuk a metszet speciális pontjait, és azok helyét a rajzon. A tanulókat megkérjük, hogy ábrázoljanak a metszeten egy általános pontot, majd leellenőrizzük a szerkesztést.

A parabolaesetet tárgyalja a Reiman-könyv és a Gépipari szakrajz tankönyv is, ezért ezt a tankönyv alapján megbeszéljük, majd házi feladatként kiadjuk a parabolametszet megszerkesztését is. Elmondhatjuk, hogy azon alkotó, amellyel a sík párhuzamos, párhuzamos lesz a parabola tengelyével.

A hiperbolametszetnél figyelni kell arra, hogy a kúp mindkét „tölcsérére” szükségünk van, hogy a metszet igazán szemléletessé váljon. Egy középiskolás diák ugyanis nem lát erős különbséget egy parabola és egy hiperbolaág között, így a metszetet parabolának is láthatja. Papírmodellel nehéz szemléltetni a teljes kúpot, de egy kis türelemmel szép modellt készíthetünk. Megemlíthetjük, hogy ezen metszetgörbe aszimptotái párhuzamosak a két darab „kimaradt” alkotóval.

A síkmetszetek esetében befejezésként elmondhatjuk, hogy a tengelyre merőleges sík kört metsz ki a kúpból – de ezt feltehetjük kérdésként is és a helyes választ jutalmazhatjuk.

Ha a fenti ismereteket sikerrel megtanítottuk a diákoknak, akkor már nem lesz problémájuk a további ábrázoló geometriai tanulmányaik során. Hiszen a Monge-féle ábrázolásban talán a legnehezebb anyagrész a gömb- és a kúp síkmetszete. A tanulóink ezen tudással már bármilyen alakzatot tudnak ábrázolni. Sőt, a későbbi ábrázoló geometriai és elemi geometriai tanulmányaikban is nagy hasznát veszik, elég, ha térgeometriai feladatokra gondolunk, amelyeket az ábrázoló geometriával játszva meg lehet oldani.

ÁTHATÁSOK TANÍTÁSA

Ebben a fejezetben párhuzamosan felhasználva a két fentebb említett tankönyvet nézzük át a fontosabb problémákat és elveket, melyek az áthatások tanítása során felmerülnek.

A forgástestek áthatására a Reiman-könyv két példát hoz. A Gépipari szakrajz tankönyv négy alapesetet és további három példát is mutat „vegyes” áthatásra: egy kúp és egy négyzetes hasáb áthatását, egy négyzetes gúla és henger áthatását, illetve egy hatoldalú hasáb és kúp áthatását.

Érdekességként megemlíthető, hogy a Reiman-tankönyv nem osztályozza az áthatásokat, míg a másik tankönyv ezt megteszi – külön csoportosítja a közös-, metsző- illetve kitérő tengelyű forgástestek áthatását.

Áthatások tanításának általános elvei

Az áthatások tanítása kritikus pontja az ábrázoló geometria oktatásának. A diákok ezt látják át a legnehezebben. Ezeket az áthatási feladatokat megelőzi a síklapú testek áthatásának tanítása, így az alapvető elvek részletes tárgyalására nem kell kitérni.

Fontos újra elismételni, hogy az áthatás a két test közös pontjainak megszerkesztését jelenti. Az áthatási görbe lehetséges eseteit ilyen szinten nem szükséges részletesen tárgyalni. Elég mindössze annyit tanítani, hogy az áthatási görbe állhat egy illetve két részből. Mindezekre feltétlenül szemléltető ábrákat és térbeli modelleket kell mutatni. A Reiman-féle tankönyv éppen ilyen szempontból hoz két példát – egy bemetszést és egy teljes áthatást. Térbeli modellek segítségével meg kell mutatni, hogy általában egy áthatás során a testek közös része egy térfogattal rendelkező térbeli alakzat lesz.

Mindkét tankönyv speciális helyzetű forgástesteket vizsgál. Ezért annak tanulmányozása, hogy teljes áthatást vagy bemetszést kaptunk-e – a szemléleten alapul. Az elv azonban követi az általános szabályt: ha az egyik test minden alkotója/köre metszi a másik testet, akkor teljes áthatás történt, ellenkező esetben bemetszés. Valódi – papírból vagy műanyagból – készült modellekkel hamar letisztul a tanulók fejében a két áthatás közötti különbség.

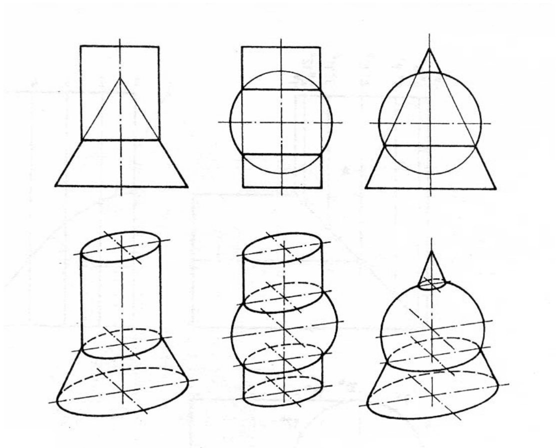
A speciális tulajdonságú pontok keresése nem ennek a szintnek a feladata. Azonban a kontúralkotókon lévő pontokat már a középiskolás diákok is meg tudják keresni. Itt fontos láttatni velük, hogy a kontúralkotók ugyanúgy a forgástest részei, tehát ugyanúgy szerepet játszanak az áthatásban. Így a kontúralkotón lévő áthatási pontok a szélső helyzetű pontjai az áthatási görbének. El kell mondani, hogy itt az áthatási görbe „hozzásimul” a kontúralkotóhoz – tehát igyekezniük kell ilyen szempontból megrajzolni a végső ábrát.

Módszerek tanítása

Módszerek tekintetében a Reiman-tankönyv a szeletelősíkok módszerét és az új képsík bevezetését használja; a Gépipari szakrajz pedig végigtárgyalja a közös tengelyek esetét (tehát amikor az áthatás körökre esik szét), a segédgömb módszerét és a szeletelősíkok módszerét is.

Közös tengelyű forgásfelületek

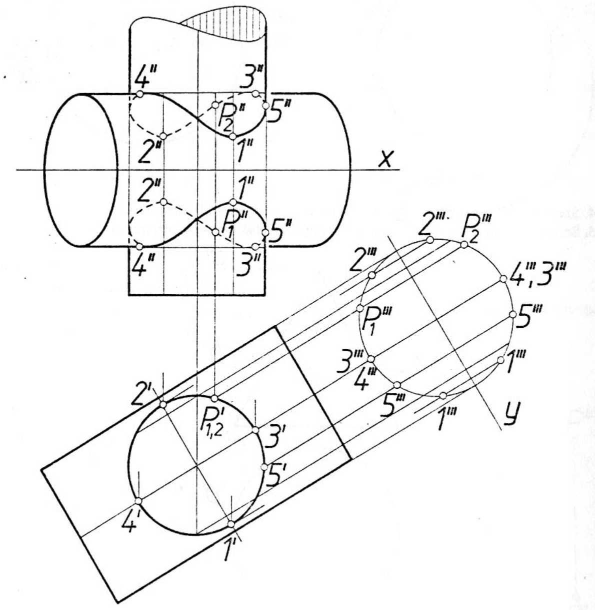
Amikor a diákok ezt az anyagrészt tárgyalják, már biztos ismeretekkel rendelkeznek a forgásfelületekről. Emiatt nem okoz nekik problémát, hogy a kúpot, a hengert és a gömböt mint forgásfelületet tekintve megértsék, hogy a meridiángörbék metszete a forgatás után, az áthatáskor köröket eredményez.



Természetesen nagy segítséget adnak most is a térbeli modellek. Bevezetésként mindenképpen egyszerűen látható áthatást nézzünk – például egy kúp és egy henger áthatását. Azután már könnyebben meg tudják érteni az olyan áthatásokat is, melyekről első pillantásra nem érezhető, hogy körmetszeteket kapunk.

Új képsík módszere

Az új képsík bevezetését minden ábrázoló geometriát tanuló diák ismeri. Éppen ezért biztos ponthoz nyúlunk vissza ezzel a módszerrel. Tudomásukra hozzuk, hogy olyan esetben érdemes használni, ahol az áthatás során henger az egyik forgástest. Az új képsík a henger forgástengelyére merőleges. A tanulók egy egyenesre merőleges képsíkot fel tudnak venni és tudják, hogy a merőleges egyenes képe így egy pont lesz (hiszen vetítőegyenes lett belőle). Így azt is hamar látják, hogy a henger képe egy körré fajul. Problémát jelenthet annak megértetése, hogy az áthatási görbe képe rajta lesz ezen a körön. Ehhez két dolgot hívhatunk segítségül. Egyrészt kézzel fogható modelleket és térbeli ábrákat hozhatunk, másrészt az áthatás alapvető elveit felelevenítve mondhatjuk el, hogy az áthatási görbe minden pontja nyilvánvalóan rajta lesz a hengeren is és így a képén is.



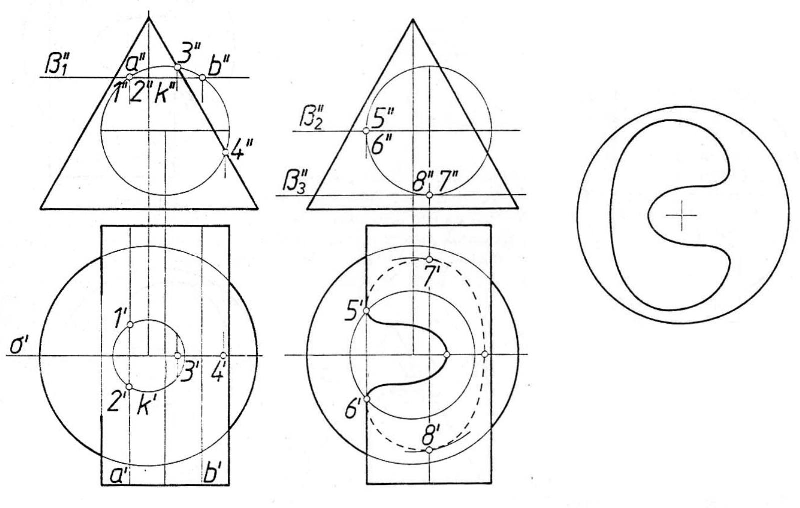
A fenti ábra a Reiman-féle tankönyvből való. Jól látható, hogyan használja ki az új képsíkot az áthatási pontok megszerkesztésének könnyítésére. A diákok ebből a rajzból jól megértik a módszer lényegét. Az ábrán szinte csak speciális tulajdonságú pontok vannak szerkesztve, még a kontúralkotón lévő szélső helyzetű pontok is megszerkesztettek. Egyedül a P_1' és P_2' pontok általános helyzetűek. A szerkesztés megértésének apró buktatója lehet, hogy miért van egy-egy első képnek két képe a második képsíkon. A diákok azonban előzetes ismereteikre alapozva gyorsan átlátják a lényeget. Legkönnyebb a problémát arra visszavezetni, hogy egy vetítősugár általában két pontban metsz egy ilyen helyzetű hengert. A másik henger alkotói pedig éppen vetítősugarak.

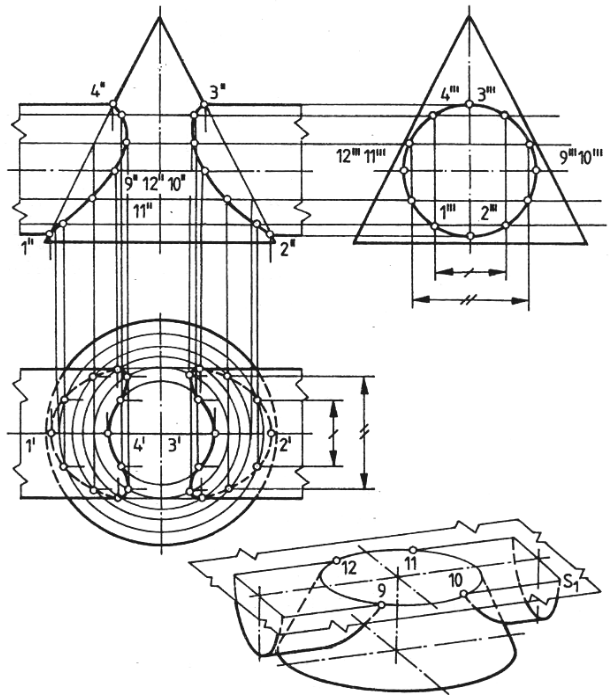
Szeletelősíkok módszere

Ez az eljárás könnyen érthető a diákok számára. Az áthatások előtt már tanulják a forgásfelületek síkkal való metszését. Így a szeletelősíkok módszere egyszerű szerkesztés lesz számukra.

A szeletelősíkok módszerét párhuzamos- vagy merőleges tengelyű forgásfelületek esetén használjuk. Mivel szemléltető modell készítése ebben az esetben nehézkes, így főként a térbeli viszonyokat bemutató rajzokra kell hagyatkozni. Szerencsére gyenge térlátás mellett is szinte azonnal megértik a diákok azt a tényt, hogy egy-egy ilyen sík a felületekből köröket illetve alkotókat metsz ki (hiszen általában gömböt, kúpot és hengert használunk).

A könyvek legnehezebb példái éppen a kitérő és merőleges forgástengelyű testek áthatását szerkesztik. Érdekes, hogy mindkét könyv kúp és arra merőleges és kitérő helyzetben lévő forgástengelyű hengert hoz példának.





A Gépipari szakrajz című könyv egy teljes áthatás mutat be, míg a Reiman-könyv egy bemetszést ábrázol.

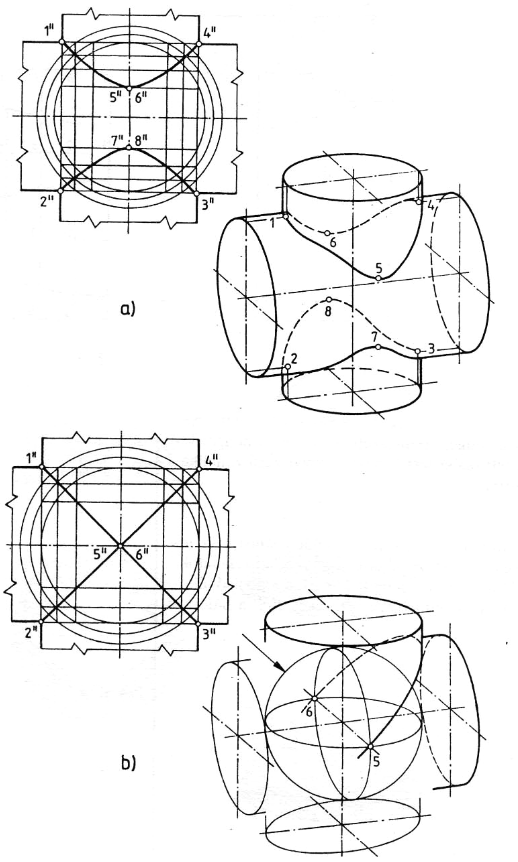
Az előbbi tankönyv szemléletes képet is mutat egy általános szeletelősík helyzetéről, ezáltal a rosszabb térszemlélettel bíró tanulók is biztosabban tanulhatják meg a módszert.

Segédgömbök módszere

A Gépipari szakrajz tankönyv tárgyalja a segédgömbök módszerét is és két példát hoz rá. Klasszikusan a metsző tengelyű forgásfelületek áthatására javasolja ezt az eljárást. Felhasználja azt a – könyv által ugyanazon a lapon említett – tényt, hogy egy kúp illetve henger olyan gömbbel való metszete, melynek középpontja a forgástengelyen van, általában két kört metsz ki a kúpból illetve hengerből. A diákok a közös tengelyű forgásfelületek után közvetlenül tanulják ezt a módszert, tehát a frissen elsajátított anyagot azonnal alkalmazni tudják. Problémás lehet, hogy a közös tengelyű forgásfelületek áthatását nem találják hasznosnak – de ilyen tárgyalás mellett rögtön azzá válik a fenti egyszerű eset is.

Vizsgáljuk meg a tankönyvbeli példákat. Az első egy teljes áthatást ábrázol. Csak egy képet jelenít meg – emiatt az órán végig kell szerkesztenünk ezt a példát, nem elég csak a könyv ábráját elemezni. A táblai szerkesztésnél figyeljünk arra, hogy ugyanolyen ábrát vegyünk fel. A gyengébb tanulókat kezdetben megzavarja, ha más példát hozunk a táblánál, miközben folyamatosan a tankönyv ábrájára hivatkozunk. Miután rögzül a segédgömbök módszere a diákokban, csakis azután kezdhetünk el általánosabb eseteket tárgyalni, vagy legalábbis más példákat hozni.

Az ábrák különlegessége, hogy azonos sugarú hengerek áthatását is megszerkeszti. A diákokat a mélyebb elméletbe még nem szükséges beavatni – elég annyit elmondani, hogy ebben az esetben két ellipszisre esik szét az áthatás. Magyarázatként az alábbi eszmefuttatás tűnik a diákok szempontjából a legérthetőbbnek: A hengereket egy speciális nézetből két-két párhuzamos szakasznak látjuk, melyek merőlegesek egymásra és a szakaszok távolsága egyező. Kössük össze az átellenes metszéspontokat. Ezeket a szakaszokat mindkét henger esetében felfoghatjuk speciális nézetben látható síkmetszeteknek. A diákok már korábban megtanulták, hogy ilyen esetben a síkmetszetek ellipsziseket adnak. Tehát a kapott metszési alakzat két ellipszis. Mivel tudják, hogy a két ellipszis az egyik hengerre is elképzelhető ponthalmazok, így a két metszéspont értelmezése és megtalálása sem jelent problémát. A térbeli ábra szépen szemlélteti az egyik ellipszis felét.



A műszaki középiskolások két henger áthatását amiatt tanulják, mivel az úgynevezett könyökcsövek (melyek henger alakúak) ágai ilyen formákban kapcsolódhatnak egymáshoz.

Az áthatás ábrázolásának tanítása

A különféle módszerek után az áthatás tanítása nem vet fel különösebb problémákat. A tanulók elsajátították a láthatóság meghatározásának módszerét, továbbá tudnak áthatási görbét és annak néhány speciális pontját szerkeszteni.

Az ábrázolás során érdemes mindhárom esetre kitérni:

- csak az egyik testet ábrázoljuk csonkolt állapotban;
- az áthatás során kapott térfogattal rendelkező testet ábrázoljuk;
- mindkét testet ábrázoljuk az áthatási görbét figyelembe véve.

Ha a diákoknak meghagyjuk az ábrázolás során a szabad választási lehetőséget, akkor pozitívabban állnak hozzá az áthatások szerkesztéséhez. Pedagógiai szempontból pedig minden egyes lehetőség kipróbálása az áthatás és a láthatóság problémakörének mélyítését jelenti.

IRODALOMJEGYZÉK

1. Strommer Gyula: Ábrázoló geometria
2. Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria
3. Lőrincz Pál – Petrich Géza: Ábrázoló geometria
4. Hajós György: Bevezetés a geometriába
5. Szőkefalvi-Nagy Gyula: Differenciálgeometria
6. Petrich Géza: Ábrázoló geometria
7. Reiman István: Ábrázoló geometria
8. Ocskó Gyula – Seres Ferenc: Gépipari szakrajz
9. Vaskó Lászlóné: Ábrázoló geometria
10. Pethes Endre: 222 ábrázoló geometriai feladat
11. Fóris Tibor: A műszaki rajz alapjai
12. Papp Ildikó: Konstruktív geometria (egyetemi jegyzet)