Pék Johanna
Strommer László

Készült a Bepillantás a jövődbe!
– Komplex műegyetemi pálya-
orientációs és továbbtanulást
segítő programok című, valamint
EFOP-3.4.4 – 16-2017-00025
azonosító számú projekt keretében.

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

Tankönyv

Dobos Sándor
feladatgyűjteményével

MŰEGYETEM 1782

BME Építészmérnöki Kar
Budapest, 2019

SZÉCHENYI 2020

MAGYARORSZÁG KORMÁNYA

Európai Unió
Európai Szociális
Alap

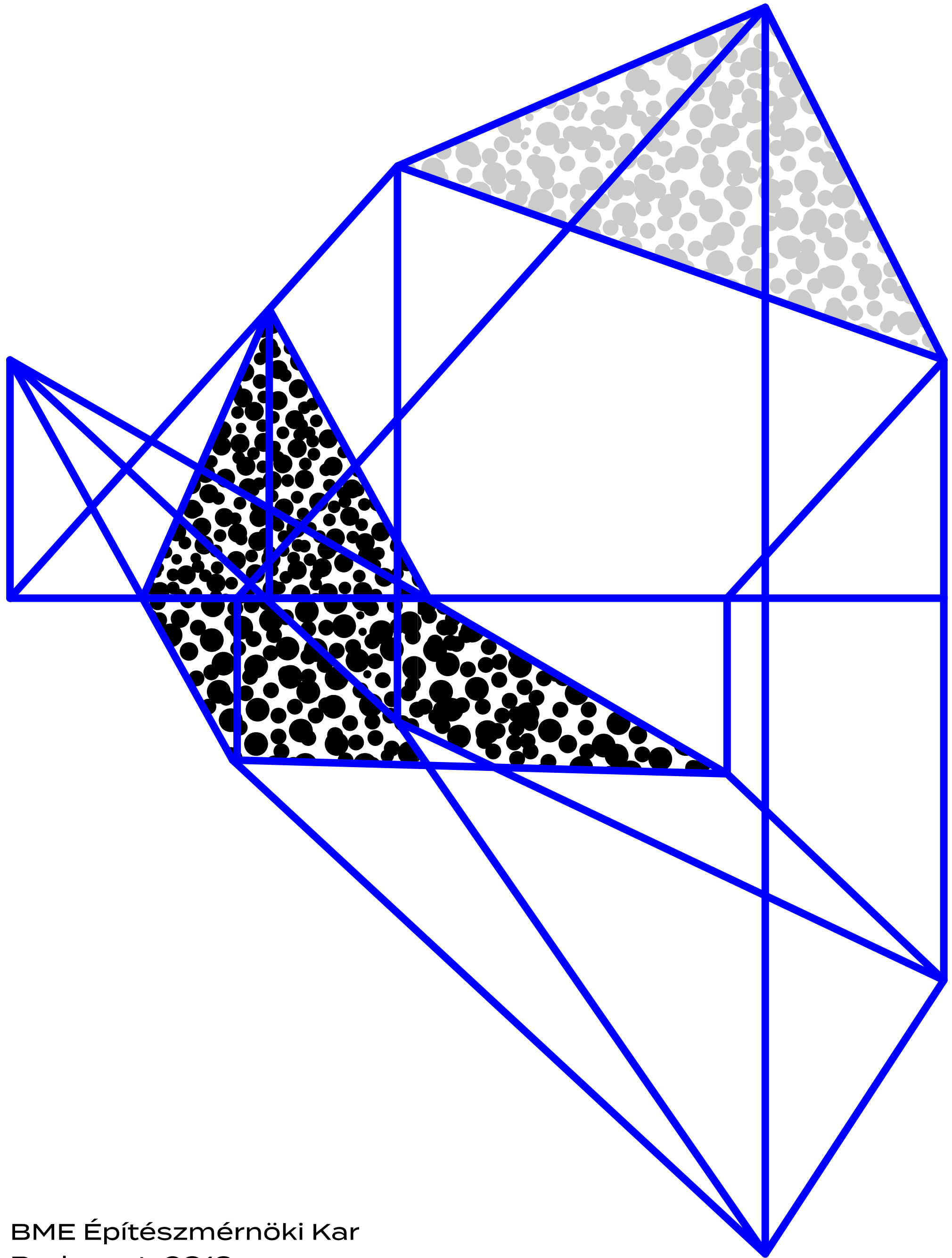
BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

Pék Johanna
Strommer László

ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIA

Tankönyv

Dobos Sándor
feladatgyűjteményével



MŰEGYETEM 1782

BME Építészmérnöki Kar
Budapest, 2019

MŰEGYETEM 1782

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Építészmérnöki Kar

Pék Johanna, Strommer László

Ábrázoló geometria

ELŐKÉSZÍTŐ TANKÖNYV KÖZÉPISKOLÁSOK SZÁMÁRA

A kiegészítő feladatgyűjteményt összeállította: **Dobos Sándor**

Budapest, 2019

Tartalomjegyzék

Előszó

Kedves Olvasó!

Nagyon örülünk, hogy érdeklődsz az építész szakma iránt, és kezedbe vetted a tankönyvünket. Minden bizonnyal ez életed legelső egyetemi tankönyve/jegyzete, de biztosak vagyunk abban, hogy nem az utolsó.

Az ábrázoló geometria alapvető fontosságú, ha építész szeretnél lenni, hiszen alaprajzokat, összetett terveket kell majd értelmezned és készítened. Ezek a rajzok pedig a geometria szabályain alapulnak.
Éppen ezért a tankönyvben szépen, fokozatosan haladj előre. Készíts saját rajzokat, szemléltető ábrákat! Használj körzőt, két vonalzót (az egyik legyen háromszög alakú) és színes ceruzákat is! Fedezd fel a térgeometria egyszerű és nagyszerű szabályait, és vizsgáld meg, hogy a környezetedben hol bukkannak fel ezek az összefüggések!
Mit várunk el tőled? Csupán annyit, hogy a középiskolában tanult legfontosabb geometriai fogalmakat és tételeket ismerd.
Igyekezz minden feladatot lépésről lépésre megcsinálni/kiszerkeszteni, és ne hagyd ki a gyakorló feladatokat sem! Ha elakadtál, térj vissza az adott fejezet alapfeladataihoz, vagy kérd a tanáraid segítségét!

A tankönyv – az egyetemi hagyományokat követve – magázódó formában íródott. Ez ne riasszon el, inkább mi is így köszöntünk:
Üdvözöljük az ábrázoló geometria világában! Eredményes felkészülést kívánunk,
a Szerzők

Előszó középiskolai tanárok számára

Kedves Kolléga!

A legtöbb műszaki képzésben – elsősorban időhiány miatt – a középiskolában megszokottnál gyorsabb tempóban oktatjuk a térgeometriát, és ez gyakran váratlanul éri az elsős hallgatókat. A tankönyv nem titkolt célja, hogy a felkészülés és az első egyetemi hónapok során segítse a leendő egyetemistákat.

A tananyag első fejezete hidat épít a középiskolai geometriai tudás és az egyetemen elvárt ismeretek között. A többi fejezet már az egyetemi tananyag lassú megalapozását tartalmazza. Minden témakör apró részekre bontott, így – szükség esetén – alkalmazkodik a 45 perces tanórákhoz.

Tankönyvünk hasznos lehet fakultációra járó, illetve versenyző diákok számára is. Ezek az egyszerű, kiegészítő ismeretek más megvilágításba helyezhetnek egyes feladatokat, és a térszemléletet erősen fejlesztik.

Az utolsó fejezet vegyes térgeometriai feladatokat tartalmaz, az egyszerűbbtől indulva a versenyszintű példákig. A feladatok nagy része ábrázoló geometriai tudással egyszerűbben is megoldható.

Odaadó munkáját köszönjük, és sikeres felkészítést kívánunk,
a Szerzők

A jelölésekről

A tankönyvben zöld szövegdobozban találhatók az alapvető elnevezések, definíciók; pirossal jelöltük a fontos állításokat, tételeket. A kék szövegdobozok fontos példákat tartalmaznak, amelyeket mindenképpen érdemes önállóan is megoldani.

Geometriai jelölések:

$\overleftrightarrow{AB}$ – az A és B pontok által meghatározott egyenes

$\overrightarrow{AB}$ – az A kezdőpontú és a B pontot tartalmazó félegyenes

$\overline{AB}$ – az A kezdőpontú és B végpontú szakasz

AB – az A kezdőpontú és B végpontú szakasz hossza

$d(A,B)$ – az A és B pontok közötti távolság

$d(A,e)$ – az A pont és az e egyenes közötti távolság

$e \parallel f$ – az e és f egyenesek párhuzamosak egymással

$e \perp f$ – az e és f egyenesek merőlegesek egymásra

$[A,B,C]$ – az A, B és C pontok által meghatározott sík

$[A,e]$ – az A pont és az e egyenes által meghatározott sík

$e \subset \mathcal{S}$ – az e egyenes benne van az $\mathcal{S}$ síkban

$\widehat{AOB}$ vagy $\widehat{AB}$ – az O középpontú, A és B végpontokkal bíró körív

TARTALOMJEGYZÉK

Nyilatkozat

Jelen tananyag az *EFOP-3.4.4 – 16-2017-00025 „Bepillantás a jövődbe!" — Komplex műegyetemi pályaorientációs és továbbtanulást segítő programok* elnevezésű projekt keretein belül készült.

Lektorálta: Szilasi Zoltán (Debreceni Egyetem)

Amennyiben sajtóhibát talál, illetve más, a tankönyvvel kapcsolatos észrevétele van, kérjük írjon nekünk.

Elérhetőségek:
Pék Johanna – pekj@arch.bme.hu
Strommer László – strommer@arch.bme.hu
Dobos Sándor – dobos@fazekas.hu

Köszönetnyilvánítás

Ezúton szeretnénk megköszönni Szilasi Zoltán alapos lektori munkáját és észrevételeit.

Köszönjük továbbá Strommer Tamásnak a LaTeX-fájl és az ábrák elkészítésében nyújtott hasznos segítségét.

Borítóterv: Máthé Dóra

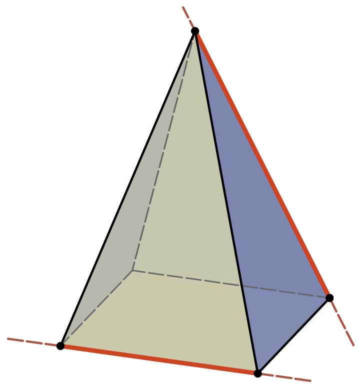
1. fejezet

Térgeometriai alapismeretek

1.1. Térelemek kölcsönös helyzete

A geometriában alapvető *térelemek*nek a pontokat, egyeneseket és síkokat tekintjük. E térelemek kölcsönös helyzetét tekintve az alábbi esetek adódhatnak.

- Két pont lehet
  - egybeeső;
  - különböző.
- Egy pont egy egyenesre lehet
  - illeszkedő;
  - nem illeszkedő.
- Egy pont egy síkra lehet
  - illeszkedő;
  - nem illeszkedő.
- Két egyenes lehet
  - egybeeső, ha minden pontjuk közös;
  - párhuzamos, ha nincs közös pontjuk, de közös síkjuk igen;
  - metsző, ha egyetlen közös pontjuk van (*metszéspont*);
  - kitérő helyzetű, ha nem egybeeső, nem párhuzamos és nem is metsző: például az 1.1. ábrán a gúla két olyan éle, amelyeknek nincs közös pontja.



1.1. ábra. Kitérő helyzetű egyenesek

- Egy egyenes és egy sík lehet
  - illeszkedő, ha az egyenes minden pontja a síknak is pontja;

  - párhuzamos, ha az egyenes nem illeszkedik a síkra, de a síknak van olyan egyenese, amely párhuzamos az adott egyenessel;
  - metsző helyzetű, ha egyetlen közös pontjuk van (*döféspont*).

- Két sík lehet

  - egybeeső, ha minden pontjuk közös;
  - párhuzamos, ha egyetlen közös pontjuk sincs;
  - metsző, ha van közös pontjuk, de nem egybeesőek – ekkor a közös pontok halmaza egy egyenest alkot (*metszésvonal*).

1.2. Térelemek szöge és távolsága

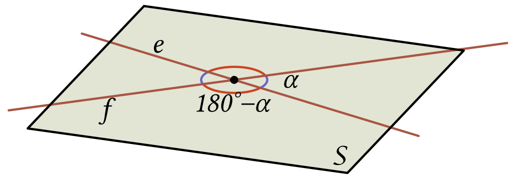
Az elemi térgeometriai feladatok igen gyakran kérdeznek rá pontok, egyenesek és síkok egymástól való távolságára, illetve egymással bezárt szögére. A távolságok és szögek helyes értelmezése alapvető a mérnöki tudományokban is.

1.2.1. Térelemek szöge

Szögek esetén értelemszerűen egyenesek és síkok szögeit szükséges vizsgálni. Ha két egyenes/sík illeszkedő vagy párhuzamos helyzetű, akkor szögük definíció szerint 0°.

Két egyenes szöge (1.2. ábra) az egyenesek által bezárt szögek kisebbike: $\sphericalangle(e, f) = \alpha$. Merőleges egyenesek esetén ez a szög 90°.

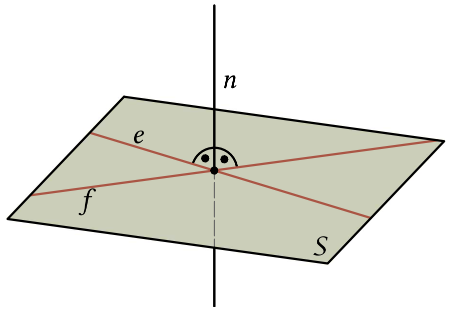
Az ábrázoló geometriában kiemelt fontosságú egy sík és egy egyenes merőlegessége (1.3. ábra), ezért a későbbi fejezetek tanulmányozásához elengedhetetlen a következő tétel ismerete (bizonyítását lásd a 10. osztályos matematika tankönyvekben).



1.2. ábra. Két metsző egyenes szöge

Síkra merőleges egyenes tétele

Ha egy egyenes merőleges a sík két egymást metsző egyenesére, akkor merőleges a sík minden egyenesére. Ekkor azt mondjuk, hogy az egyenes merőleges a síkra.

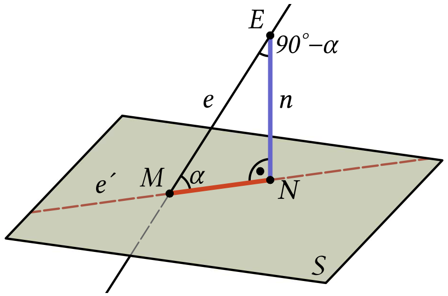


1.3. ábra. Síkra merőleges egyenes

Sík normálisa

A sík egy *normális*án (normális egyenesén) egy, a síkra merőleges egyenest értünk.

Egy egyenes és egy sík szöge (1.4. ábra) megegyezik az egyenesnek és az egyenes síkra eső merőleges vetületének szögével: $\sphericalangle(e,\mathcal{S}) = \sphericalangle(e,e') = \alpha$.
(A merőleges vetületet lásd a 2.1. fejezet 2.3. ábráján.)

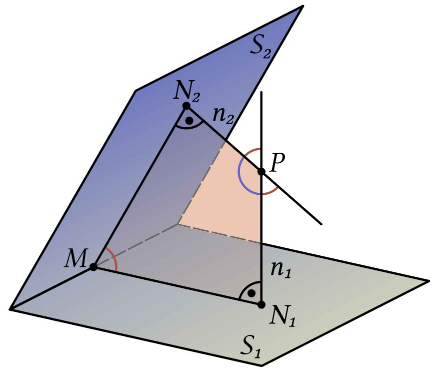


1.4. ábra. Egyenes és sík szöge

Mivel a merőleges vetület meghatározása gyakran igen bonyolult (mind számítások, mind pedig szerkesztések esetén), ezért sokszor inkább a keresett szög pótszögét keressük meg. Az e egyenes tetszőleges E pontjából merőlegest állítva az $\mathcal{S}$ síkra (n normális), az adódó $MNE\triangle$ derékszögű háromszögben $EMN\sphericalangle = \alpha$ és $MEN\sphericalangle = 90° - \alpha$ szögek pótszögek, utóbbi pedig meghatározható két egyenes szögeként: $\sphericalangle(e,n) = 90° - \alpha$.

Két (metsző) sík szöge azon két egyenes szöge, amelyeket úgy kapunk, hogy a metszésvonal egy pontjából mindkét síkban merőleges állítunk a metszésvonalra. Belátjuk, hogy ez a szög megegyezik a normálisaik szögével (1.5. ábra).
A tér egy tetszőleges P pontjából állítsunk merőleges egyeneseket (n_1 és n_2 normálisokat) a két egymást metsző síkra. A normálisok talppontjai legyenek N_1 és N_2 pontok, a két normális szöge $\alpha = \sphericalangle(n_1, n_2)$. A két normális egy olyan síkot határoz meg, amely a két eredeti sík metszésvonalát egy M pontban metszi. Az adódó MN_1PN_2 négyszög húrnégyszög, ezért az $N_1MN_2\sphericalangle = 180° - N_1PN_2\sphericalangle = \alpha$. Tehát a tekintett két normális szöge éppen a két sík szöge.

A síkok szögeinek az építészetben is komoly szerepe van: például egy tetőfelület valamely részének egy vízszintes síkkal (a talajjal) bezárt szöge (*meredeksége*)



1.5. ábra. Két sík szöge

jelentőséggel bírhat mind műszaki, mind esztétikai szempontból. Az 1.6. ábrán látható esetben nyilvánvalóan szempont volt az is, hogy a torony sisakjának felső része szabályos nyolcszögű gúlát formázzon – vagyis a szomszédos tetősíkok szöge azonos legyen.

1.6. ábra. Rostock, Sankt-Petri-Kirche

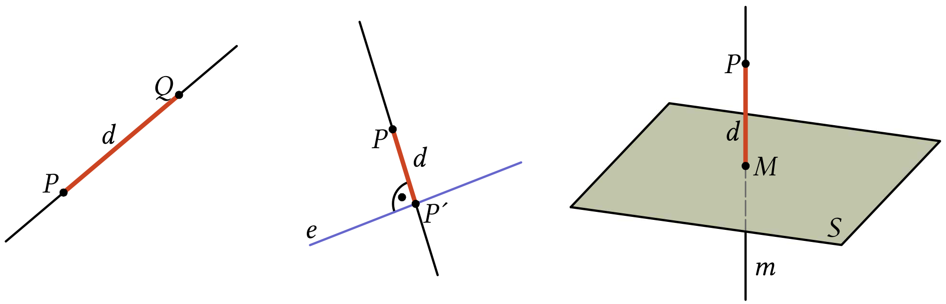
1.2.2. Térelemek távolsága

Ha két térelemnek van közös pontja – azaz az egyik illeszkedik a másikra, vagy metszik egymást –, akkor a távolságuk 0 (nulla).

- Két nem egybeeső pont távolsága az általuk meghatározott szakasz hossza (1.7. ábra, balra).

- Pont és egy azt nem tartalmazó egyenes távolsága a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hossza (1.7. ábra, középen, $PP' = d$).

- Pont és egy azt nem tartalmazó sík távolsága a pontból a síkra állított merőleges szakasz hossza (1.7. ábra, jobbra): P pontból merőleges egyenest állítva $\mathcal{S}$ síkra (m), és meghatározva M metszéspontjukat, a keresett távolság a $\overline{PM}$ szakasz hossza.

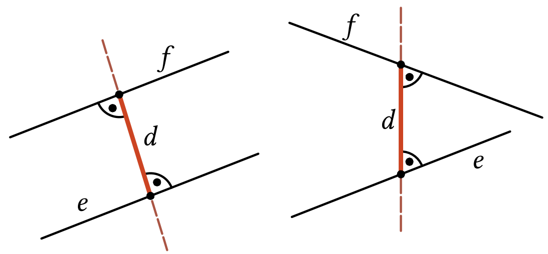


1.7. ábra. Pont távolsága ponttól, egyenestől, illetve síktól

- Két egyenes távolságának meghatározása függ az egyenesek kölcsönös helyzetétől.

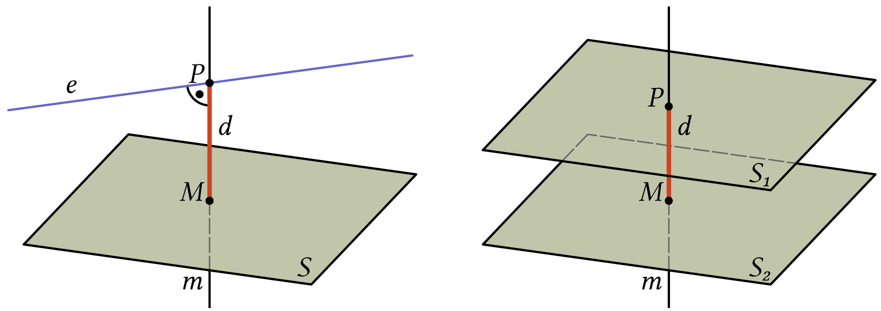
  – Ha a két egyenes párhuzamos, akkor távolságuk visszavezethető pont és egyenes távolságára: az egyik egyenes tetszőleges pontját kiválasztva, a két egyenes távolsága a választott pont és a másik egyenes távolsága (1.8. ábra, balra).

  – Ha a két egyenes kitérő, akkor a távolságuk annak a szakasznak a hossza, amely mindkét egyenest metszi, és mindkettőre merőleges (1.8. ábra, jobbra). Ezt a szakaszt (és annak egyenesét is) *normáltranszverzális*nak nevezzük.



1.8. ábra. Párhuzamos, illetve kitérő egyenesek távolsága

- Egy egyenes és egy azzal párhuzamos sík távolsága visszavezethető pont és sík távolságára: az egyenes egy tetszőleges P pontját kiválasztva, a keresett távolság a P pont és az adott sík távolsága (1.9. ábra, balra).



1.9. ábra. Párhuzamos egyenes és sík, illetve párhuzamos síkok távolsága

- Két párhuzamos sík távolsága szintén visszavezethető pont és sík távolságára: az egyik sík egy tetszőleges P pontját kiválasztva, a keresett távolság a P pont és a másik sík távolsága (1.9. ábra, jobbra).

1.3. Geometriai alakzatok a térben

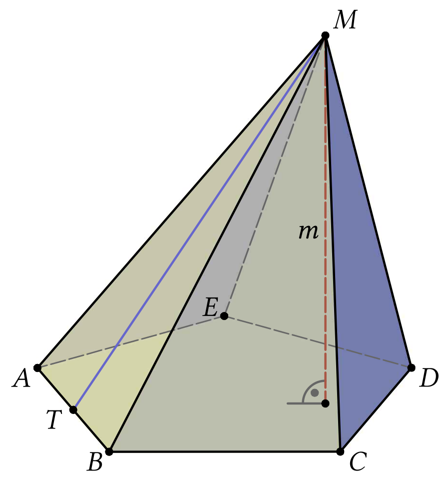
Ebben a fejezetben összefoglaljuk a legfontosabb ismereteket az általános- és középiskolában gyakran előforduló testekről (felületekről). Ezeket a testeket a későbbi fejezetekben alkalmazzuk, és érdekes feladatokat oldunk meg szerkesztéssel: például egy gúla vagy egy hasáb közös pontjainak meghatározását egy egyenessel. (Lásd a 7. fejezetet.)

1.3.1. Gúla

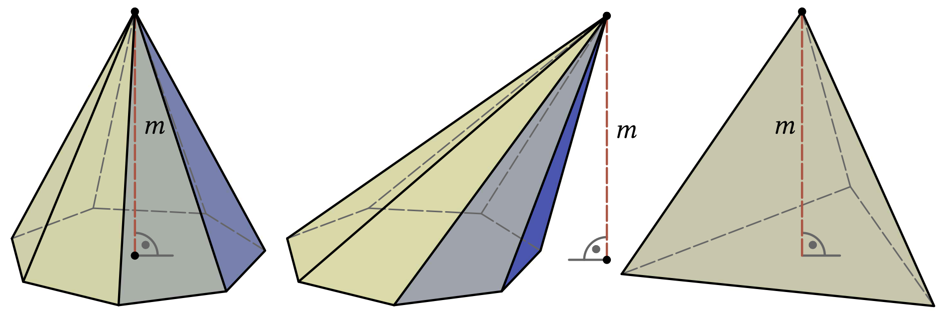
Tekintsünk egy sokszöget és egy pontot, amely nincs a sokszög síkjában, majd kössük össze szakaszokkal a sokszög minden pontját az adott ponttal. Az így kapott felület az adott sokszöggel együtt egy testet határol, amelyet *gúlá*nak nevezünk (1.10. ábra).

Az adott sokszög a gúla *alaplap*ja ($ABCDE$ sokszög), az adott pont pedig a gúla *csúcspont*ja (az ábrán az M pont). Az alaplap egy oldala és a csúcspont által meghatározott háromszög a gúla egy *oldallap*ja (pl. $ABM\triangle$). Az alaplap oldalai a gúla *alapél*ei (pl. $\overline{AB}$), az oldallapok az *oldalél*ekben találkoznak (pl. $\overline{AM}$). Az oldallapok összességét a gúla *palást*jának nevezzük. A gúla alaplapjának egy tetszőleges pontját a csúcsponttal összekötve a gúla egy *alkotó*ját kapjuk (pl. $\overline{TM}$). A gúla *magasság*a gúla csúcspontjából az alaplap síkjára állított merőleges szakasz hossza (az ábrán az m szakasz).

*Egyenes gúlá*ról beszélünk, ha egy gúla magasságának talppontja az alaplap szimmetriaközéppontja, egyéb esetben a gúla *ferde* (1.11. ábra, balra és középen). Egy *szabályos gúla* olyan egy egyenes gúla amelynek alaplapja szabályos sokszög. *Szabályos tetraéder*nek nevezzük azt a gúlát, amelynek alaplapja és oldallapjai is egymással egybevágó szabályos háromszögek (1.11. ábra, jobbra).

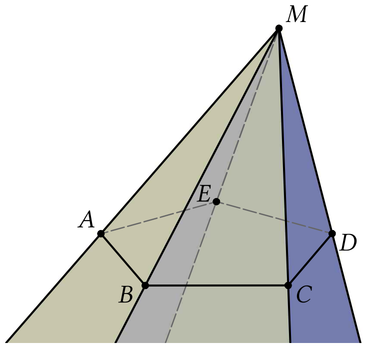


1.10. ábra. Gúla



1.11. ábra. Egyenes és ferde gúla, szabályos tetraéder

*Gúlafelület*nek nevezzük azt a felületet, amelyet egy gúla alkotóinak félegyenesei vagy egyenesei határoznak meg (1.12. ábra).

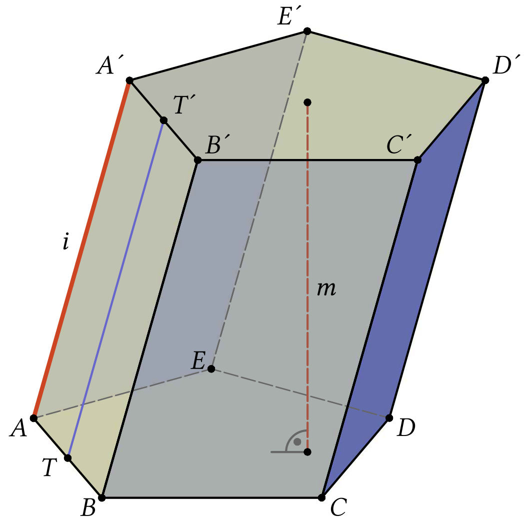


1.12. ábra. Gúlafelület

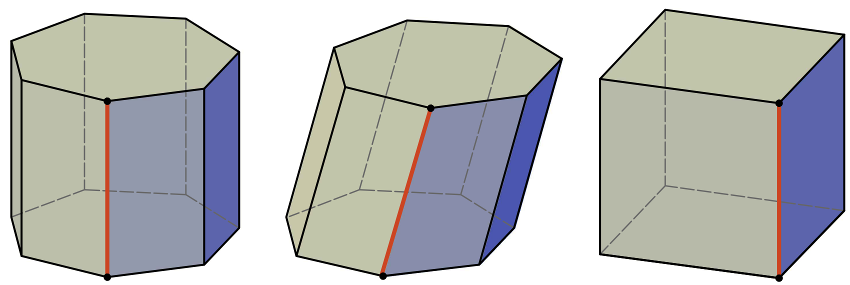
1.3.2. Hasáb

Egy sokszöglapot toljunk el a térben egy olyan i iránnyal, amely nem párhuzamos a sokszög síkjával. Az így kapott testet *hasáb*nak nevezzük. (Az 1.13. ábrán az egyszerűség kedvéért az irány kezdőpontja a sokszög egyik csúcspontja.)
Az adott sokszög a hasáb *alaplap*ja, az eltoltja a *fedőlap*ja ($ABCDE$ és $A'B'C'D'E'$ sokszögek). Az alaplap oldalait (pl. az $\overline{AB}$ szakaszt) *alapél*eknek nevezzük. A hasáb egy *oldallap*ján az alaplap egyik oldalának eltolásával kapott paralelogrammát értjük (pl. $BCC'B'$). Az oldallapok az *oldalél*ekben találkoznak (pl. $\overline{CC'}$), a hasáb *palást*ja az oldallapjainak összessége. Ha az alaplap tetszőleges pontjába eltoljuk az egyik oldalélt, akkor a hasáb egy *alkotó*ját kapjuk (pl. $\overline{TT'}$). Az alkotók párhuzamosak és egybevágóak a kiinduláskor használt iránnyal, ezért azt szokás az *alkotók irányá*nak is nevezni. A hasáb *magassága* az alap- és a fedőlap síkjainak távolsága (az ábrán az m szakasz).

*Egyenes hasáb*ról beszélünk, ha az eltoláshoz használt irány merőleges az alaplap síkjára, egyéb esetben a hasáb *ferde* (1.14. ábra, balra és középen). *Szabályos hasáb* esetén, az egy egyenes hasáb alaplapja szabályos sokszög. *Kocká*nak nevezzük azt a négyzet alapú egyenes hasábot, amelynek magassága megegyezik az alapélek közös hosszával, azaz lapjai egymással egybevágó négyzetek (1.14. ábra, jobbra).

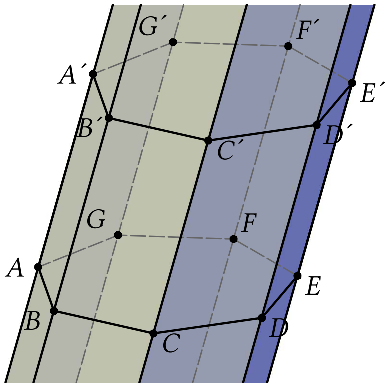


1.13. ábra. Hasáb



1.14. ábra. Egyenes és ferde hasáb, kocka

*Hasábfelület*nek nevezzük azt a felületet, amelyet egy hasáb alkotóinak egyenesei határoznak meg (1.15. ábra).



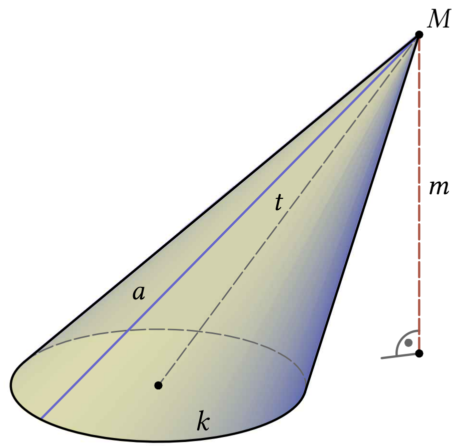
1.15. ábra. Hasábfelület

1.3.3. Kúp

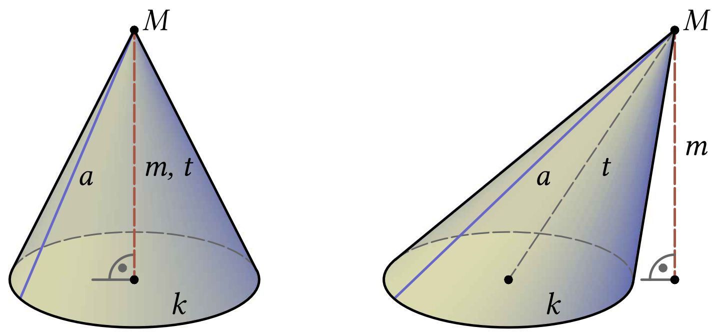
Tekintsünk egy kört és egy pontot, amely nincs a kör síkjában, és kössük össze szakaszokkal a kör pontjait az adott ponttal. Az így kapott testet *kúp*nak (pontosabban körkúpnak) nevezzük (1.16. ábra).
Az adott kör a kúp *alapköre* (k), az adott pont a kúp *csúcspont*ja (M). A kúp *tengely*e (t) az alapkör középpontját és a csúcspontot összekötő szakasz/egyenes. Az összekötő szakaszok az *alkotó*k (pl. a), az általuk meghatározott felület a kúp *palást*ja. A kúp *magasság*a a kúp csúcspontjából az alapkör síkjára állított merőleges szakasz (m) hossza.

*Egyenes kúp*ról beszélünk, ha magasságának talppontja az alapkör középpontja (azaz a magasság egyenese egybeesik a kúp tengelyével), egyéb esetben a kúp *ferde* (1.17. ábra).

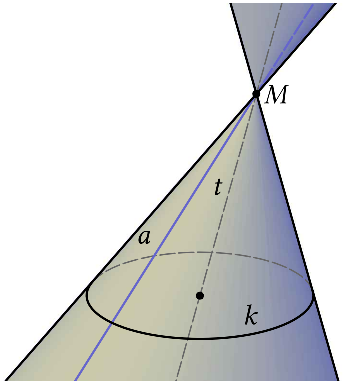
*Kúpfelület*nek nevezzük azt a „végtelenbe nyúló” nyílt felületet, amelyet akkor kapunk, ha az előbbi kúp csúcsát és alapkörének pontjait szakaszok helyett egyenesekkel kötjük össze (1.18. ábra).



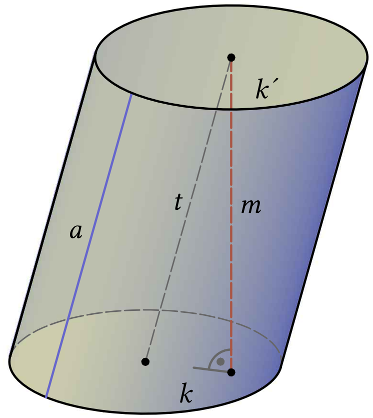
1.16. ábra. Körkúp



1.17. ábra. Egyenes és ferde körkúp



1.18. ábra. Kúpfelület



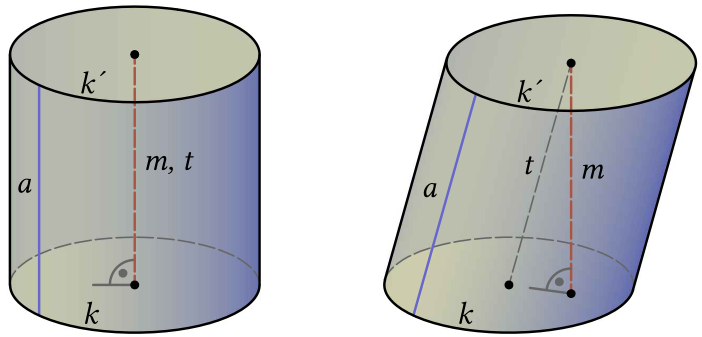
1.19. ábra. Körhenger

1.3.4. Henger

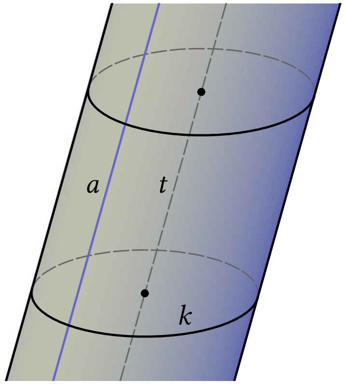
Egy körlapot toljunk el a térben egy olyan iránnyal, amely nem párhuzamos a kör síkjával. Az így kapott testet *henger*nek (precízen körhengernek) nevezzük. (Az 1.19. ábra az adott irányt a kör középpontjában ábrázolja.)
Az adott kör a henger *alapköre* (k), az eltoltja a *fedőköre* (k'). A henger *tengelye* az alap- és fedőkör középpontjait összekötő szakasz/egyenes (t). Az eltolás során egymásnak megfelelő pontokat összekötő szakaszok a henger *alkotó*i (pl. a), az alkotók összessége a henger *palást*ja. Az eltoláshoz használt irány az *alkotók iránya*. A henger *magasság*a az alap- és a fedőkör síkjának távolsága (m).

*Egyenes henger*ről beszélünk, ha a magasság talppontja éppen az alapkör középpontja, egyéb esetben a henger *ferde* (1.20. ábra).

*Hengerfelület*nek nevezzük azt a végtelen nyílt felületet, amelyet egy kör adott, nem a kör síkjába eső irány szerinti eltolásával kapunk. E felület úgy is származtatható, hogy a henger alkotóit nem szakaszoknak, hanem egyeneseknek tekintjük (1.21. ábra).



1.20. ábra. Egyenes és ferde körhenger

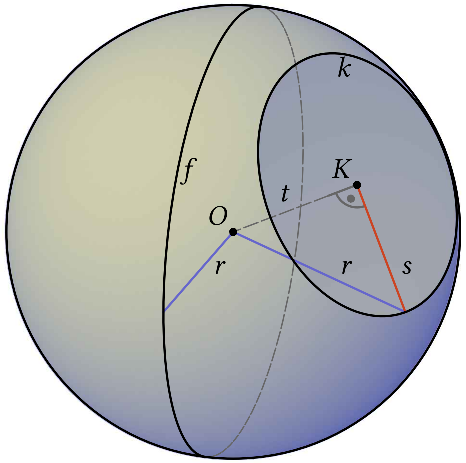


1.21. ábra. Hengerfelület

1.3.5. Gömb

A tér egy adott pontjától adott távolságra lévő pontok halmazát *gömb*nek (gömbfelületnek) nevezzük (1.22. ábra).
Az adott pont a gömb *középpont*ja (O), az adott távolság a gömb *sugar*a (r). Egy gömbfelületre körök illeszthetők, melyek középpontjai a gömbön belül vannak (például a K középpontú s sugarú k kör). A gömb minden ilyen „ráírt” körére teljesül, hogy a kör középpontját és a gömb középpontját összekötő szakasz (t) merőleges a kör síkjára. Ebből következik, hogy $r = \sqrt{s^2 + t^2}$ teljesül.

*Főkör*nek nevezzük az olyan gömbre írt kört (pl. f), melynek sugara maximális, azaz éppen a gömb sugarával egyenlő, és így középpontja egybeesik a gömb középpontjával.



1.22. ábra. Gömb

2. fejezet

Leképezések térben és síkban

2.1. Párhuzamos és centrális vetítések tulajdonságai

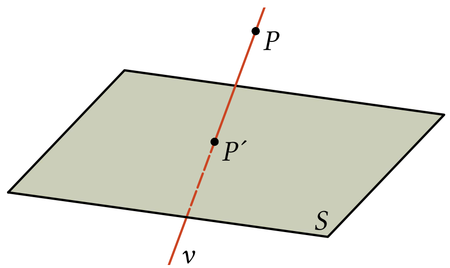
Az ábrázoló geometria célja, hogy a térben található objektumokról olyan „képeket” (vetületeket) készítsünk, amelyekből az adott objektum helyzete és tulajdonságai egyértelműen meghatározhatók. Ezért igen fontos, hogy megismerjük a párhuzamos és a centrális vetítés fogalmát és tulajdonságait. A definíciókat a háromdimenziós térben fogalmazzuk meg, a vetítés fogalmát ismertnek tekintjük.

A tér egy síkra történő vetítése során a sík, amelyre vetítünk a *képsík* (a 2.1. ábrán az $\mathcal{S}$). A tér egy tetszőleges P pontját egy v *vetítőegyenes* vetíti a képsíkra. A P pont *kép*e a képsík és a vetítőegyenes P' metszéspontja.

Egy alakzat képe az alakzat pontjainak képeiből áll. Emiatt, ha egy pont illeszkedik egy alakzatra, akkor a pont képe is illeszkedik az alakzat képére. A vetítés ezen tulajdonságát *illeszkedéstartás*nak nevezzük. Ha a tér egy síkra történő vetítése során egy egyenes képe egyenes marad, akkor a vetítés *egyenestartó*.

Párhuzamos (paralel) vetítés

*Párhuzamos vetítés*ről beszélünk, ha a tér pontjait olyan módon vetítjük egy síkra, hogy a vetítősugarak egymással párhuzamosak (2.2. ábra).

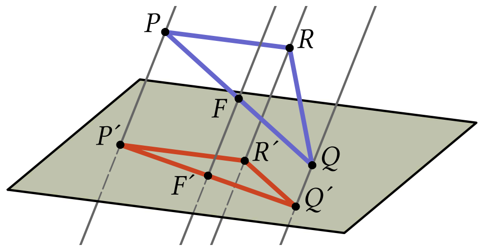


2.1. ábra. Térbeli pont síkra vetítése

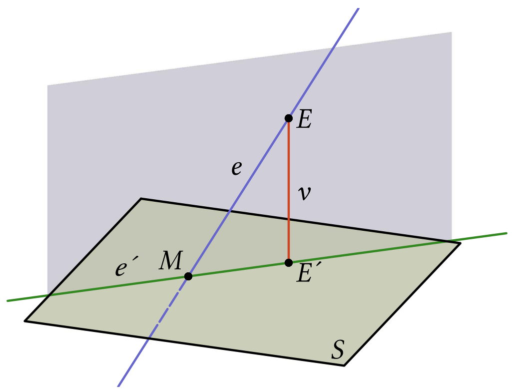
A vetítősugarak közös állását a *vetítés irányá*nak nevezzük. *Merőleges vetítés* esetén a vetítés iránya merőleges a képsíkra. (Lásd a 2.3. ábrát.)

A párhuzamos vetítés értelemszerűen *illeszkedés-* és *egyenestartó*, továbbá:
– *párhuzamosságtartó*, azaz a párhuzamos egyenesek képei szintén párhuzamosak;
– *aránytartó*, azaz egy szakasz egy osztópontjának képe a szakasz képét az eredetivel azonos arányban osztja (például $\overline{PQ}$ szakasz F felezőpontjának képe – az F' pont – felezőpontja a $\overline{P'Q'}$ szakasznak).

Megjegyzés: Az aránytartást a felsőbb matematikában osztóviszony-tartásnak nevezzük.



2.2. ábra. Párhuzamos vetítés

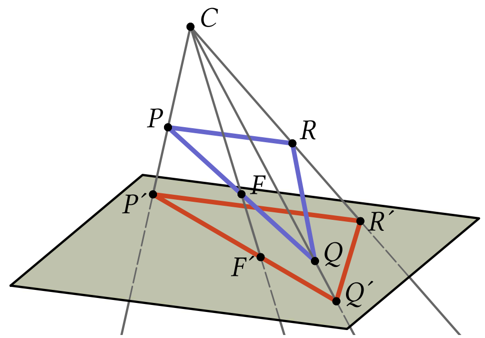


2.3. ábra. Példa egy egyenes síkra történő (merőleges) vetítésére

Centrális (középpontos) vetítés

*Centrális vetítés*ről beszélünk, ha a tér pontjait olyan módon vetítjük egy síkra, hogy a vetítősugarak mindegyike áthalad egy, a képsíkra nem illeszkedő ponton, amelyet a vetítés *centrum*ának nevezünk (2.4. ábra).

A centrális vetítés értelemszerűen *illeszkedés-* és *egyenestartó*, azonban:
– *nem párhuzamosságtartó*;
– *nem aránytartó* ($\overline{PQ}$ F felezőpontjának képe – az F' pont – nem felezőpontja a $\overline{P'Q'}$-nak).



2.4. ábra. Centrális vetítés

Megjegyzés: Párhuzamos és centrális vetítésekkel minden nap találkozhatunk. Például, egy lámpával megvilágított tárgy asztalra eső árnyéka az adott tárgy centrális vetülete. A Nap azonban olyan távol van a Földtől, hogy például az épületek árnyéka vonatkozásában a napsugarak párhuzamosnak tekinthetők.

Rekonstruálhatóságnak nevezzük azt a tulajdonságot, amikor egy leképezés esetén a pont képéből vagy több képsíkra vetített képeiből *egyértelműen* meg lehet határozni az eredeti pont térbeli helyzetét. A későbbi fejezetekben bemutatott leképezésekben (Monge-projekcióban, axonometriában, perspektívában) a pontok egyértelműen rekonstruálhatóak a képeik segítségével.

2.2. Tengelyes affinitás és centrális kollineáció

A következőkben két olyan leképezéssel ismerkedünk meg, amelyeket gyakran alkalmazunk az ábrázoló geometriában. A tankönyv teljes megértéséhez elengedhetetlenül fontosak, de a bevezető fejezetek ezek nélkül is tökéletesen érthetőek. Így elegendő csupán akkor tanulmányozni ezt az alfejezetet, amikor az első alkalmazására sor kerül.

2.2.1. Tengelyes affinitás

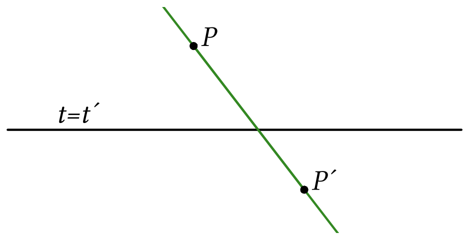
Eddigi tanulmányaink során több síkbeli leképezéssel (transzformációval) megismerkedtünk már, például a tengelyes tükrözéssel, az elforgatással, a különböző hasonlósági transzformációkkal. Ezek a leképezések megőrzik a szögeket, továbbá a párhuzamosságot és a szakaszokon fellépő arányokat is.
Létezik azonban olyan leképezés (ún. *affinitás*), amely nem távolság- és szögtartó, csupán egyenes-, párhuzamosság- és aránytartó. (Az illeszkedéstartás természetes módon teljesül.) Ennek speciális esete a tengelyes affinitás.

Tengelyes affinitás

A sík egy *tengelyes affinitás*án olyan, a síkot önmagára képező kölcsönösen egyértelmű leképezést értünk, amely egyenes-, párhuzamosság- és aránytartó, továbbá van egy pontonként fix egyenese. A fix egyenest az affinitás *tengely*ének nevezzük.

A tengelyes affinitást (2.5. ábra) meghatározza a tengelye ($t = t'$ egyenes), és egy tetszőleges pont az *affin kép*ével együtt (P és P' pontok).
Az affinitás *irány*a a $\overleftrightarrow{PP'}$ egyenes állásával egyezik meg. Belátható, hogy minden további pontot és annak képét összekötő egyenes párhuzamos az affinitás irányával.

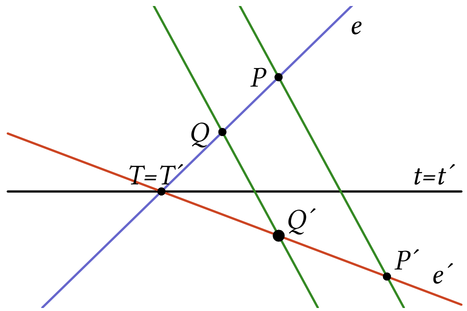
Megjegyzés: Fontos különbséget tenni a pontonként fix és az objektumként fix egyenesek között. *Pontonként fix* egyenes esetén az egyenes minden egyes pontjának képe önmaga – ilyen a tengelyes affinitás tengelye. *Objektumként fix* (más szóval invariáns) egyenes képe önmaga, de egy pont és annak képe lehet különböző – erre példa a P-n és P'-n átmenő egyenes.



2.5. ábra. Tengelyes affinitás

Tengelyes affinitás: pont képének szerkesztése

Adott egy tengelyes affinitás tengelyével és a (P, P') pontpárral. Szerkesszük meg a Q pont affin képét!



2.6. ábra. Pont affin képe

A szerkesztés lépései

A feladat megoldásához felhasználjuk azt, hogy a tengely minden pontja fix, továbbá a P pontot és annak P' képét is (2.6. ábra).

1. Kössük össze a P pontot a Q-val, a kapott egyenes e.

2. Az e egyenes metszi a t tengelyt, a metszéspont képe önmaga ($T = T'$).
3. Az e egyenest nem csupán a P és a Q pontok, de a P és T pontok is egyértelműen meghatározzák. Ezért az e egyenes képét megkapjuk, ha a P' pontot a T'-vel kötjük össze (e').
   Az illeszkedéstartás miatt az e' egyenesen rajta van a keresett Q' pont is, de még meg kell keressük pontos helyét.
4. A definícióban leírtak szerint minden pontot és képét összekötő egyenes párhuzamos az affinitás irányával, ezért ha a Q pontban párhuzamost húzunk a $\overleftrightarrow{PP'}$ egyenessel, azon szintén rajta kell legyen a Q' pont. Így, ahol az e' egyenest elmetszi a Q ponton áthaladó irány, ott található a keresett Q' pont.

Egy pont affin képének meghatározása után határozzuk meg egy paralelogramma affin képét. A párhuzamosságtartás miatt paralelogramma képe paralelogramma.

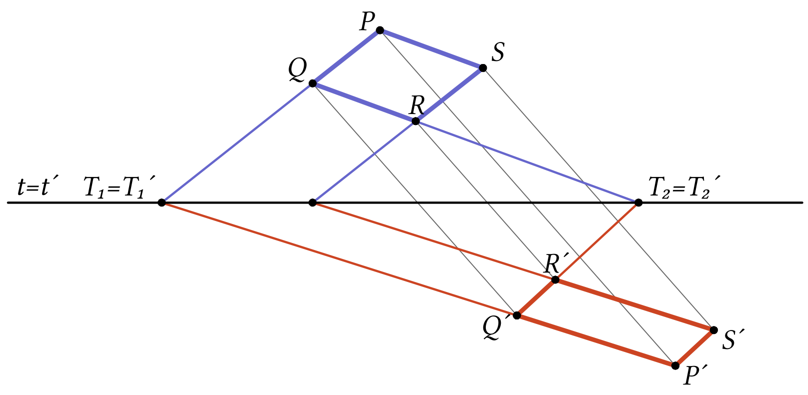
Paralelogramma affin képe

Adott egy tengelyes affinitás tengelyével, továbbá a P ponttal és annak P' képével. Szerkesztendő a $PQRS$ paralelogramma affin képe.

A szerkesztés lépései

A megoldás során a P és P' pontok segítségével meghatározzuk a Q, R és S pontok képeit (2.7. ábra).

1. Az előző feladat megoldását felhasználva, határozzuk meg először például a Q pont képét. A $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes a tengelyt a $T_1 = T_1'$ fixpontban metszi, ennek segítségével a $\overleftrightarrow{P'Q'}$ egyenes, majd a Q' pont is megszerkeszthető.



2.7. ábra. Paralelogramma affin képe

2. Szerkesszük meg az R pont képét. Ehhez már a (P, P') és a (Q, Q') pontpár is felhasználható. Válasszuk most a (Q, Q') pontpárt.
3. A $\overleftrightarrow{QR}$ egyenes a tengelyt a $T_2 = T_2'$ fixpontban metszi. E pontot összekötve Q'-vel a $\overleftrightarrow{QR}$ affin képét kapjuk. Az affinitás irányával R-ből húzott párhuzamos kimetszi az előző egyenesből a keresett R' pontot. (Vegyük észre, hogy a szerkesztés teljesen megegyezik a korábban bemutatott példával.)
4. Az S' pont meghatározásához felhasználható a (P, P'), (Q, Q') vagy (R, R') pontpárok bármelyike, de kihasználhatjuk azt is, hogy a tengelyes affinitás párhuzamosságtartó. R'-ből párhuzamost húzva $\overleftrightarrow{P'Q'}$-vel, és P'-ből párhuzamost húzva $\overleftrightarrow{Q'R'}$-vel, megkapjuk a hiányzó S' affin képet.

A szerkesztésünk helyességét könnyen ellenőrizhetjük: $\overleftrightarrow{SS'}$ egyenes az affinitás irányával párhuzamos, vagy a $\overleftrightarrow{RS}$ és $\overleftrightarrow{R'S'}$ egyenesek a tengelyen metszik egymást.

A megoldásból jól látható, hogy a tengelyes affinitás nem őrzi meg sem a távolságokat, sem pedig a szögeket. Azt is érdemes végiggondolni, hogy a pontok szerkesztése során mindig fel tudtuk használni a korábban már megszerkesztett affin pontokat. Így egyre nagyobb a választási lehetőségünk, hogy melyik pontpár segítségével kapjuk egy újabb pont affin képét.

Megjegyzés: A tengelyes affinitással nehezebb feladatok is megoldhatók; lehetőség van például paralelogrammát téglalappá transzformálni.

2.2.2. Centrális kollineáció

Az előző fejezetben látott tengelyes affinitás párhuzamosság- és aránytartó leképezés. Szeretnénk egy még általánosabb leképezést definiálni, amelytől (szinte) már csak azt várjuk el, hogy egyenes képe egyenes legyen.

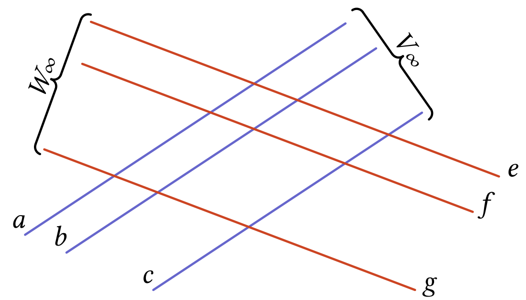
A centrális kollineáció mélyebb elsajátításához fontos megismerkednünk a végtelen távoli pontok fogalmával. Sokak számára ismert lehet a „párhuzamosok a végtelenben találkoznak” mondat, amely arra utal, hogy például egy fényképen egy út két szélét összetartónak (metszőnek) érezzük. Ezt a jelenséget próbáljuk meg matematikai eszközökkel leírni.

Végtelen távoli (ideális) pont – konstrukció

Tekintsük a sík egy tetszőleges egyenesét. „Adjunk hozzá” az egyeneshez egyetlen plusz pontot. Az adott egyenessel párhuzamos egyenesek mindegyikéhez ugyanezt(!) a pontot csatoljuk. Így ezeknek a párhuzamos egyeneseknek a közös pontja ez a hozzáadott pont, amelyet az adott egyenes *végtelen távoli pont*jának nevezünk.
Jelölés: alsó indexben feltüntetett ∞ jel, pl. V_∞

Megjegyzések:

- Nem párhuzamos egyeneseknek különbözőek a végtelen távoli pontjaik. A 2.8. ábrán az a, b és c egyenesek közös végtelen távoli pontja a V_∞ pont; az e, f és g a W_∞-ben metszi egymást.



2.8. ábra. Végtelen távoli pontok

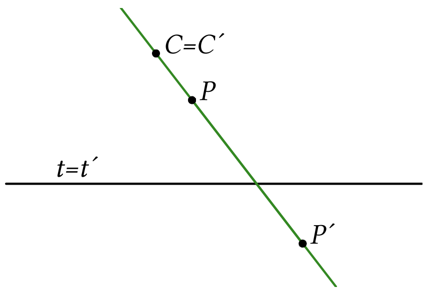
- Ha egy tetszőleges pontot össze szeretnénk kötni egy végtelen távoli ponttal, akkor a végtelen távoli pont „irányába” mutató egyenesekkel kell párhuzamost húzni az adott ponton keresztül. (Lásd az ellentengelyek szerkesztésének 2. pontját és a 2.11. ábrát.)
- Egy síkon végtelen sok, különböző irányú egyenes létezik. Így *egy síkon végtelen sok végtelen távoli pont van, amelyek egyetlen egyenesre, a sík* **végtelen távoli egyenes***ére illeszkednek.*

Centrális kollineáció

*Centrális kollineáció*n olyan, a végtelen távoli pontokkal kibővített sík önmagára való kölcsönösen egyértelmű, egyenestartó leképezését értjük, amelynek van egy pontonként fix *tengelye* és egy arra nem illeszkedő, fixen maradó *centrum*a.

A centrális kollineációt (2.9. ábra) meghatározza a tengelye ($t = t'$ egyenes), a centruma ($C = C'$ pont), és egy tetszőleges pont a *centrálkollineációs kép*ével együtt (P és P' pontok) úgy, hogy az utóbbi két ponton átmenő egyenes áthalad a centrumon.

Minden további pontra és képére is teljesül, hogy az azokat összekötő egyenesen rajta van a centrum.



2.9. ábra. Centrális kollineáció

Megjegyzés: A definíció alapján bebizonyítható, hogy a centrális kollineáció nem párhuzamosság- és nem aránytartó – ugyanakkor megtartja az egyes egyeseken fellépő „arányok arányát”, amelyet a felsőbb matematikában *kettősviszony-tartás*nak neveznek.

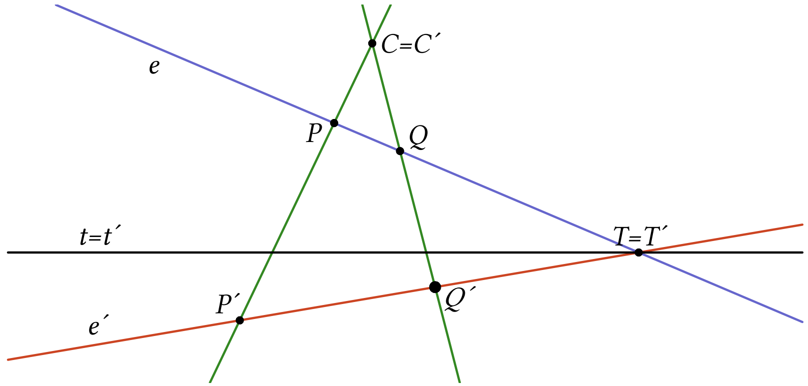
Centrális kollineáció: pont képének szerkesztése

Adott egy centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a (P, P') pontpárral. Szerkesszük meg a Q pont képét az adott centrális kollineációban!

A szerkesztés lépései

A keresett Q' pont megszerkesztéséhez kihasználjuk, hogy a tengely pontonként fix, továbbá a P pontot és annak P' képét is segítségül hívjuk (2.10. ábra).

1. Kössük össze a P pontot a Q ponttal, így kapjuk az e egyenest.
2. Az e egyenes elmetszi a t tengelyt egy $T = T'$ fixen maradó pontban.



2.10. ábra. Pont képe centrális kollineációban

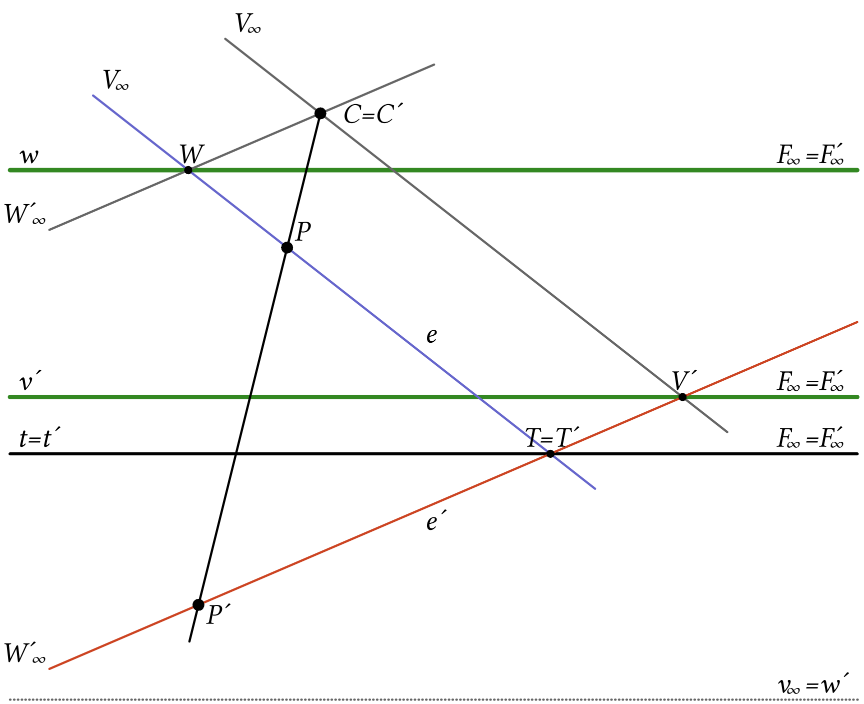
3. Az e egyenes képét meghatározzák a P' és T' pontok (e'). Az illeszkedéstartás miatt az e' egyenesen rajta van a keresett Q pont.
4. Mivel minden pontot és képét összekötő egyenes átmegy a centrumon, ezért a Q és C pontokat összekötő egyenes kimetszi a Q pont képét e'-ből: Q'.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a feladatmegoldás stratégiája szinte teljes mértékben megegyezett a tengelyes affinitásnál látottal.

Felmerülhet a kérdés, hogy vajon van-e olyan leképezés, amely a végtelen távoli pontokat „véges helyzetű” pontba képezi és fordítva. A válasz igen: a centrális kollineáció ilyen leképezés.
Ráadásul, néhány speciális eset kivételével, a sík végtelen távoli egyenesének képe egy véges helyzetű egyenes, továbbá van olyan véges helyzetű egyenes, amelynek a képe a sík végtelen távoli egyenese. Ezt a két egyenest **ellentengelyek**nek nevezzük.

Ellentengelyek szerkesztése

Adott egy centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a (P, P') pontpárral. Szerkesszük meg az ellentengelyeket!



2.11. ábra. Ellentengelyek szerkesztése

A szerkesztés lépései

A feladat megoldásához egy tetszőleges, P-n áthaladó e egyenest és annak képét használjuk fel (2.11. ábra). A korábbi szerkesztések alapján az e képe – annak $T = T'$ fixpontját felhasználva – az $\overleftrightarrow{P'T'} = e'$.

Szerkesszük meg először a végtelen távoli egyenes képét!

1. Ha a végtelen távoli egyenes két pontjának képét megszerkesztjük, akkor az azokat összekötő egyenes a végtelen távoli egyenes képe. Az egyik ilyen végtelen távoli pont legyen az e egyenes V_∞ pontja.
2. Kössük össze a C centrumot a V_∞ ponttal, azaz *húzzunk párhuzamost* C-n keresztül e-vel. Ezen az egyenesen rajta van a V_∞ képe.
3. Mivel V_∞ rajta van az e-n, ezért annak képe az e' egyenesre illeszkedik. Ezért a keresett pont az e' és a $\overleftrightarrow{CV_\infty}$ egyenesek metszéspontja: V'.
4. Szükségünk van még egy végtelen távoli pont képére. Ehhez kiválaszthatnánk egy másik tetszőleges egyenest, és az előző lépéseket végrehajtva megkapnánk a végtelen távoli egyenes képét. A következő észrevételt felhasználva azonban ez a lépés kihagyható.
   Vizsgáljuk meg, hogy mi történik a tengely F_∞ végtelen távoli pontjával. Mivel a tengely minden pontja fix, így a végtelen távoli pontja is fixen marad: $F_\infty = F'_\infty$.
5. A végtelen távoli egyenes képe a V' és az F'_∞ pontokat összekötő egyenes: $\overleftrightarrow{V'F'_\infty} = v'$.

Azt kaptuk, hogy a végtelen távoli egyenes képe (v') párhuzamos a $t = t'$ tengellyel. (Ez természetes módon következik abból, hogy a t tengely végtelen távoli pontjával kötöttük össze a V' pontot, azaz t-vel húztunk párhuzamost a V'-n keresztül.)

Most szerkesszük meg azt a w egyenest, amelynek képe a v végtelen távoli egyenes, azaz $w' = v_\infty$.
Keressünk két olyan pontot, amelynek a képe végtelen távoli; ezen két pont egyenese lesz a keresett w egyenes.

1. "A C centrumból az e egyenes minden pontja az e'-re vetíthető úgy, hogy az a pont véges helyzetű legyen – egy pont kivételével. Ha a C-ből húzott „vetítőegyenes" párhuzamos az e'-vel, akkor az az egyenes csak a „végtelen távolban" metszeni az e'-t.
2. Az előző gondolatot felhasználva, húzzunk párhuzamost C-n keresztül e'-vel. Ez az egyenes az e-ből a W pontot metszi ki.
3. Az 1. pontban tett észrevétel miatt, a W képe végtelen távoli: W'_∞, amely egyúttal az e' egyenes végtelen távoli pontja. – Ezzel már találtunk egy olyan pontot, amelynek a képe végtelen távoli.
4. Az első három lépést megismételhetnénk egy másik tetszőleges egyenessel, hogy egy újabb, a kívánalmaknak eleget tevő pontot kapjunk. Érdemes azonban ismét felhasználni a pontonként fix tengely végtelen távoli pontját.
5. Az F_∞ pont teljesíti azt a feltételt, hogy a képe végtelen távoli legyen: $F_\infty = F'_\infty$ – Ezzel az egyszerű észrevétellel megkaptunk a keresett w egyenes egy újabb pontját.
6. Az az egyenes, amelynek a képe a végtelen távoli egyenes: $\overleftrightarrow{WF_\infty} = w$.

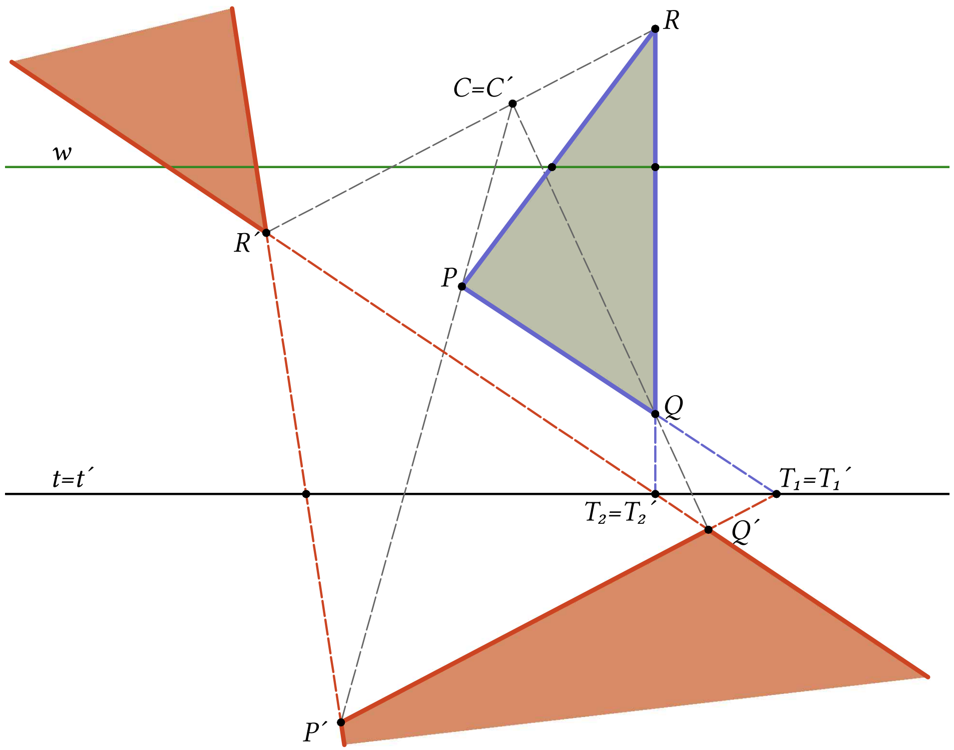
Mivel w tartalmazza az F_∞ pontot, szintén párhuzamos a $t = t'$ tengellyel.

Megjegyzés: Könnyen igazolható, hogy az egyik ellentengely centrumtól való távolsága egyenlő a másik ellentengely tengelytől való távolságával.

Láthattuk, hogy a centrális kollineáció segítségével végtelen távoli pontokat véges helyzetbe lehet hozni, és fordítva. Ez a tulajdonság már egy háromszög képénél is nagyon érdekes megoldást eredményez.
Szerkesszük meg egy *speciálisan elhelyezkedő* háromszög képét!

Speciális helyzetű háromszög centrálkollineációs képe

Adott egy centrális kollineáció tengelyével, centrumával és a (P, P') pontpárral. Szerkesztendő a 2.12. ábrán látható $PQR\triangle$ háromszög centrálkollineációs képe.



2.12. ábra. Speciális helyzetű háromszög centrálkollineációs képe

A szerkesztés lépései

A feladat megértését megkönnyíti, ha megszerkesztjük azt az ellentengelyt, amelynek a képe a sík végtelen távoli egyenese. (Ezt már korábban megszerkesztettük: w.) Az R pont elhelyezkedése miatt a $PQR\triangle$ metszi a w ellentengelyt két pontban.

1. A fejezet első példája egy tetszőleges pont képének megszerkesztését mutatja be. A $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes és annak $T_1 = T_1'$ fixpontja segítségével megszerkesztjük a Q pont Q' képét.
2. Hasonlóan, –például – a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenessel és $T_2 = T_2'$ fixpontjával kapható meg az R pont R' képe.
3. A $PQR\triangle$ minden csúcspontjának ismert a képe: P', Q' és R'.
4. *Fontos!* Most a feladatot befejezhetnénk azzal, hogy a kapott három képet összekötjük, de nem az lenne a helyes megoldás. A $PQR\triangle$ ugyanis metszi a w ellentengelyt, így a háromszögnek két olyan pontja is lesz, amelynek képe végtelen távoli pont.
   Ezért a helyes megoldás a P'-ből induló félegyenes, a $\overline{P'Q'}$ szakasz, a Q'-ből induló félegyenes, továbbá az R'-ből induló két félegyenes. Röviden: a háromszög képe „szétnyílik”, így a végeredmény nem egy zárt háromszög, hanem két darab nyílt alakzat.

Ez igen szép példa arra, hogy egy szakasznak (például a $\overline{QR}$-nek) a képe két félegyenes is lehet.
Az észrevételünket könnyen ellenőrizhetjük: a $\overline{QR}$ szakasz képe *nem* lehet a $\overline{Q'R'}$ szakasz, ugyanis a $\overline{Q'R'}$ tartalmazza a T_2' pontot, míg az eredeti $\overline{QR}$-ben nincs benne a T_2 pont.

Megjegyzés: Egy centrális kollineációt megadhatunk oly módon is, hogy megadjuk a tengelyét, a centrumát és az egyik ellentengelyét.

A definícióból és az eddigiekből következik, hogy centrális kollineáció nem párhuzamosságtartó. Tekintsünk – a szerkesztés leírásának mellőzésével – egy egyszerű példát, amely ezt jól szemlélteti.
Javasoljuk, hogy a Kedves Olvasó próbálja meg a feladatot önállóan megoldani.

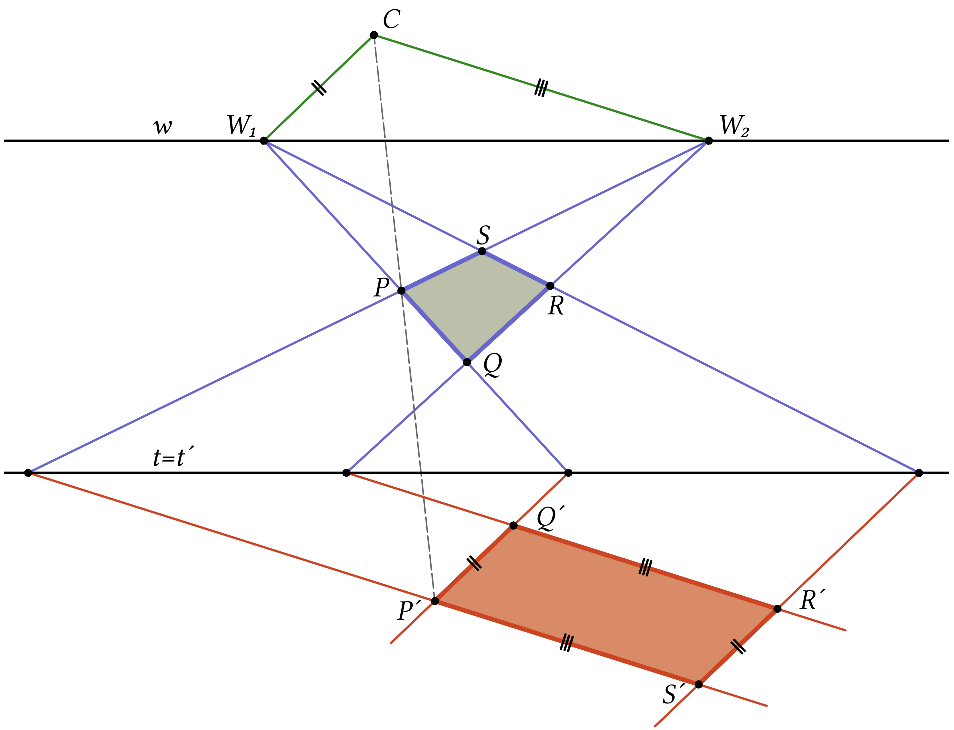
Paralelogramma képpel bíró négyszög centrális kollineációban

Adott egy centrális kollineáció tengelyével, centrumával és azzal az ellentengelyével, amelynek a képe a sík végtelen távoli egyenese. Adjunk meg egy olyan négyszöget, amelynek képe a centrális kollineációban paralelogramma!

A szerkesztés lépései – útmutató

Ha két egyenes az adott ellentengelyen metszi egymást, akkor képeik párhuzamosak – a $PQRS$ négyszöget tehát úgy kell felvenni, hogy *a szemközti oldalai a w ellentengelyen metsszék egymást.* (Lásd a 2.13. ábrát.)
A feladat csak a párhuzamos egyenesek megszerkesztésével is megoldható, akár a centrum közvetlen használata nélkül.

Megjegyzés: A centrális kollineáció ilyen módú használata a 10.4.2. fejezetben fordul majd elő.



2.13. ábra. Négyszög, melynek képe paralelogramma centrális kollineációban

3. fejezet

A Monge-projekció alapjai

A tankönyvben bemutatott első leképezési eljárás **Gaspard Monge** (1746-1818) nevéhez fűződik. Az épületek alaprajzának, függőleges nézeteinek használata régi gyakorlat az építészetben. A Monge által leírt módszer ilyen vetületek összekapcsolásával alkot olyan rendszert, amelyben a háromdimenziós objektumok kétdimenziós vetületei révén az eredeti objektum méreteit, helyzetét stb. egyértelműen meg lehet állapítani – és így módot ad *térbeli szerkesztések síkbeli elvégzésére*.

A Monge által leírt ábrázolási eljárás nem egy, hanem két különböző képsíkra vetíti a tér pontjait. Erre azért van szükségünk, hogy az egyes pontok egyértelműen rekonstruálhatóak legyenek: egy pont képei egyértelműen meghatározzák, hogy az adott pont a térben hol helyezkedik el. (Lásd a 2.1. fejezetet.)

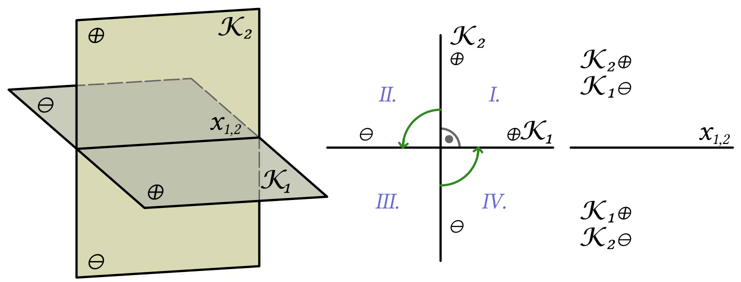
3.1. A Monge-projekció alapjai, pont ábrázolása

3.1.1. A rendszer felépítése

Monge-projekció és alapfogalmai

Tekintsünk két, egymásra merőleges síkot a térben (3.1. ábra). A két sík neve rendre $\mathcal{K}_1$ *első képsík* és $\mathcal{K}_2$ *második képsík*. A két képsík metszésvonala a *képsíktengely*, jelölése: $x_{1,2}$ (x_{12} vagy ${}_1x_2$); röviden $x_{1,2}$ tengely.

A tér pontjait mindkét képsíkra merőlegesen vetítjük, majd a két képsíkot – az összes ábrázolandó alakzat vetületeivel együtt – a képsíktengely körül egymásba hajtjuk, azaz az egyik képsíkot a másikba forgatjuk 90°-kal.
Az így létrehozott vetítési rendszert *Monge-projekció*nak (vagy Monge-féle kétképsíkos ábrázolásnak) nevezzük.



3.1. ábra. A Monge-féle ábrázolási rendszer: térbeli nézet, oldalnézet és az összehajtás

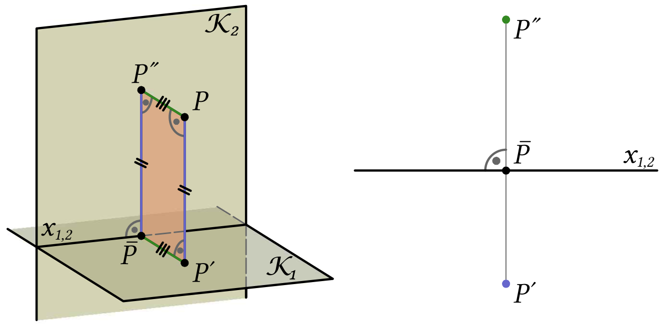
Fontos megjegyzés: Az eddigiek alapján nyilvánvaló, hogy **a Monge-projekció párhuzamos vetítés**, ezért egyenes-, párhuzamosság- és aránytartó.

Ha a 3.1. ábrán látható módon a képsíkokat pozitív és negatív félsíkra osztjuk, akkor „összehajtás” után $\mathcal{K}_2$ pozitív fele $\mathcal{K}_1$ negatív felével, $\mathcal{K}_2$ negatív fele $\mathcal{K}_1$ pozitív felével kerül fedésbe. A két képsík így egyetlen síkban, a rajz síkjában (papír, füzet vagy tábla síkja) ábrázolható.

A két képsík a teret négy térnegyedre osztja. A térnegyedeket óramutató járásával ellentétesen számozzuk, így kapjuk az $I.$, $II.III.$ és $IV.$ térnegyedeket. (Lásd a 3.1. ábra középső rajzát.)

Megjegyzések:

- Az objektumokat lehetőség szerint az $I.$ térnegyedben ábrázoljuk.
- Ha külön nem említjük, akkor a két képsíkot nem tekintjük átlátszónak.
- Az egyszerűség és célszerűség kedvéért a $\mathcal{K}_1$ képsíkot vízszintesnek, a $\mathcal{K}_2$-t pedig függőlegesnek tekintjük.



3.2. ábra. Pont ábrázolása Monge-projekcióban

3.1.2. Pont ábrázolása

Ha egy P pont képeit szeretnénk meghatározni, akkor – a vetítés szabályait követve – a pontot az első és a második képsíkra is merőlegesen vetítjük (3.2. ábra). Látható, hogy a P, P', P'' és $\overline{P}$ pontok egy téglalapot határoznak meg. A $\overleftrightarrow{P'\overline{P}}$ és $\overleftrightarrow{P''\overline{P}}$ egyenesek merőlegesek az $x_{1,2}$ tengelyre, így a rendszer egyesítése után a rajz síkjába eső $\overleftrightarrow{P'P''}$ egyenes *merőleges* az $x_{1,2}$ tengelyre.

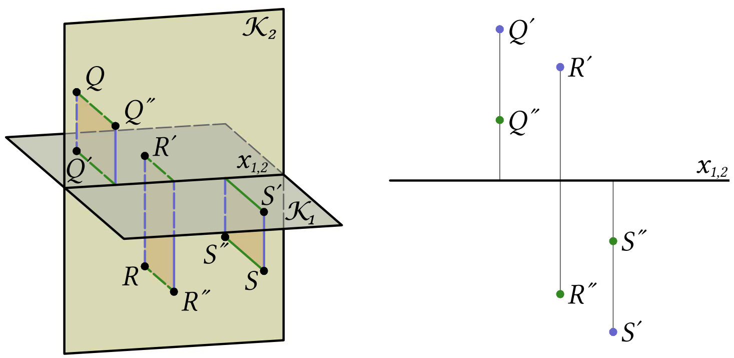
Monge-projekció további alapfogalmai

A P pont első képsíkra eső merőleges vetülete a pont P' *első képe* (röviden $I.$ kép), a második képsíkra eső merőleges vetület a P'' *második kép* (röviden $II.$ kép). A képsíkok egyesítése után keletkező $\overleftrightarrow{P'P''}$ egyenes a P ponthoz tartozó *rendező* (vagy rendezőegyenes). A $\overline{P'\overline{P}}$ szakaszt a P pont *első rendező*jének, a $\overline{P''\overline{P}}$ szakaszt a pont *második rendező*jének nevezzük.

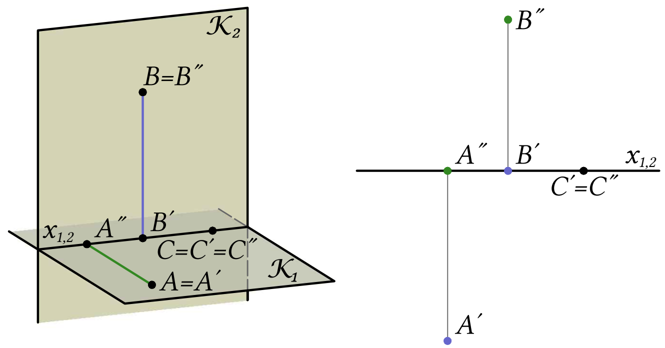
Megjegyzés: A pont első rendezője megmutatja a pont távolságát a $\mathcal{K}_2$ képsíktól, a második rendezője pedig a pont távolságát a $\mathcal{K}_1$ képsíktól.

A definícióbeli P pont az első térnegyedben van, de felmerülhet a kérdés: vajon a többi térnegyedbeli pontokat is tudjuk ábrázolni? Ha igen, akkor a képekből leolvasható, hogy az adott pont melyik térnegyedben helyezkedik el? A válasz mind a két kérdésre igenlő. A tér bármely pontját rá tudjuk vetíteni a két képsíkra – ez alapvető elvárás egy vetítési rendszertől. A pont két képének rendezőn való elhelyezkedése egyértelműen megmutatja, hogy az adott pont melyik térnegyedben van. Ennek megértéséhez segítség a 3.3. ábra.

Tudjuk, hogy a két képsík egyesítésekor a $\mathcal{K}_1$ negatív részével esik egybe a $\mathcal{K}_2$ pozitív része, és $\mathcal{K}_1$ pozitív részére a $\mathcal{K}_2$ negatív része fordul. A Q pont a $II.$ térnegyedben van, ezért a Q' a $\mathcal{K}_1$ képsík negatív, Q'' a $\mathcal{K}_2$ pozitív részére illeszkedik – ezért a rajz síkjában mindkét képe az $x_{1,2}$ tengely fölött helyezkedik el. Az R pont $III.$ térnegyedbeli, ezért az R' az $x_{1,2}$ fölött, R'' $x_{1,2}$ alatt van. Végül, az S pont a $IV.$ térnegyed egy pontja, így képei az $x_{1,2}$ alá kerülnek.



3.3. ábra. Különböző térnegyedben lévő pontok



3.4. ábra. Speciális helyzetű pontok

3.1.3. Speciális helyzetű pontok

Az előző fejezetben általános helyzetű pontokat ábrázoltunk. Érdekes képeket kapunk, ha valamelyik képsíkban fekvő pontokat ábrázoljuk (3.4. ábra).

Az A pont benne van a $\mathcal{K}_1$ képsíkban ($A \in \mathcal{K}_1$), ezért az A'' második kép az $x_{1,2}$ tengelyen van (A' nem bír speciális tulajdonsággal). Ez azt jelenti, hogy az A pont második rendezőjének hossza 0, azaz e pont $\mathcal{K}_1$-től való távolsága 0. Épp ezt várjuk el egy pont képeitől: mutassanak rá egyértelműen, hogy az adott pont hol helyezedik el a térben. Hasonlóképp, a B pont $\mathcal{K}_2$ képsíkbeli pont, ezért itt a B' első kép az, amelyik $x_{1,2}$-re illeszkedik. A C éppen az $x_{1,2}$ egyenesre esik, azaz benne van mindkét képsíkban, ezért mindkét képe az $x_{1,2}$ tengelyen van.

Megjegyzés: Érdemes már most észrevenni, hogy ha egy megállapítást teszünk az első vagy a második képre, akkor ugyanolyan állítást megfogalmazhatunk a másik képre is. A képsíkbeli pontok esetében, a $\mathcal{K}_1$-beli pontok második, a $\mathcal{K}_2$-beli pontok első képe volt speciális helyzetű.

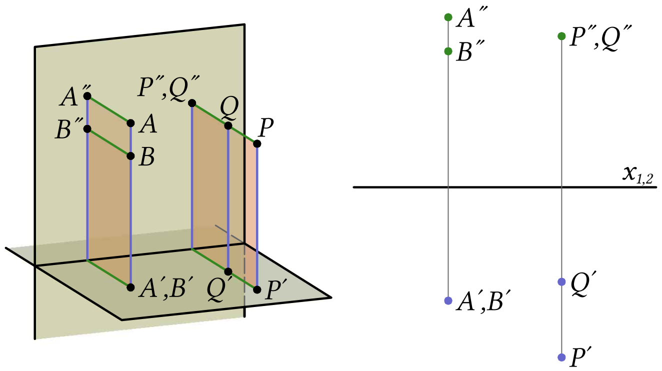
3.1.4. Fedőpontok, láthatóság

Az objektumok első képe tulajdonképpen egy *felülnézet*, míg a második kép *elölnézet*nek tekinthető – így természetesen felmerülhet a kérdés, hogy az adott irányokból mely részletek láthatók, és melyek vannak takarásban. Ezt **láthatóság**nak nevezzük, és lényege az egymást fedő pontok sorrendjének helyes megállapítása. *A későbbi fejezetekben a feladatok megoldását a láthatóság megállapításával zárjuk le.* (Részletesen lásd a 4.3. fejezetet.)

Fedőpontok (fedőpontpár)

A 3.5. ábrán látható A és B pontok *első fedőpontok*, mivel az első képeik egybeesnek. A P és Q pontok második képei azonosak, ezért P és Q *második fedőpontok*. Az ilyen a pontpárokat röviden fedőpontpároknak nevezzük.

Az A és B pontok esetében az A pont magasabban van, mint a B. Ezért az A pont látszik az első képen (felülnézetből). Ez, a térbeli ábrát figyelmen kívül hagyva, magáról a rajzról is leolvasható: az A pont második rendezője nagyobb, mint a B ponté, azaz az A pont távolabb van a $\mathcal{K}_1$ képsíktól.



3.5. ábra. Fedőpontok

A P és Q pontokat megvizsgálva, a P pont van messzebb a $\mathcal{K}_2$ képsíktól. Ezért a második képen (elölnézetből) a P pont látszik, a Q nem. A rajzról szintén a rendezők hosszának különbségét kell leolvasni. (Az A és B pont mindegyike látszik a második képen; a P és Q is egyaránt látható az első képen.)

3.1.5. Gyakorló feladatok

1. Ábrázolja Monge-projekcióban a következő pontokat:

   (a) $\mathcal{K}_1$ fölött 3 cm-rel, $\mathcal{K}_2$ előtt 5 cm-rel van (I. térnegyedbeli);

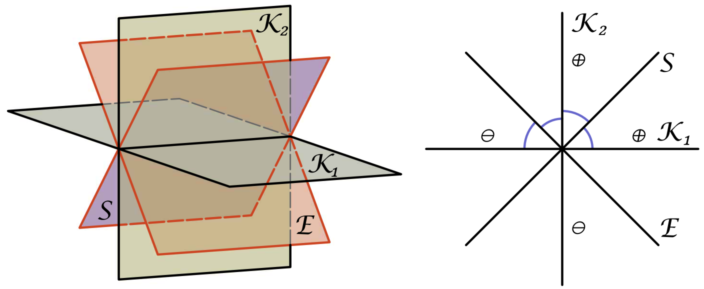
   (b) $\mathcal{K}_1$ fölött 2 cm-rel, $\mathcal{K}_2$ mögött 3 cm-rel van (II. térnegyedbeli);

   (c) $\mathcal{K}_1$ alatt 4 cm-rel, $\mathcal{K}_2$ mögött 1 cm-rel van (III. térnegyedbeli);

   (d) $\mathcal{K}_1$ alatt 5 cm-rel, $\mathcal{K}_2$ előtt 2 cm-rel van (IV. térnegyedbeli)!

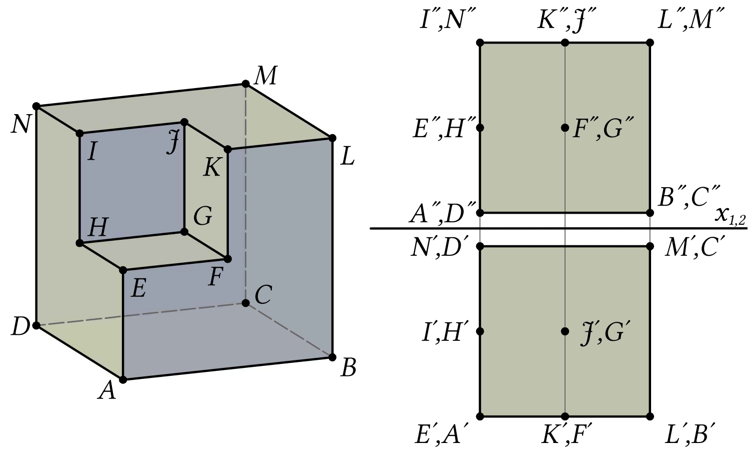
2. Ábrázoljon Monge-projekcióban mindegyik térnegyedben(!) olyan pontot, amely mindkét képsíktól egyenlő távolságra van! Mit tapasztal a pontok képeit ábrázolva?

   Megjegyzés: A fenti pontok két síkon helyezkednek el, az $\mathcal{S}$ sík neve szimmetriasík, az $\mathcal{E}$ sík neve egybeesési (vagy koincidencia-)sík (3.6. ábra).

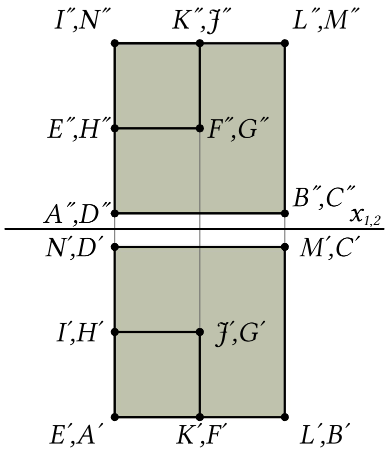


3.6. ábra. Szimmetria- és koincidenciasík

3. A 3.7. ábrán egy olyan csonkolt kockát lát, amelynek eltávolítottuk az egynyolcadát. Fedőpontok segítségével állapítsa meg, hogy mely pontok látszanak felül- és elölnézetből, majd rajzolja be a hiányzó látható szakaszokat! (Megoldás a 3.7. ábrán.)



3.7. ábra. Csonkolt kocka



3.8. ábra. Csonkolt kocka láthatósága

3.2. Egyenes ábrázolása

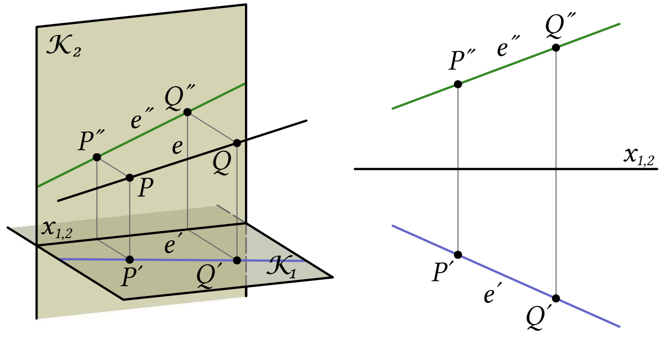
A Monge-projekció egyenestartó leképezés, ezért egy általános helyzetű egyenes képe (két) egyenes. Azonban tudjuk (lásd 2.1. fejezet), hogy ez a vetítés *nem* távolságtartó, ezért – néhány speciális esetet kivéve – egy egyenesen lévő szakasz hosszát nem tudjuk leolvasni a képekből. (A későbbiekben megismerünk néhány módszert egy szakasz hosszának meghatározására: 5.2.1. fejezet és 8.2.1. fejezet)

3.2.1. Egyenes képei

Egy egyenest két pontja egyértelműen meghatározza – és mivel ugyanez képeire is teljesül, az egyenes ábrázolható két pontja segítségével.

Egyenes ábrázolása két pontjával

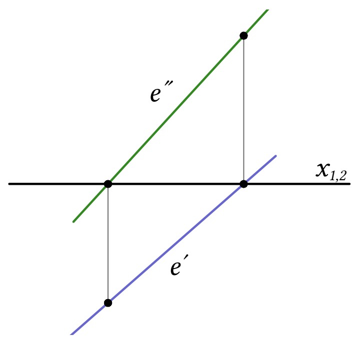
Adottak a P és Q pontok képeikkel. Ábrázoljuk az $e = \overleftrightarrow{PQ}$ egyenest!



3.9. ábra. Két pontjával adott egyenes képei Monge-projekcióban

Egyenes képei

A 3.9. ábrán az $e' = \overleftrightarrow{P'Q'}$ egyenest az e egyenes *első kép*ének vagy felülnézeti képének, a $e'' = \overleftrightarrow{P''Q''}$ egyenest az e *második kép*ének vagy elölnézeti képének nevezzük.



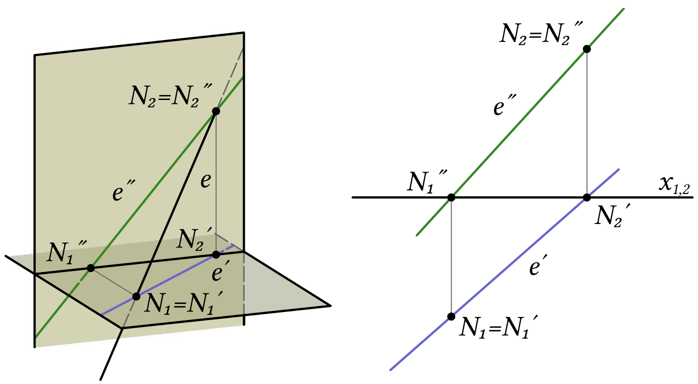
3.10. ábra. Egy egyenes képei Monge-projekcióban

Látható, hogy néhány igen speciális esettől eltekintve, melyeket a 3.2.2. fejezetben tárgyalunk, egy egyenest a két képével is meg tudjuk határozni. E két kép segítségével az egyenes rekonstruálható, azaz meg tudjuk állapítani, hogy pontosan hol helyezkedik el a térben. Ez kezdetben nehéz feladat, és erős térszemléletet igényel.

Vannak-e olyan pontok, amelyek segítségével könnyebben el tudjuk képzelni az egyenes térbeli helyzetét? A válasz igen, például egyszerűen ábrázolhatók az egyenes és a képsíkok metszéspontjai (3.10. ábra).

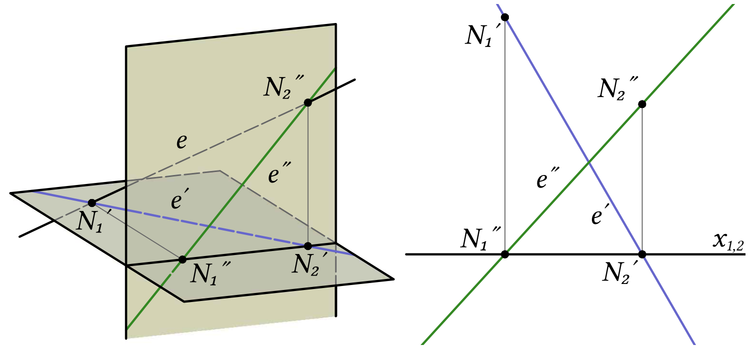
Egy egyenes nyompontjai

Azt a pontot, ahol egy e egyenes elmetszi a $\mathcal{K}_1$ képsíkot, az egyenes *első nyompontjá*nak nevezzük és N_1-gyel (néha ${}_eN_1$ jelöljük); míg a $\mathcal{K}_2$ képsíkkal alkotott metszéspontja az N_2 (esetleg ${}_eN_2$) *második nyompontja.*



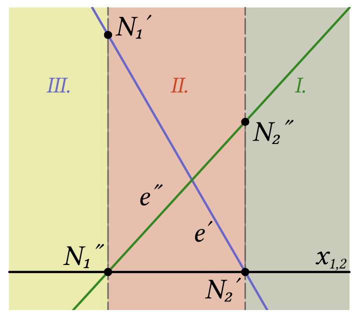
3.11. ábra. Egy egyenes nyompontjai

Fontos megjegyzés: A nyompontok a képsíkokon bárhol elhelyezkedhetnek, és nem is mindig léteznek (lásd 3.2.2. fejezet).



3.12. ábra. Tetszőleges egyenes és nyompontjai

Egy egyenes legfeljebb három térnegyeden halad keresztül, és a nyompontjainál „vált” térnegyedet. Vegyük észre, hogy az egyenes két képe már elárulja, hogy mely térnegyedek érintettek: a 3.12. ábrán látható egyenesnek például nincs pontja a IV. térnegyedben. Az e egyenes két képét tanulmányozva látható, az N_1 nyomponttól balra eső pontok első képei az $x_{1,2}$ felett, míg a második képeik az $x_{1,2}$ alatt helyezkednek el – ez a III. térnegyed pontjait jellemzi. Hasonló gondolatmenet alapján az $\overline{N_1N_2}$ szakasz a II. térnegyedben, az N_2-től induló félegyenes az I. térnegyedben van (3.13. ábra).

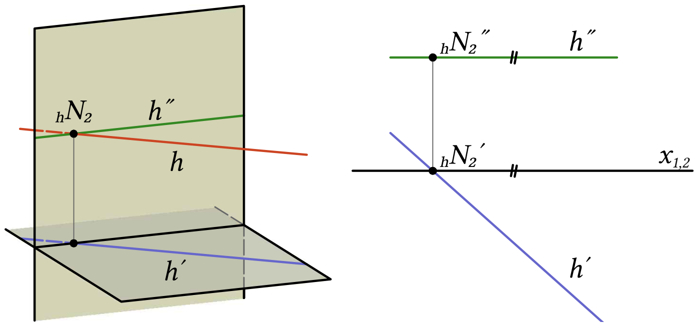


3.13. ábra. Tetszőleges egyenes pontjai a különböző térnegyedekben

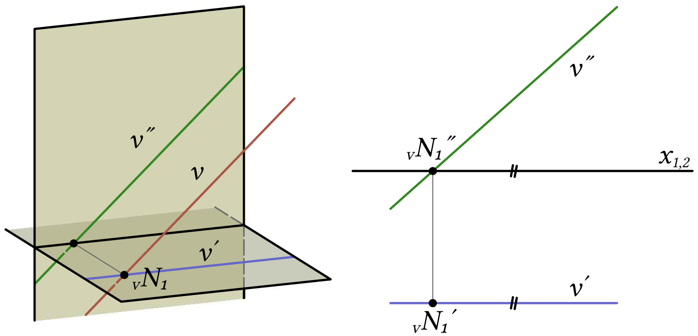
3.2.2. Speciális helyzetű egyenesek

Fővonalak

Ha egyenes párhuzamos valamelyik képsíkkal, akkor *fővonal*nak nevezzük. A $\mathcal{K}_1$-gyel párhuzamos egyenesek az első fővonalak (vagy I. fővonalak), a $\mathcal{K}_2$-vel párhuzamos egyenesek a második fővonalak (vagy II. fővonalak).



3.14. ábra. Első fővonal



3.15. ábra. Második fővonal

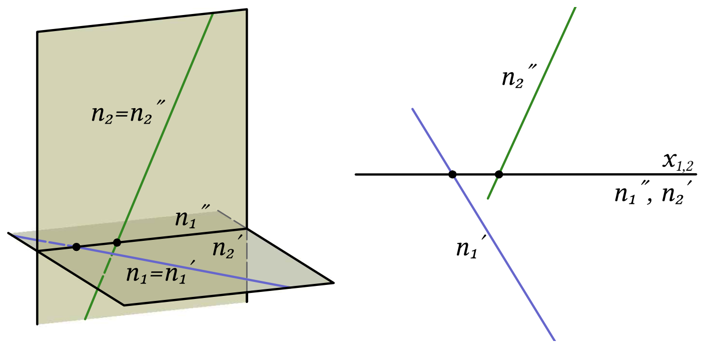
Fővonalak képi feltétele

Egy h egyenes akkor és csak akkor *első fővonal* (azaz $h \parallel \mathcal{K}_1$), ha $h'' \parallel x_{1,2}$ (h' tetszőleges, lásd 3.14. ábra). Egy v egyenes akkor és csak akkor *második fővonal* ($v \parallel \mathcal{K}_2$), ha $v' \parallel x_{1,2}$ (v'' tetszőleges, lásd 3.15. ábra).

Megjegyzések:

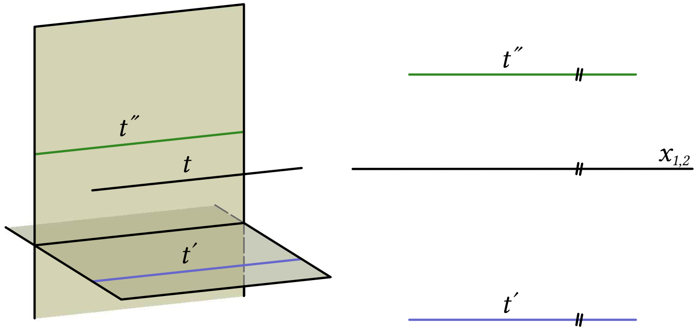
- A képsíkkal való a párhuzamosság miatt egy első fővonalnak nem létezik első nyompontja, egy második fővonalnak pedig második nyompontja.
- A fővonalak természetesen tetszőlegesen elnevezhetők – a h betű a horizontális (vízszintes), míg a v a vertikális (függőleges) szóra utal.
- Egy első fővonal első képe, illetve egy második fővonal második képe – az adott képsíkkal való párhuzamosság miatt – *valódi nagyság*ban mutatja az egyenesen lévő szakaszok hosszát.

A fővonalak speciális esetének tekinthetők az olyan egyenesek, melyek benne vannak valamely képsíkban. A 3.16. ábrán az n_1 egyenes a $\mathcal{K}_1$, az n_2 a $\mathcal{K}_2$ képsíkban van. Érdekesség, hogy ekkor a megfelelő képek nem csupán párhuzamosak $x_{1,2}$-vel, de egybe is esnek azzal.



3.16. ábra. Képsíkokban fekvő egyenesek

Speciális fővonalnak minősül egy $x_{1,2}$-vel párhuzamos egyenes is. Az ilyen egyenes mindkét képsíkkal párhuzamos, így egyaránt tekinthető első és második fővonalnak, ezért $t' \parallel x_{1,2}$ és $t'' \parallel x_{1,2}$ (3.17. ábra).



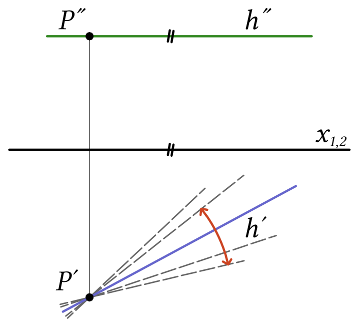
3.17. ábra. Képsíktengellyel párhuzamos egyenes

Adott pontot tartalmazó fővonal felvétele

Adott egy P pont két képével Monge-projekcióban. Vegyünk fel egy olyan h első fővonalat, amely áthalad a P ponton! (3.18. ábra)

A szerkesztés lépései

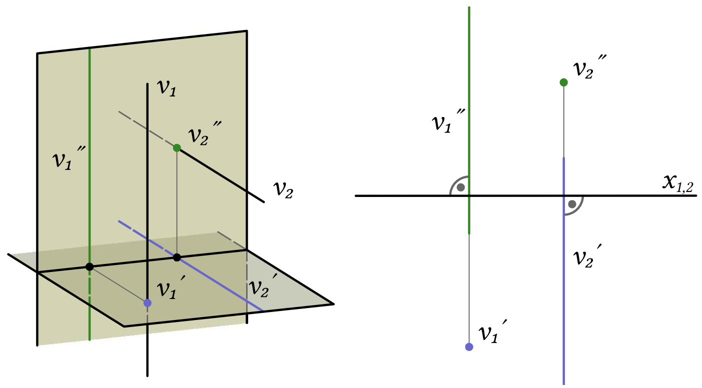
Vegyünk fel egy tetszőleges P pontot két képével. Az illeszkedéstartás miatt P' illeszkedik h'-re, és P'' a h''-n van. Egy első fővonal II. képe $x_{1,2}$-vel párhuzamos, ezért a h'' csak egyféleképpen rajzolható meg – a h' iránya tetszőleges.
A feladatnak végtelen sok megoldása van, hiszen egy ponton keresztül végtelen sok olyan egyenes húzható, amely egy adott síkkal (itt $\mathcal{K}_1$-gyel) párhuzamos.



3.18. ábra. Adott ponton áthaladó fővonal

Vetítőegyenesek

Ha egy egyenes merőleges valamelyik képsíkra, akkor *vetítőegyenes*nek (vagy vetítősugárnak) nevezzük. A $\mathcal{K}_1$-re merőleges egyenesek első vetítőegyenesek, a $\mathcal{K}_2$-re merőlegesek második vetítőegyenesek.



3.19. ábra. Vetítőegyenesek

Vetítőegyenesek képi feltétele

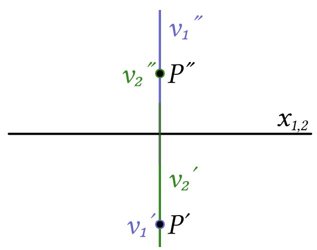
Egy v_1 egyenes akkor és csak akkor *első vetítőegyenes* ($v_1 \perp \mathcal{K}_1$), ha v_1' ponttá fajul, és $v_1'' \perp x_{1,2}$. Egy v_2 egyenes akkor és csak akkor *második vetítőegyenes* ($v_2 \perp \mathcal{K}_2$), ha v_2'' ponttá fajul, és $v_2' \perp x_{1,2}$. (3.19. ábra)

Megjegyzések:

- Egy első vetítőegyenesnek nem létezik második nyompontja, egy második vetítőegyenesnek pedig első nyompontja.
- A vetítőegyenesek speciális helyzetű fővonalak.
- Mivel egy pont két képét egy $x_{1,2}$-re merőleges rendező köti össze, ezért nyilvánvaló, hogy a ponttá fajult kép egy rendezőn van a másik képpel.
- Egy első vetítőegyenes II. képe, illetve egy második vetítőegyenes I. képe *valódi nagyság*ban mutatja az egyenesen lévő szakaszok hosszát.

Ponthoz tartozó vetítőegyenesek

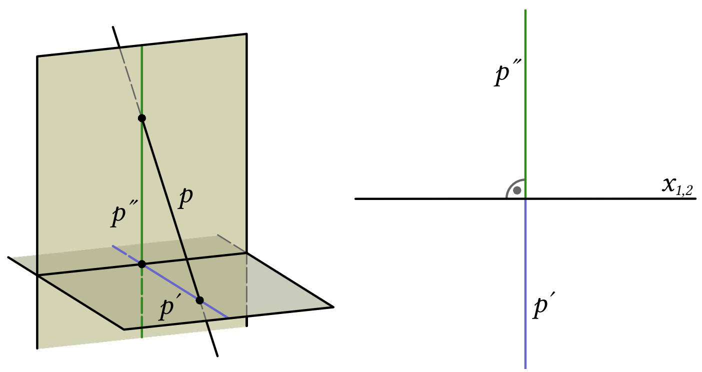
Adott egy P pont két képével. Szerkesszük meg a ponthoz tartozó I. és II. vetítőegyenest! (3.20. ábra)



3.20. ábra. Egy pont vetítőegyenesei

Profilegyenesek

Ha egy egyenes – a kitérő helyzeteket is beleértve – merőleges az $x_{1,2}$ képsíktengelyre, *profilegyenes*nek nevezzük.



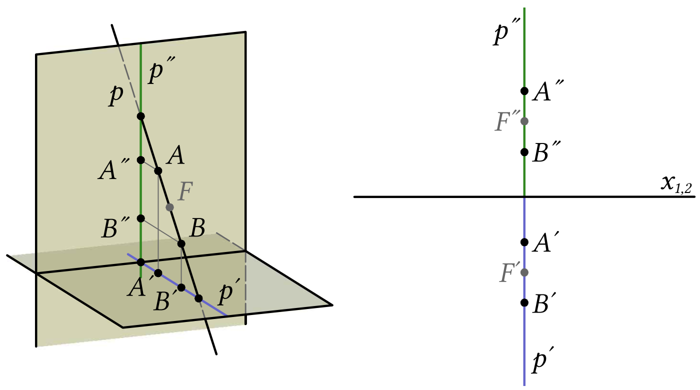
3.21. ábra. Egy profilegyenes két képe

Profilegyenesek képi feltétele

Egy p egyenes akkor és csak akkor merőleges az $x_{1,2}$ tengelyre, ha mindkét képe merőleges az $x_{1,2}$-re, így két képe egybeesik. (3.21. ábra)

Megjegyzés: A vetítőegyenesek speciális helyzetű profilegyenesek.

Fontos megjegyzés: Az egybeeső képek miatt egy profilegyenest a két képéből nem tudunk a térben rekonstruálni, ezért *egy profilegyenest mindig két pontjával ábrázolunk*. Ez a két pont lehet a két nyompont, de bármely más pont is alkalmas. További pontokat úgy tudunk felvenni egy profilegyenesen, ha kihasználjuk, hogy a Monge-projekció *aránytartó*. A 3.22. ábrán például az $\overline{AB}$ szakasz felezőpontjának két képe az I. és a II. képen is felezőpont.



3.22. ábra. Profilegyenes rekonstruálható ábrázolása

3.2.3. Gyakorló feladatok

1. Adja meg az e egyenes két képét úgy, hogy az egyenesnek ne legyen pontja

   (a) az $I.$ térnegyedben;

   (b) a $II.$ térnegyedben;

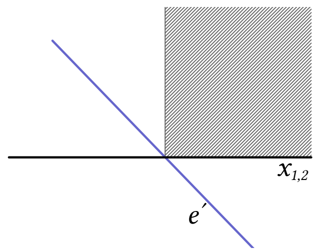
   (c) a $III.$ térnegyedben!

   A feladat első részéhez segítséget nyújthat a 3.23. ábra. (A satírozott síkrészbe nem kerülhet az egyenes második képe, ugyanis akkor az egyenesnek lenne olyan pontja, amely első térnegyedbeli.)

2. Adott egy A pont két képével. Vegyen fel az adott ponton keresztül egy $II.$ fővonalat! Hány megoldás van?

3. Ábrázoljon egy tetszőleges $I.$ fővonalat, amely 4 cm-rel a $\mathcal{K}_1$ képsík felett van!

4. Ábrázoljon egy tetszőleges $II.$ fővonalat, amely 3 cm-rel a $\mathcal{K}_2$ képsík előtt van és a $\mathcal{K}_1$ képsíkkal 45°-os szöget zár be!



3.23. ábra. Segítség az 1(a) feladathoz

5. Vegyen fel egy tetszőleges első fővonalat, majd azon egy 4 cm hosszúságú szakaszt! Az egyenes melyik képén látja a szakaszt valódi nagyságban és miért?

6. Adjon meg egy olyan első vetítőegyenest, amelynek távolsága a második képsíktól 5 cm, és az $I.$ és $IV.$ térnegyedeken halad át!

7. Vegyen fel egy tetszőleges második vetítőegyenest, majd ábrázolja a második nyompontjának mindkét képét!

8. Adott egy profilegyenes két pontjával. Szerkessze meg a két pont által meghatározott szakasz egyik harmadolópontját!

9. Ábrázoljon két pontjával egy olyan profilegyenest, amely egyúttal a szimmetriasíkra is illeszkedik! (A szimmetriasík fogalmát lásd a 3.1.5. fejezetben.)

3.3. Sík ábrázolása

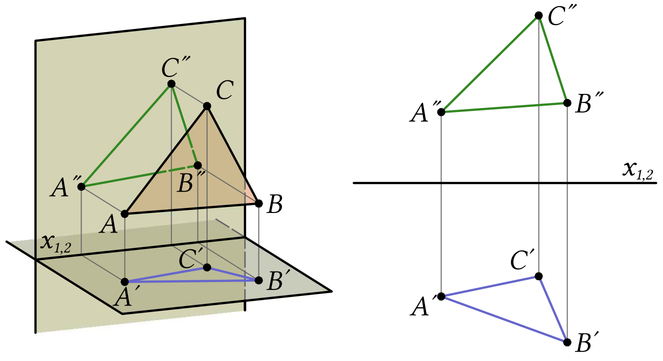
Egy sík minden pontját ábrázolni gyakorlatilag lehetetlen, hiszen egy síknak végtelen sok pontja van, ezért pontjainak képei befednék mindkét képsíkot. Emiatt egyszerűbb ábrázolási módszerekhez kell folyamodnunk.

3.3.1. Sík meghatározása Monge-projekcióban

Ismert, hogy egy síkot többféleképpen meg lehet határozni: három különböző ponttal, egy metsző egyenespárral, egy párhuzamos egyenespárral, vagy egy ponttal és egy arra nem illeszkedő egyenessel. Ezeket az egyértelmű megadási módokat használjuk Monge-projekcióban is.

Egy sík meghatározása három pontjával Monge-projekcióban

Ábrázoljuk az A, B és C pontokkal meghatározott síkot! (3.24. ábra)

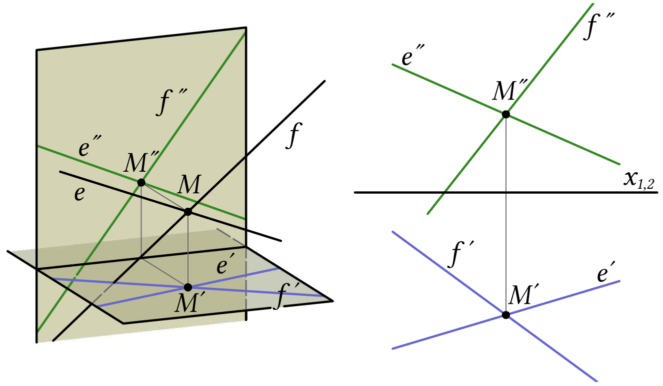


3.24. ábra. Sík megadása három ponttal Monge-projekcióban

A három pont (A, B, C) egy háromszöget alkot, és egy háromszög mindkét képe nyilvánvalóan egy-egy háromszög.

Egy sík meghatározása metsző egyenespárral Monge-projekcióban

Ábrázoljuk az e és f metsző egyenesekkel meghatározott síkot! (3.25. ábra)



3.25. ábra. Sík megadása metsző egyenespárral Monge-projekcióban

Fontos megjegyzés: A két metsző egyenes metszéspontja a térben az M pont. Az illeszkedéstartás miatt az első képek metszéspontja M', a második képek metszéspontja M''. Azaz a metszéspont képei éppen a képek metszéspontjai.

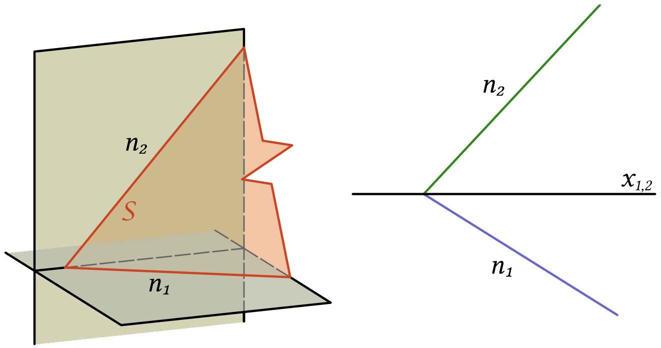
Van egy olyan metsző egyenespár a síkon, amely speciális a Monge-féle ábrázolási rendszerben, és szemléletes képet ad a sík helyzetéről.

Sík nyomvonalai

Egy $\mathcal{S}$ sík $\mathcal{K}_1$ képsíkkal alkotott metszésvonalát a sík *első nyomvonalá*nak (vagy $I.$ nyomvonalának), a $\mathcal{K}_2$-vel való metszésvonalát a sík *második nyomvonalá*nak (vagy $II.$ nyomvonalának) nevezzük. (3.26. ábra)
Jelölésük: n_1 és n_2 (vagy: ${}_{\mathcal{S}}n_1$ és ${}_{\mathcal{S}}n_2$)

Megjegyzések:

- Látható, hogy a két képsíknak és az adott síknak egy közös pontja van – ezért az n_1 és n_2 nyomvonalak az $x_{1,2}$ tengelyen találkoznak.



3.26. ábra. Sík nyomvonalai

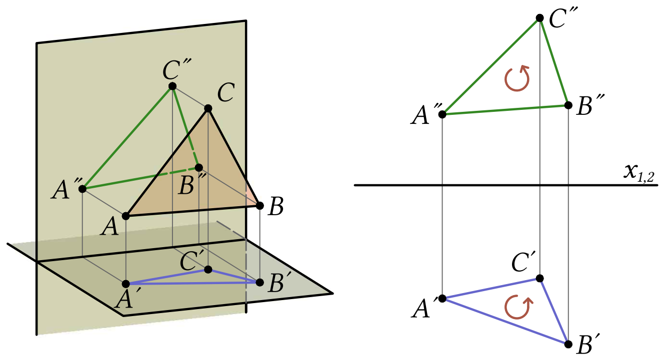
- A nyomvonalak tartalmazzák a sík összes egyenesének nyompontjait. (Lásd a 4.1. fejezetet.)
- A nyomvonalak speciális helyzetű fővonalak a síkban. (Lásd a 3.2.2. fejezetet.)

Egy sík a két képsíkhoz képest sokféleképpen állhat a térben. Előfordul, hogy felülnézetből (azaz az első képen) és elölnézetből (azaz a második képen) a sík eltérő oldalát látjuk, és ezekre a síkállásokra külön elnevezéseket használunk.

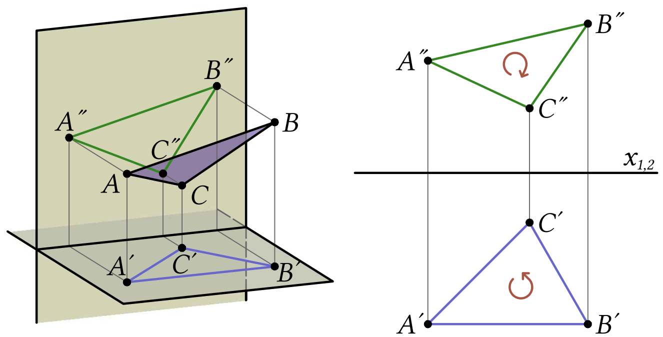
Dőlt és feszített síkok

Ha egy (nem „átlátszónak” tekintett) sík ugyanazon oldalát látjuk az első és a második képen, akkor a síkot *dőlt sík*nak, ha ellentétes oldalát látjuk, akkor *feszített sík*nak nevezzük. (3.27. ábra és 3.28. ábra)

Észrevehetjük, hogy egy dőlt síkú háromszög esetében a két kép körüljárási iránya azonos, míg egy feszített síkú háromszög két képének körüljárási iránya ellentétes. Így egy háromszög két képéből már egyértelműen el tudjuk dönteni, hogy dőlt vagy feszített síkban helyezkedik el.

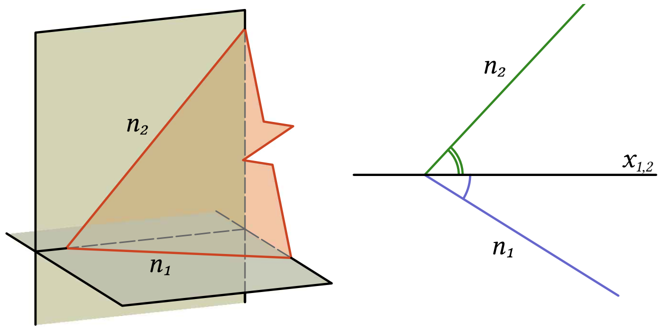


3.27. ábra. Dőlt sík

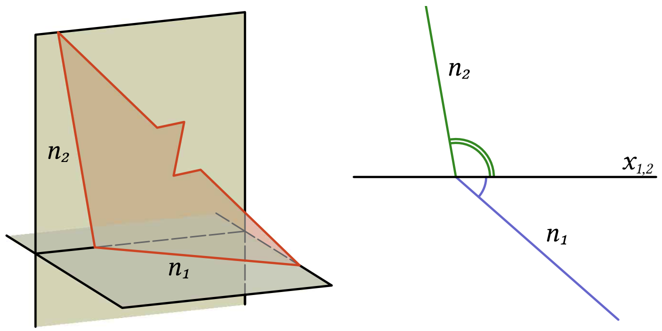


3.28. ábra. Feszített sík

Ha a sík nyomvonalaival adott, akkor a nyomvonalak $x_{1,2}$-vel bezárt szöge segít eldönteni, hogy a sík dőlt vagy feszített: dőlt sík esetén mindkét nyomvonal hegyesszöget zár be a képsíktengely egyik félegyenesével (3.29. ábra); feszített síknál az egyik szög hegyesszög, a másik szög tompaszög (3.30. ábra).



3.29. ábra. Nyomvonalakkal adott dőlt sík



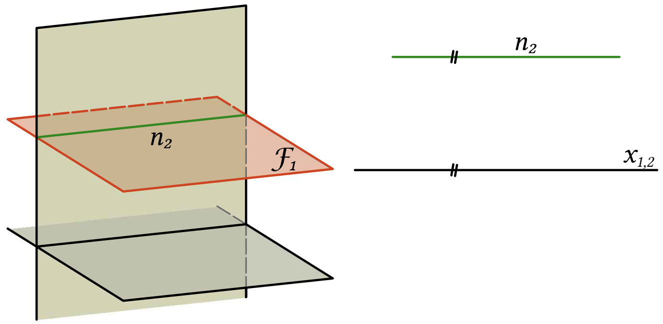
3.30. ábra. Nyomvonalakkal adott feszített sík

3.3.2. Speciális helyzetű síkok

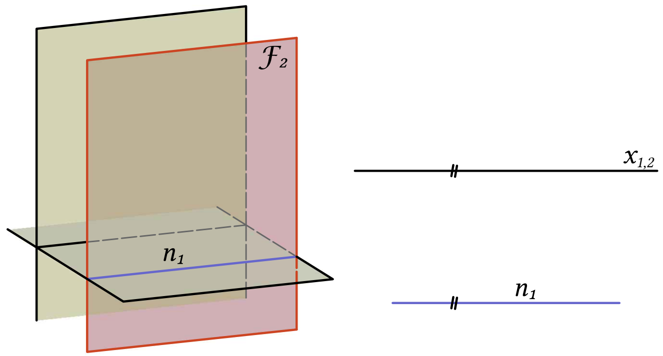
A $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ képsíkokhoz vagy az $x_{1,2}$ képsíktengelyhez képest speciális helyzetű síkokat úgy a legegyszerűbb tárgyalni, ha a síkokat nyomvonalaikkal adjuk meg. (A gyakorló feladatok között megtalálható a többi megadási mód is.)

Fősíkok

Egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkkal párhuzamos síkot *első fősík*nak, a $\mathcal{K}_2$-vel párhuzamos síkokat *második fősík*nak nevezünk.



3.31. ábra. Első fősík



3.32. ábra. Második fősík

Fősíkok képi feltétele

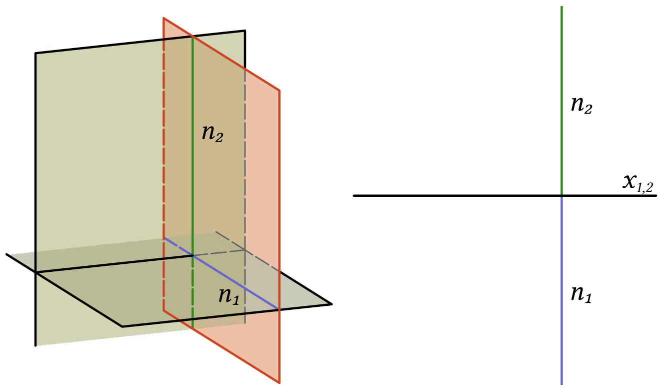
Egy sík akkor és csak akkor *első fősík*, ha első nyomvonala eltűnik, második nyomvonala pedig $x_{1,2}$-vel párhuzamos, azaz $n_2 \parallel x_{1,2}$. (3.31. ábra)
Egy sík akkor és csak akkor *második fősík*, ha második nyomvonala eltűnik, első nyomvonala pedig $x_{1,2}$-vel párhuzamos, azaz $n_1 \parallel x_{1,2}$. (3.32. ábra)

Fontos megjegyzés: A 3.31. ábráról és a 3.32. ábráról leolvasható, hogy egy első fősík első képén a síkot *valódi nagyságban* látjuk, egy második fősík esetén pedig a második képen látjuk *valódi nagyságban* a sík minden elemét. Első fősíknál a második, a második fősíknál pedig az első kép egy egyenessé fajul.

Ez azt jelenti, hogy már a jelenlegi tudásunkkal is képesek vagyunk például egy első vagy második fősíkban fekvő négyzetet rajzolni. A négyzet egyik képe valódi nagyságú, a másik képe pedig egyetlen (összesen 4 pontot tartalmazó) szakasz. (Lásd a 3.3.3. fejezetet.)

Profilsíkok

Egy síkot *profilsík*nak nevezünk, ha merőleges az $x_{1,2}$ képsíktengelyre.



3.33. ábra. $x_{1,2}$-re merőleges sík, avagy egy profilsík

Profilsíkok képi feltétele

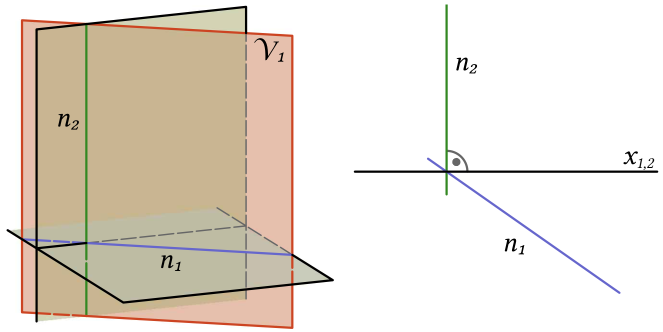
Egy sík akkor és csak akkor profilsík, ha nyomvonalaira teljesül, hogy $n_1 \perp x_{1,2}$ és $n_2 \perp x_{1,2}$. (3.33. ábra)

Megjegyzések:

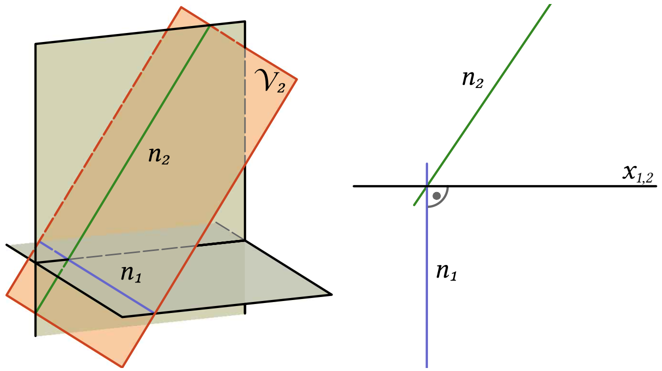
- Látható, hogy ha egy profilsíkra szeretnénk rajzolni, akkor az objektum mindkét képe egy-egy, az $n_1 = n_2$ nyomvonalakra eső szakasszá/egyenessé válna – ami nyilván kevéssé praktikus.
- A profilsíkok később kapnak kiemelt szerepet, amikor bevezetünk egy újabb, ún. harmadik képsíkot, ami az *oldalnézeti kép*et ábrázolja. A profilsíkok ekkor harmadik fősíkok lesznek. (Lásd az 5.1.2. fejezetet.)

Vetítősíkok

A $\mathcal{K}_1$ képsíkra merőleges síkokat *első vetítősíkok*nak, a $\mathcal{K}_2$ képsíkra merőleges síkokat *második vetítősíkok*nak nevezzük.



3.34. ábra. Első vetítősík



3.35. ábra. Második vetítősík

Vetítősíkok képi feltétele

Egy sík akkor és csak akkor *első vetítősík*, ha második nyomvonala merőleges $x_{1,2}$-re (azaz $n_2 \perp x_{1,2}$), első nyomvonala tetszőleges. (3.34. ábra)
Egy sík akkor és csak akkor *második vetítősík*, ha első nyomvonala merőleges $x_{1,2}$-re (azaz $n_1 \perp x_{1,2}$), második nyomvonala tetszőleges. (3.35. ábra)

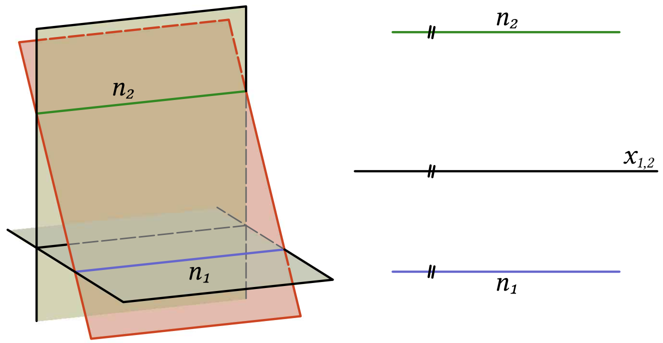
Megjegyzések:

- A vetítősík elnevezést az indokolja, hogy egy általános helyzetű egyenest egy első és egy második vetítősík segítségével *vetítünk* a képsíkokra. Ebből következik, hogy egy vetítősíkon lévő összes alakzat egyik képe egy egyenessé fajul (első vetítősík esetén az első, második vetítősíknál a második kép).
- A *fősík*ok speciális helyzetű vetítősíkok, míg egy *profilsík* egyszerre tekinthető első és második vetítősíknak.

Érdemes megvizsgálni azokat a síkokat, melyek az $x_{1,2}$-vel párhuzamosak.

Sík $x_{1,2}$-vel való párhuzamosságának képi feltétele

Egy sík (a fősíkok kivételével) akkor és csak akkor párhuzamos az $x_{1,2}$ tengellyel, ha első és második nyomvonala is párhuzamos azzal, azaz $n_1 \parallel x_{1,2}$ és $n_2 \parallel x_{1,2}$. (3.36. ábra)



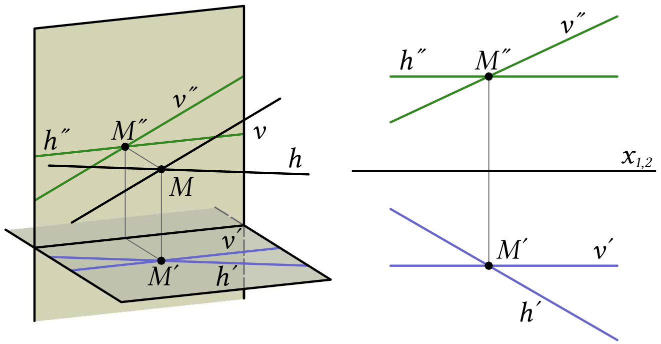
3.36. ábra. $x_{1,2}$-vel párhuzamos sík

3.3.3. Gyakorló feladatok

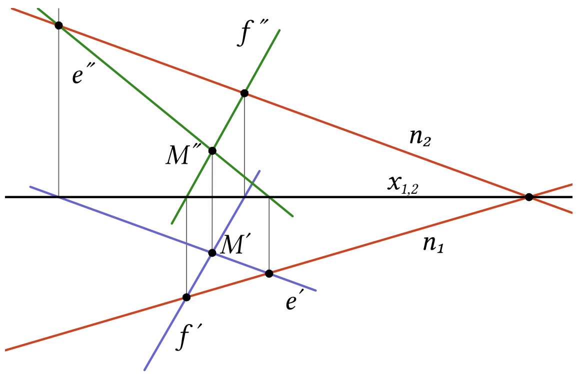
1. Vegyen fel egy $ABCD$ paralelogrammát két képével! A paralelogramma egyetlen síkra illeszkedik? Ha igen, miért? (Segítség: Párhuzamos egyenesek képei párhuzamosak.)

2. Adjon meg egy síkot egy h első fővonal és egy v második fővonal segítségével! Mire kell ügyelni a képek felvételekor? (Segítség: A két fővonal egy metsző egyenespár, lásd 3.37. ábra.)

3. Adott egy e és f metsző egyenespár, amelyek megadnak egy síkot. Szerkessze meg a sík mindkét nyomvonalát! (Segítség: A végeredmény a 3.38. ábrán látható, amelyen az egyenesek nyompontjai elnevezés nélkül szerepelnek.)



3.37. ábra. Fővonalakkal adott sík



3.38. ábra. Sík nyomvonalainak megszerkesztése

4. Vegyen fel egy e és f metsző egyenespárt úgy, hogy a síkjuk (a) dőlt (b) feszített legyen! (Segítség: A feladat megoldásához nincs szükség a nyomvonalakra – a két egyenes egy háromszög két oldalegyenesének is tekinthető.)

5. Vegyen fel egy első fősíkot e és f metsző egyenespárral!

6. Vegyen fel egy második fősíkot $ABC\triangle$ háromszöggel!

7. Vegyen fel egy első vetítősíkot $ABC\triangle$ háromszöggel!

8. Vegyen fel egy második vetítősíkot e és f metsző egyenespárral!

9. Adott egy tetszőleges e egyenes a térben, ismerjük mindkét képét. Szerkessze meg az egyeneshez tartozó első és második vetítősíkok nyomvonalait!

10. Adott egy első fősík. Szerkessze meg egy olyan, a síkban fekvő $ABCD$ négyzet képét, amelynek oldalai 3 cm hosszúságúak! Hány megoldás van? Az $A'B'C'D'$ első kép miért speciális? És az $A''B''C''D''$ második kép?

4. fejezet

Illeszkedési és metszési feladatok Monge-projekcióban

A Monge-projekció bevezető fejezetében az alapelemek ábrázolásával ismerkedtünk meg. Ahhoz, hogy a „térben” szerkeszthessünk, szükségünk van olyan alapszerkesztésekre, amiből építkezhetünk: hogyan tudunk egy síkra egy pontot ráilleszteni, hogyan kaphatjuk meg egy egyenes és egy sík közös pontját stb. A következőkben ezekkel az alapszerkesztésekkel ismerkedünk meg.

A térbeli ábrákat nem minden esetben mutatjuk be, hiszen az a cél, hogy a két képből is el tudjuk képzelni (rekonstruálni tudjuk) a térbeli viszonyokat. Javasoljuk a Kedves Olvasónak, hogy gyakorlásképp ezeket az ábrákat is készítse el.

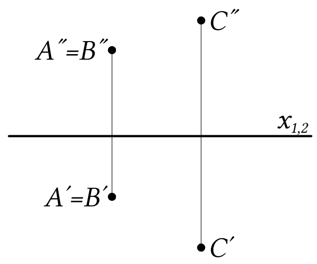
4.1. Illeszkedés és párhuzamosság Monge-projekcióban

A tárgyalás során az 1.1. fejezetben található sorrendtől eltérünk, a szerkesztéseket az egyszerűbbekkel kezdjük.

4.1.1. Egyszerűbb esetek

Pontok egybeesése

Vegyünk fel három (A, B és C) pontot úgy, hogy $A = B$ és $A \neq C$! (4.1. ábra)

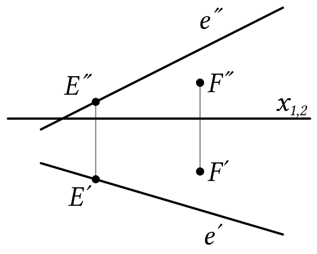


4.1. ábra. Pontok egybeesése

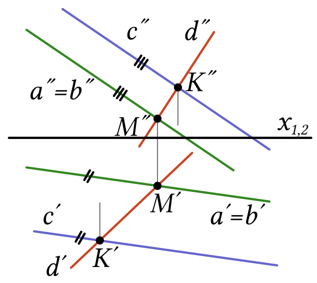
Látható, hogy két pont akkor és csakis akkor esik egybe, ha mindkét képük egybeesik.

Pont illesztése egyenesre

Adott egy e egyenes két képével. Ábrázoljunk egy olyan E pontot, amely illeszkedik e-re ($E \in e$), továbbá egy F pontot, amelyre $F \notin e$ teljesül! (4.2. ábra)



4.2. ábra. Pont illeszkedése egyenesre



4.3. ábra. Egyenesek kölcsönös helyzete

Nyilvánvaló, hogy az E pont akkor és csakis akkor illeszkedik az e egyenesre, ha megfelelő képeikre is teljesül az illeszkedés: $E' \in e'$ és $E'' \in e''$.

Az F pontra vonatkozó képi feltétel is evidens: $F' \notin e'$ vagy $F'' \notin e''$. (A „vagy" szócska igen fontos, hiszen ha például az F' rajta lenne e'-n, de az F'' nincs az e''-n, akkor az F nincs rajta az e egyenesen.)

Egyenesek kölcsönös helyzetének ábrázolása

Adjunk meg Monge-projekcióban négy egyenest (a, b, c és d) úgy, hogy

- $a = b$,
- $a \parallel c$,
- a és d egyenesek metszik egymást: $a \cap d = M$,
- c és d kitérő helyzetűek! (4.3. ábra)

A szerkesztés lépései

Érdemes a kitűzött sorrendben haladni.

1. Ha két egyenes egybeeső, akkor mindkét képüknek egybe kell esni: $a' = b'$ és $a'' = b''$. Ezért az $a = b$ egyenes tetszőlegesen felvehető.

2. A párhuzamosságtartás miatt két egyenes akkor és csak akkor párhuzamos, ha a megfelelő képeik párhuzamosak. A c egyenes megrajzolásakor csupán arra kell figyelni, hogy $a' \parallel c'$ és $a'' \parallel c''$. Ennek megfelelően vegyünk fel egy lehetséges c egyenest (azaz annak két képét).

3. Két egyenes akkor és csak akkor metsző, ha a megfelelő képeik metszéspontjai egy rendezőre illeszkednek – ezek megadják a térben található metszéspont két képét. (Lásd a 3.3.1. fejezet 2. példáját.)

   (a) A d egyenes egyik képét, például d'-t, tetszőlegesen felvehetjük.

   (b) A d' metszéspontja az a'-vel az M' pont.

   (c) Erre az M'-re rendezőt illesztünk.

   (d) Az M'-höz tartozó rendező elmetszi az a egyenes második képét, így kapjuk az M'' második képet.

   (e) A d'' második képnek át kell mennie az M''-n (hiszen így lesz metsző a és d), egyéb megkötés nincs.

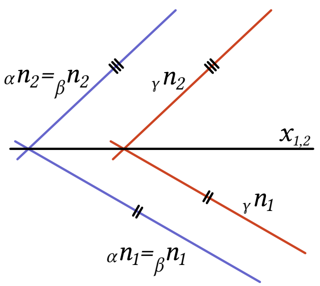
4. Végül egy, a c egyeneshez kitérő helyzetű egyenest kell felvennünk – de a feladat szerint ez a kitérő egyenes éppen az előbbi d egyenes. Ellenőrizzük tehát, hogy c és d kitérőek-e – ha nem, akkor d valamelyik képének irányán módosítani kell.

   Ez mindössze abból áll, hogy ellenőrizzük, hogy c és d egyenesek első képeinek metszéspontja (K') és második képeinek metszéspontja (K'') ugyanannak a pontnak a két képe-e. A 4.3. ábrán e két pont *nem* határoz meg a térben egy pontot, mivel nincs közös rendezőegyenesük – azaz c és d kitérő helyzetű.

A következő példa két sík párhuzamosságáról szól. Az egyszerűség kedvéért a síkokat nyomvonalakkal adjuk meg.

Két sík párhuzamossága

Adott egy α sík nyomvonalaival. Vegyünk fel egy β síkot, amely egybeesik α-val, valamint egy γ síkot úgy, hogy $\alpha \parallel \gamma$ teljesüljön! (4.4. ábra)



4.4. ábra. Párhuzamos síkok

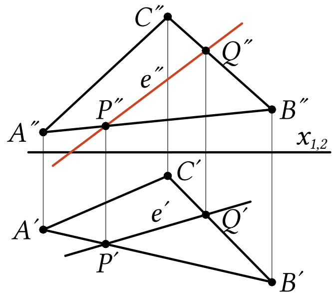
A feladat első része egyértelmű: ha felvettük tetszőlegesen az α sík nyomvonalait, akkor a β síknak ugyanez a két egyenes a nyomvonala, azaz $_{\alpha}n_1 =_{\beta} n_1$ és $_{\alpha}n_2 =_{\beta} n_2$.

Két sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha van a síkokra illeszkedő egy-egy olyan metsző egyenespár, amelyek megfelelő elemei páronként párhuzamosak. Az egyenespár ez esetben a két nyomvonal – mivel az α sík két nyomvonala már adott, a γ sík nyomvonalait úgy kell felvenni, hogy a megfelelő nyomvonalak párhuzamosak legyenek: $_{\alpha}n_1 \parallel {}_{\gamma}n_1$ és $_{\alpha}n_2 \parallel {}_{\gamma}n_2$.

4.1.2. Egyenes és sík – illeszkedés és párhuzamosság

Egyenes illesztése három ponttal adott síkra

Adott egy $ABC\triangle$ háromszög két képével, továbbá egy e egyenes első képe. Szerkesszük meg az e második képét úgy, hogy az egyenes illeszkedjen a háromszög síkjára (azaz $e \subset [A, B, C]$)! (4.5. ábra)



4.5. ábra. Háromszög síkjára illeszkedő egyenes

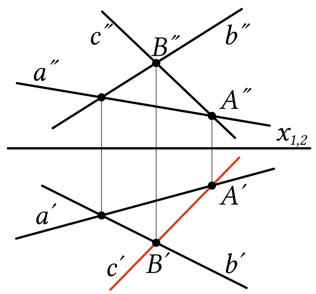
A szerkesztés lépései

A szerkesztés során a sík ismert szakaszait (egyeneseit) használjuk fel, hogy a hiányzó e'' képet megkapjuk.

1. Ha az egyenes benne van az $ABC\triangle$ háromszög síkjában, akkor az e-nek és az $ABC\triangle$-nek legfeljebb két közös pontja van. Az első képről leolvasható a két metszéspont első képe: P' és Q' ($e' = \overleftrightarrow{P'Q'}$).
2. A P pont illeszkedik az $\overline{AB}$ szakaszra, ezért P'' is illeszkedik $\overline{A''B''}$-re. Így a P'-ből húzott rendező kimetszi $\overline{A''B''}$-ből a P'' pontot.
3. Hasonlóan az előző ponthoz, az e és a $\overline{BC}$ metszéspontja Q, amelynek első képe e' és $\overline{B'C'}$ metszéspontja: Q'. A második képet a Q'-ből húzott rendező metszi ki $\overline{B''C''}$-ből: Q''.
4. Tudjuk azt, hogy a P és Q pontok az e egyenesen is rajta vannak. Emiatt a P'' és Q'' egyenese az e egyenes keresett második képe, azaz $e'' = \overleftrightarrow{P''Q''}$.

Egyenes illesztése metsző egyenespárral adott síkra

Adott egy sík Monge-projekcióban az a és b metsző egyenespárral, valamint egy c egyenes c'' második képe. Szerkesszük meg a c' első képet úgy, hogy a c egyenes illeszkedjen az adott síkra, azaz $c \subset [a, b]$! (4.6. ábra)



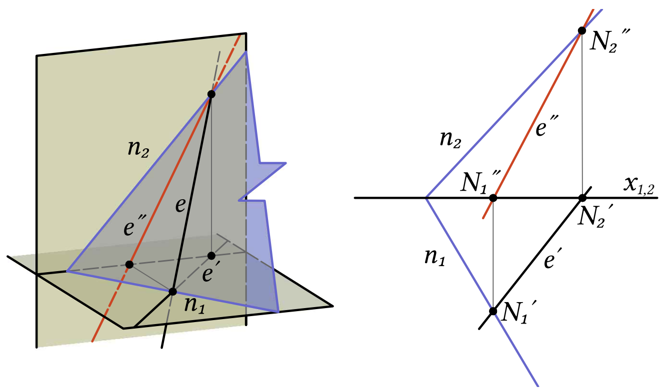
4.6. ábra. Metsző egyenespár síkjára illeszkedő egyenes

A szerkesztés lépései – útmutató

A szerkesztés gyakorlatilag megegyezik az előző példában látott ötlettel: itt a második képből kell kiindulni, a c egyenes az egyeneseket az A és B pontokban metszi. A szerkesztés menetének végiggondolása (esetleg leírása) az Olvasó feladata.

Egyenes illesztése nyomvonalakkal adott síkra

Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy e egyenes első képe Monge-projekcióban. Szerkesztendő az e második képe úgy, hogy az egyenes benne legyen a síkban ($e \subset [n_1, n_2]$). (4.7. ábra)



4.7. ábra. Nyomvonalakkal megadott síkra illeszkedő egyenes

A szerkesztés során felhasználjuk azt a könnyen igazolható észrevételt, hogy *egy síkbeli egyenes megfelelő nyompontja illeszkedik a megfelelő nyomvonalra.*

A szerkesztés lépései

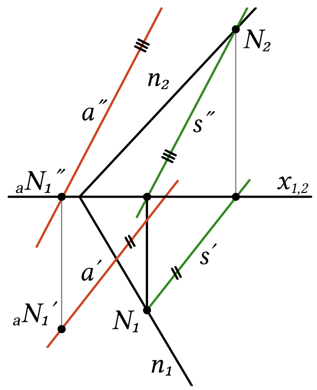
A szerkesztés nem különbözik lényegesen az előző két példában látottaktól: az egyenest már ismert síkbeli egyenesek segítségével illesztjük rá a síkra. Itt két egyenest ismerünk a síkból: az n_1 és n_2 nyomvonalakat.

1. Vegyük fel tetszőlegesen az $[n_1, n_2]$ síkot és az e' első képet.
2. Az egyenes első nyompontja illeszkedik az első nyomvonalra. Emiatt, ahol az e' elmetszi az n_1 nyomvonalat, ott van az egyenes első nyompontjának első képe: $e' \cap n_1 = N_1'$.
3. Az N_1 nyompont a $\mathcal{K}_1$ képsíkban van, ezért a második képe az $x_{1,2}$-re illeszkedik. Az N_1'-ből húzott rendező kimetszi $x_{1,2}$-ből az N_1''-t.
4. Az e' elmetszi az $x_{1,2}$-t is. Ez a pont az egyenes második nyompontjának első képe: N_2' (Az N_2 ugyanis $\mathcal{K}_2$-beli, ezért első képe az $x_{1,2}$-n van.)
5. Az N_2 nyompont második képe egyrészt az N_2'-ből húzott rendezőn van, másrészt illeszkedik az n_2 nyomvonalra is. A rendező és az n_2 metszéspontja a keresett N_2'' pont.
6. Az e egyenes második képe az $\overleftrightarrow{N_1''N_2''}$ egyenes (hiszen egy egyenest két pontja egyértelműen meghatározza).

Vizsgáljuk meg egy sík és egy egyenes párhuzamosságát. Középiskolai tanulmányokból ismert, hogy *egy egyenes akkor és csak akkor párhuzamos egy síkkal, ha párhuzamos a sík egy egyenesével.*

Sík és egyenes párhuzamossága

Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszünk egy tetszőleges egyenest, amely párhuzamos a síkkal (de nem illeszkedik a síkra)! (4.8. ábra)



4.8. ábra. Sík és egyenes párhuzamossága

A szerkesztés lépései

A gyors megoldáshoz az előző példa végeredményéből indulunk ki.

1. Vegyük fel az adott síkot, majd abban szerkesszünk egy tetszőleges s segédegyenest. (Lásd az előző feladatot.)
2. A segédegyeneshez válasszunk egy tetszőleges, azzal párhuzamos a egyenest.
   (a) Az a-nak valamelyik képe – például az a' – tetszőlegesen felvehető úgy, hogy a' és s' párhuzamos legyen.
   (b) Az a'' második kép szintén nagy szabadsággal megválasztható, de a párhuzamossági feltételt figyelni kell: $a'' \parallel s''$.
   (c) Ellenőrizzük, hogy az a' és a'' képekkel megadott egyenes nem illeszkedik-e a síkra! A válasz nemleges, mert (például) az a egyenes $_aN_1$ első nyompontja nem illeszkedik a sík n_1 nyomvonalára, így nem lehet benne a síkban.

4.1.3. A sík speciális egyenesei

Egy tetszőleges síkon vannak kitüntetett szerepű egyenesek. Kettővel, a két nyomvonallal, már megismerkedtünk. Látni fogjuk, hogy a nyomvonalak a sík speciális helyzetű fővonalai. (Vesd össze a 3.2.2. fejezettel.)

Bár a következő egyenesek különleges állásúak, de ugyanúgy a sík egyenesei, ezért a síkra illesztés technikája változatlan.

A sík fővonalai

Egy tetszőleges sík *első fővonalán* a síkra illeszkedő, a $\mathcal{K}_1$ képsíkkal párhuzamos egyenest értünk; a sík egy *második fővonala* a $\mathcal{K}_2$-vel párhuzamos, síkbeli egyenes.

A definícióból következik, hogy *a sík első fővonalai az első nyomvonallal, második fővonalai a második nyomvonallal párhuzamosak.*

A sík fővonalainak képi feltétele

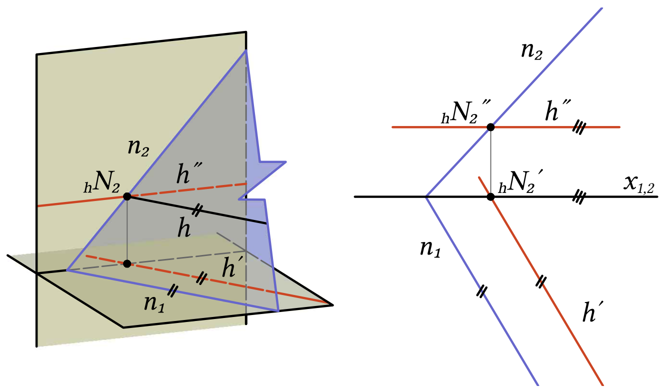
Egy sík egy h egyenese akkor és csak akkor *első fővonala*, ha $h' \parallel n_1$, $h'' \parallel x_{1,2}$ és ${}_hN_2'' \in n_2$ (${}_hN_2 \in n_2$). Egy sík egy v egyenese akkor és csak akkor *második fővonala*, ha $v'' \parallel n_2$, $v' \parallel x_{1,2}$ és ${}_vN_1' \in n_1$ (${}_vN_1 \in n_1$).

Egy sík egy első fővonala

Adott egy sík nyomvonalaival. Adjuk meg ennek a síknak egy tetszőleges h első fővonalát! (4.9. ábra)

A szerkesztés lépései

1. Vegyük fel a tetszőleges síkot, továbbá a keresett h fővonal egyik képét. Legyen ez a h', így azt n_1-gyel párhuzamosan rajzoljuk meg. (Ha h''-ből indulunk, akkor a $h'' \parallel x_{1,2}$ feltételt kell teljesíteni.)

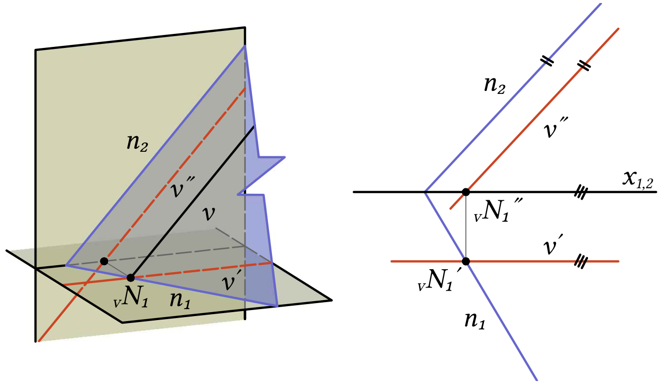


4.9. ábra. Sík egy első fővonala

2. A h egy síkbeli egyenes, ezért a ${}_hN_2$ második nyompontja illeszkedik n_2-re; határozzuk meg ezt a pontot.
   (a) Ahol a h' metszi az $x_{1,2}$-t, ott van az egyenes második nyompontjának első képe: ${}_hN_2'$.
   (b) A nyompont első képéből rendezőt húzunk.
   (c) A rendező metszi az n_2 nyomvonalat, ez a ${}_hN_2$ II. képe: ${}_hN_2''$.
3. A kapott ${}_hN_2''$-ből $x_{1,2}$-vel párhuzamost húzva a h második képét kapjuk: h''.

Egy sík egy második fővonala

Adott egy sík nyomvonalaival. Adjuk meg ennek a síknak egy tetszőleges v második fővonalát! (4.10. ábra)



4.10. ábra. Sík egy második fővonala

A szerkesztés lépései – útmutató

A második fővonalak szerkesztésénél az előbb megismert lépéseket alkalmazzuk, csupán a megfelelő képek „szerepet cserélnek”. A szerkesztés menetének leírását és végiggondolását az Olvasóra bízzuk.

A sík esésvonalai

Ha egy síkbeli egyenes merőleges az első nyomvonalra (és így az összes első fővonalra), akkor a sík egy *első esésvonalá*nak nevezzük; amennyiben a második nyomvonalra (és az összes második fővonalra) merőleges, akkor a sík egy *második esésvonalá*t kapjuk.

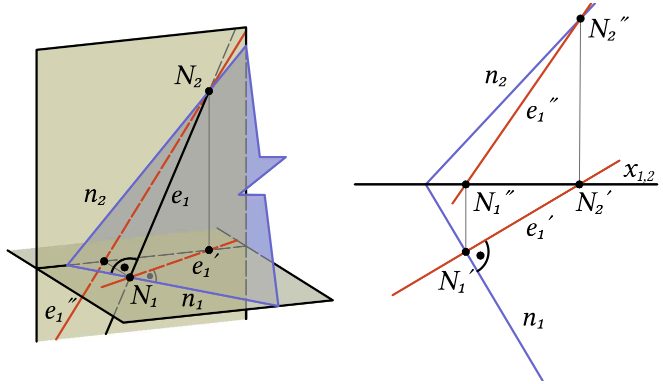
A sík esésvonalainak képi feltétele

Egy *síkbeli* e_1 egyenes akkor és csak akkor a sík egy első esésvonala, ha $e_1' \perp n_1$. Egy *síkbeli* e_2 egyenes akkor és csak akkor a sík egy második esésvonala, ha $e_2'' \perp n_2$.

Az esésvonalak képi feltétele praktikusan azt jelenti, hogy a nyomvonal és az esésvonal merőlegessége az egyik képen nem torzul, azaz megmarad a 90°-os szög.

Egy sík egy első esésvonala

Adott egy sík nyomvonalaival. Vegyünk fel ebben a síkban egy tetszőleges e_1 első esésvonalat! (4.11. ábra)



4.11. ábra. Sík egy első esésvonala

A szerkesztés lépései

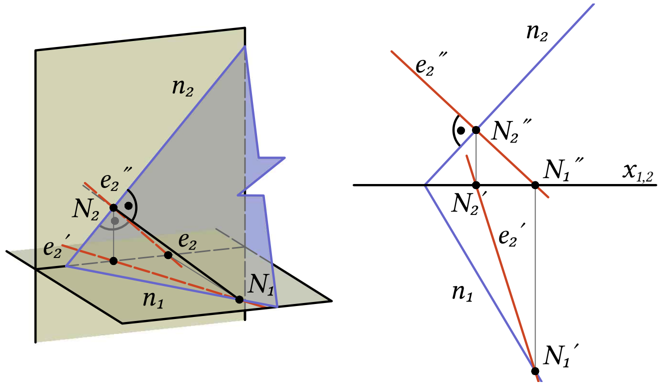
Ha az első képre vonatkozó feltételt teljesítjük, akkor a szerkesztés további része csupán egy egyenes síkra illesztése.

1. A képi feltétel szerint $e_1' \perp n_1$, ezért az e_1 első képét bárhol megválaszthatjuk, ha az merőleges az n_1-re: e_1'.

2. Az e_1' első kép alapján – felhasználva, hogy az egyenes benne van a síkban – a feladat a továbbiakban az e_1 egyenes síkra illesztése. (Lásd a 4.1.2. fejezetbeli „Egyenes illesztése nyomvonalakkal adott síkra” feladatot.)

Egy sík egy második esésvonala

Adott egy sík nyomvonalaival. Vegyünk fel ebben a síkban egy tetszőleges e_2 második esésvonalat! (4.12. ábra)



4.12. ábra. Sík egy második esésvonala

A szerkesztés lépései – útmutató

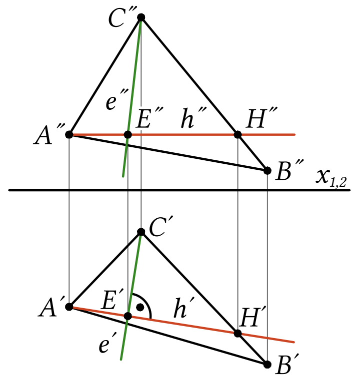
A feladat megoldása – a megfelelő képek szerepeinek felcserélésével – az előzőhöz hasonló.

Megjegyzések:

- A képi feltétel azért igaz, mert az e_1-hez tartozó első vetítősík merőleges n_1-re. (Az $e_1 \perp n_1$, és az egyenes bármely pontját – pl. N_2-t – vetítő egyenes is merőleges n_1-re. Ha pedig a vetítősík két egyenese merőleges n_1-re, akkor a vetítősík minden egyenese merőleges n_1-re. Ezért $e_1' \perp n_1$.) Hasonlóan, egy második esésvonalra: $[e_2, e_2''] \perp n_2$ teljesül, így $e_2'' \perp n_2$ is igaz.
- Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy egy tetszőleges síknak végtelen sok első/második fő- vagy esésvonala van. A sík minden pontján áthalad egy első fővonal, egy első esésvonal, egy második fővonal és egy második esésvonal.
- A fő- és esésvonalakat a nyomvonalak segítségével definiáltuk. Ha nem állnak rendelkezésre a nyomvonalak, akkor a fővonalak (mivel azok párhuzamosak a nyomvonalakkal) veszik át a szerepüket.

Három ponttal adott sík fő- és esésvonala

Adott egy sík az $ABC\triangle$ háromszöggel. Szerkesszük meg az A ponton keresztül a sík h első fővonalát, majd a C-n keresztül az e első esésvonalát! (4.13. ábra)



4.13. ábra. Egy sík első fő- és esésvonala

A szerkesztés lépései – útmutató

A feladat a fő- és esésvonal definíciója, továbbá a 4.1.2. fejezet első példája alapján megszerkeszthető. Először adjuk meg például a h első fővonalat a H pont segítségével. Ezután – felhasználva, hogy a h fővonal párhuzamos az ábrán nem látható n_1 nyomvonallal – az e' merőleges a h'-ra. Az e második képét az E ponttal szerkeszthetjük meg.

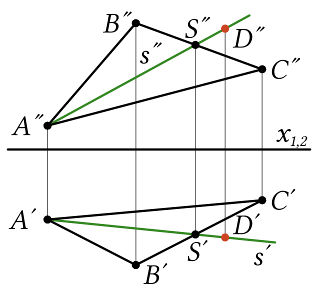
A feladat akkor is megoldható, ha h nem metszi a háromszög oldalait mint szakaszokat. Egyszerűen hosszabbítsuk meg a háromszög megfelelő oldalait, majd az oldal*egyenesek*kel már biztosan találunk metszéspontokat.

4.1.4. Pont és sík – illeszkedés

Az illeszkedési feladatok „legnehezebb” típusa, amikor egy síkon szeretnénk egy pontot ábrázolni. A feladatokat *egyenes síkra illesztésé*re vezetjük vissza.

Pont felvétele háromszöggel adott síkon

Adottak az A, B és C pontok képeikkel Monge-projekcióban. Szerkesszünk tetszőleges D pontot, amely illeszkedik az $ABC\triangle$ síkjára! (4.14. ábra)



4.14. ábra. Háromszög síkjában egy újabb pont felvétele

A szerkesztés lépései

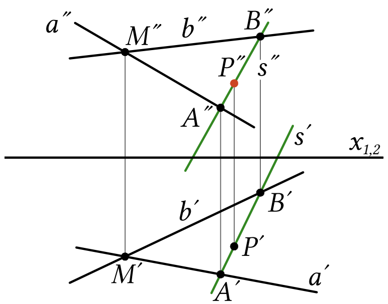
Mivel három pont egyértelműen meghatároz egy síkot, ezért egy negyedik síkbeli pont képe nem vehető fel tetszőlegesen, azt szerkeszteni kell.

1. A keresett D pont egyik képe tetszőlegesen kijelölhető, legyen ez a D'' második kép.
2. A D-t a háromszög ismert pontjaival szeretnénk „kapcsolatba hozni”, hiszen az $ABC\triangle$ síkjában lesz benne a D pont. Kössük tehát össze a D-t az A-val, így kapjuk az $s = \overleftrightarrow{AD}$ segédegyenest, amely biztosan benne van a síkban. Jelenleg az s második képét tudjuk meghatározni: $s'' = \overleftrightarrow{A''D''}$.
3. Meghatározzuk az s első képét.
   (a) Az s egyenes elmetszi a $\overline{BC}$ szakaszt egy S pontban, ennek a második képe kijelölhető: $s'' \cap \overline{B''C''} = S''$.
   (b) Az S''-ből húzott rendező – az illeszkedéstartás miatt – a $\overline{B'C'}$ első képből kimetszi az S' első képet.
   (c) Az s egyenes első képe: $s' = \overleftrightarrow{A'S'}$.
4. A D pont rajta van az s egyenesen, ezért D' rajta van s'-n. A D''-ből húzott rendező kimetszi s'-ből a hiányzó D' első képet.

A D pontot tehát egy segédegyenessel illesztettük a háromszög síkjára. Ez az ötlet egyszerű térgeometriai gondolat, amely független a vetítési rendszertől (itt a Monge-projekciótól), és akkor is alkalmazható, ha a sík más módon van megadva.

Pont felvétele metsző egyenespárral adott síkon

Adott egy sík a és b metsző egyenesekkel Monge-projekcióban, valamint egy P pont első képe. Szerkesszük meg a P'' második képet úgy, hogy a P pont benne legyen az adott síkban! (4.15. ábra)



4.15. ábra. Metsző egyenespár síkjában egy újabb pont felvétele

A szerkesztés lépései – útmutató

A szerkesztés ugyanúgy egy tetszőleges, síkbeli segédegyenest használ, mint az előző feladat: P-n keresztül egy s segédegyenest veszünk fel, amely mindkét adott egyenest metszi. A megoldás során az első képekből indulunk ki. (A két egyenes metsző, így létezik az M metszéspont.)

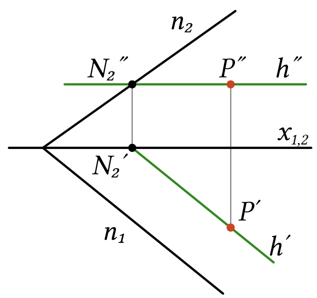
A választott, tetszőleges segédegyenes lehet akár a sík speciális egyenese is.

Pont felvétele nyomvonalaival adott síkon

Adott egy sík nyomvonalaival. Vegyünk fel ebben a síkban egy tetszőleges P pontot! (4.16. ábra)

A szerkesztés lépései – útmutató

A P pont egyik képét tetszőlegesen felvehetjük. Ha például a P' tetszőleges, akkor azon keresztül egy tetszőleges, síkbeli egyenest kell felvenni, majd arra kell a pontot is ráilleszteni. A példában a „tetszőleges” egyenes a sík P-n áthaladó h első fővonala.



4.16. ábra. Nyomvonalakkal adott síkban egy újabb pont felvétele

4.1.5. Gyakorló feladatok

1. Adott két metsző egyenes Monge-projekcióban. Szerkesszen olyan egyenest, amely mindkettőt metszi (azaz a három egyenes egy síkban van)!

2. Adott két kitérő egyenes Monge-projekcióban. Szerkesztendő egy olyan egyenes, amely mindkét adott egyenest metszi. (Az ilyen egyeneseket *transzverzális*nak nevezzük.)

3. Adott egy α sík metsző egyenespárral. Vegyen fel egy olyan síkot, amely párhuzamos az α síkkal! (Segítség: Két sík párhuzamosságához két-két egyenesük párhuzamossága szükséges.)

4. Adott egy sík párhuzamos egyenespárral (a, b), és egy e egyenes második képe. Szerkessze meg az e első képét úgy, hogy az egyenes benne legyen az $[a, b]$ síkban!

5. Adott egy sík nyomvonalaival, továbbá egy e egyenes második képe. Szerkesztendő az e' első kép úgy, hogy az egyenes benne legyen a síkban.

6. Adott egy sík metsző egyenespárral. Szerkesszen egy, a síkkal párhuzamos egyenest!

7. Szerkesszen metsző egyenespárral adott síkban egy első fővonalat!

8. Szerkesszen metsző egyenespárral adott síkban egy második fővonalat!
9. Adott egy sík egy h első, és egy v második fővonalával. Szerkesszen a síkban egy első esésvonalat!
10. Adott egy sík egy h első, és egy v második fővonalával. Szerkesszen a síkban egy második esésvonalat!
11. Adjon meg egy párhuzamos egyenespárral meghatározott síkban egy tetszőleges, a párhuzamos egyenesekre nem illeszkedő pontot!
12. Adott egy sík egy h első, és egy v második fővonalával. Szerkesszen a síkban egy, a fővonalakra nem illeszkedő pontot!
13. Adott egy sík nyomvonalaival és egy P pont P'' második képe.
    (a) Szerkessze meg a P' első képet úgy, hogy a pont benne legyen a síkban!
    (b) Szerkessze meg a sík P-n áthaladó első fővonalát és első esésvonalát!

4.2. Metszési alapfeladatok Monge-projekcióban

A 4.1.1. fejezetben már tárgyaltuk két egyenes metszését, ezért két alapfeladat maradt az illeszkedések és metszések témaköréből: sík és egyenes közös pontja, valamint két sík metszésvonala.

Ebben a fejezetben és a következőkben megtapasztalhatjuk, milyen gondolkodást kíván az ábrázoló geometria: egyrészt, alapvető térbeli ismereteket, olykor teljesen nyilvánvaló észrevételeket felhasználva kitaláljuk a megoldást, és a térbeli „szerkesztést” megvalósítjuk a síkban; másrészt, ha egy ötletet sikeresen alkalmazunk az egyik képre, akkor „szerepcserével” a második képekre is felhasználhatjuk ugyanazt.

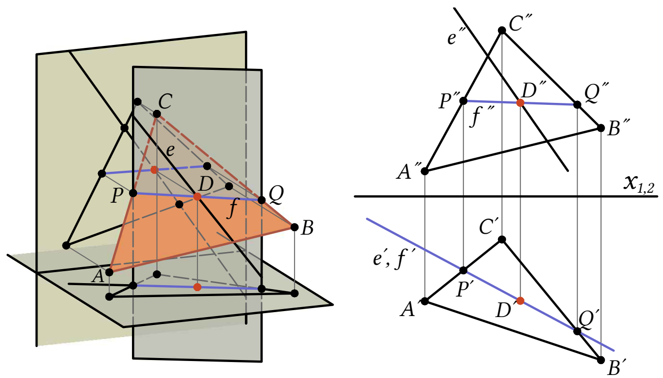
4.2.1. Sík és egyenes döféspontja

Egy sík és egy egyenes közös pontját metszéspont helyett gyakran – és az ábrázoló geometriában hagyományosan – *döféspont*nak nevezzük. Sík és egyenes döféspontjával minden nap találkozhatunk, és a mérnöki tanulmányokban is alapvető fontosságú. Például egy ferde tetőnek és egy antennának a csatlakozási pontja felfogható egy ferde sík és egy függőleges egyenes döféspontjának.

A döféspont megszerkesztése egy szép geometriai észrevételen alapul, és nem pusztán a Monge-projekcióban alkalmazható, hanem a később tárgyalásra kerülő axonometriában (9.2.2. fejezet) vagy perspektívában (10.3.2. fejezet) is. A feladatmegoldás során egy olyan segédegyenest használunk, amelynek valamelyik (első vagy második) képe egybeesik az adott egyenessel, azaz a két egyenes *fedésbe kerül.* A most bemutatásra kerülő módszer neve éppen ezért **fedőegyenespárok módszere**.

Síkidom (háromszög) és egyenes döféspontja

Adott egy sík az A, B és C pontokkal, valamint egy e egyenes. Szerkesszük meg az $ABC\triangle$ háromszög(lemez) és az egyenes közös pontját, ha az létezik! (4.17. ábra)



4.17. ábra. Háromszög és egyenes döféspontja

A szerkesztés lépései

1. Vegyük fel az $ABC\triangle$-et (például egy dőlt síkban) és az e-t.
2. Induljunk ki az első képekből!

   Az e' nem csupán az e egyenes első képe, hanem végtelen sok másik egyenesé is, amelyek közös első vetítősíkban vannak az e-vel. Ezek között van egy olyan egyenes, amelynek az első képe e' és(!) benne van az $ABC\triangle$ síkjában. Ez az egyenes az f (fedő)egyenes: $e' = f'$.
3. Mivel az f benne van a $ABC\triangle$ síkjában, ezért a háromszöget legfeljebb két pontban metszi. Ezek a metszéspontok (azaz ezek első képei) az első képről leolvashatók: P' (az $\overline{A'C'}$-n) és Q' (a $\overline{B'C'}$-n).
4. A P és Q metszéspontok második képeit rendezők segítségével kapjuk. A P'-ből induló rendező metszi az $\overline{A''C''}$-t a P''-ben; hasonlóan, a Q'-ből húzott rendező a $\overline{B''C''}$-t a Q''-ben metszi.

   Ezzel az f második képét megkaptuk: $f'' = \overleftrightarrow{P''Q''}$.
5. Az e és f egy síkban vannak (közös az első vetítősíkjuk), ezért csak metszők (vagy párhuzamosak) lehetnek. Közös pontjuk az első képről nem olvasható le az egybeesés miatt, de a második képen már látható: D''
6. Rendezővel kapjuk az első képet: $D' \in e'$ (és $D' \in f'$).
7. A most kapott D pont rajta van az e-n (ez evidens), és rajta van az $ABC\triangle$-n is, ugyanis a $\overline{PQ}$ is rajta van az $ABC\triangle$-n.

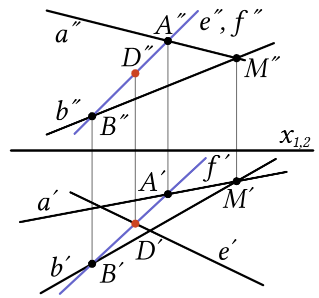
   Ha a D pont az egyenesnek és a háromszögnek is pontja, akkor az a keresett döféspont.

A szerkesztés akkor is hasonló, ha a második képekből indulunk ki.

Megjegyzés: A feladat síkidom(!) és egyenes közös pontjának meghatározását kérte. Előfordulhat, hogy az $ABC\triangle$-nek és az e-nek nincs közös pontja, mert az egyenes elhalad a háromszög mellett. Lehetséges azonban, hogy az $[A, B, C]$ (teljes) síknak és az e egyenesnek már van metszéspontja.

Metsző egyenespárral adott sík és egyenes döféspontja

Adott egy sík az a és b metsző egyenesekkel, továbbá egy e egyenes. Szerkesztendő az $[a, b]$ sík és az e egyenes döféspontja. (4.18. ábra)



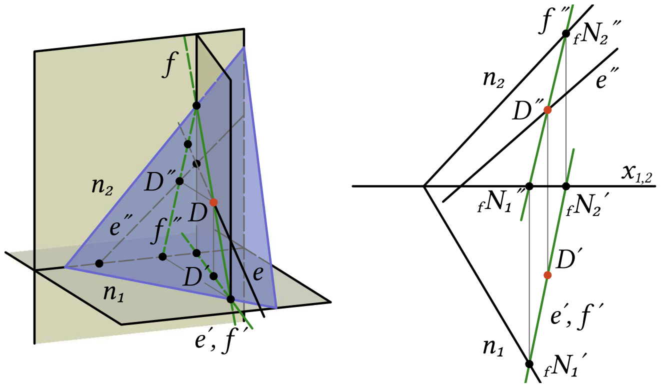
4.18. ábra. Metsző egyenespárral adott sík és egy egyenes döféspontja

A szerkesztés lépései – útmutató

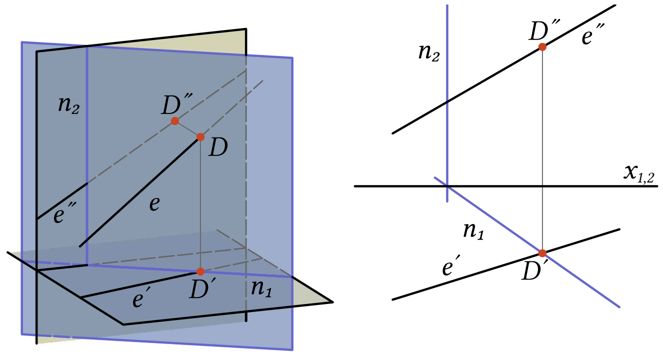
A feladat megoldása teljesen hasonló az előzőhöz. Itt a második képből indulunk ki, ezért egy olyan f fedőegyenest választunk, amelynek második képe egybeesik e''-vel és benne van az $[a, b]$ síkban. (Lásd 4.1.2. fejezet) (További segítség: $f \cap a = A$ és $f \cap b = B$.)

Nyomvonalakkal adott sík és egyenes döféspontja

Legyen adott egy $[n_1, n_2]$ sík nyomvonalaival és egy e egyenes. Szerkesszük meg a döféspontjukat! (4.19. ábra)



4.19. ábra. Nyomvonalakkal adott sík és egy egyenes döféspontja



4.20. ábra. Vetítősík és egy egyenes döféspontja

A szerkesztés lépései – útmutató

A szerkesztés kivitelezése ebben az esetben is a fedőegyenespárok módszerével oldható meg. Az f olyan egyenes, amelynek – itt például – az első képe egybeesik az e első képével, továbbá az f benne van az $[n_1, n_2]$ síkban. A megoldás során f''-t a nyompontjai segítségével kapjuk meg. (Lásd a 4.1.2. fejezetet.)

Vannak esetek, amikor a döféspont azonnal, szerkesztés nélkül is leolvasható.

Első vetítősík és egyenes döféspontja

Adott egy első vetítősík és egy tetszőleges egyenes Monge-projekcióban. Szerkesztendő a közös pontjuk. (4.20. ábra)

A megoldás igen egyszerű: az első vetítősík minden pontjának első képe az n_1 nyomvonalára esik, így a döféspontté is – így $n_1 \cap e' = D'$. A D''-t rendezővel kapjuk.

4.2.2. Két sík metszésvonala

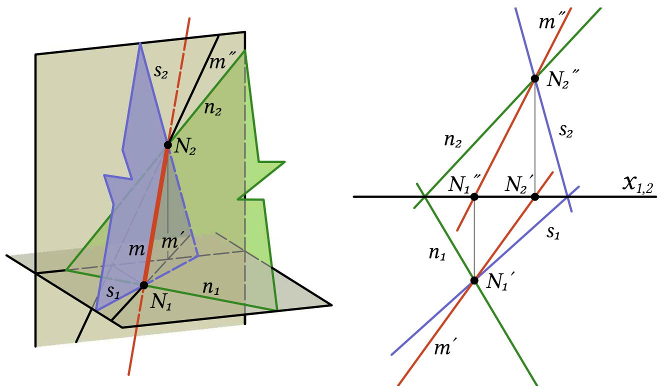
Két sík metszésvonalának megszerkesztésére több módszer is létezik attól függően, hogy milyen adatokkal vannak megadva a síkok. A következőkben a két legtipikusabb alapesetet vizsgáljuk meg: mindkét sík nyomvonalakkal, vagy mindkét sík síkidommal adott.

Nyomvonalakkal adott síkok metszésvonala

Monge-projekcióban adott két sík nyomvonalaikkal: $[n_1, n_2]$ és $[s_1, s_2]$. Szerkesztendő az m metszésvonaluk mindkét képe. (4.21. ábra)

A szerkesztés lépései

A megoldás azon alapul, hogy a metszésvonal egyenesét egyértelműen meghatározza két pontja – legyenek ezek a metszésvonal nyompontjai.



4.21. ábra. Két sík metszésvonala

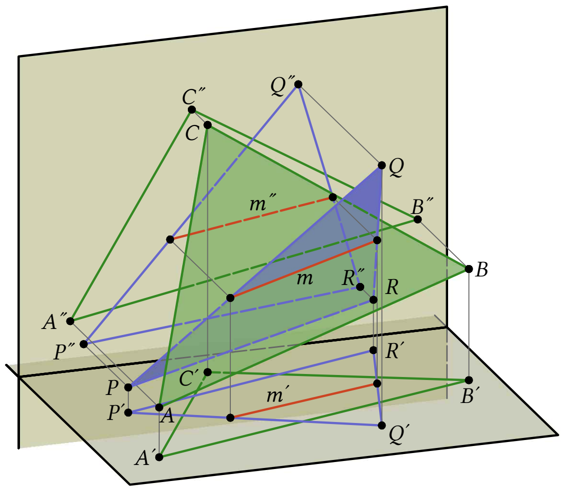
1. A metszésvonal mindkét síknak eleme, ezért a metszésvonal első nyompontja rajta van az n_1 és s_1 első nyomvonalakon is: $n_1 \cap s_1 = N_1'$. A nyompont második képe rendezővel megkapható: N_1''.

2. Hasonlóan járunk el a második nyompontnál is. A két második nyomvonal metszéspontja a metszésvonal második nyompontja: $n_2 \cap s_2 = N_2''$, majd rendezővel kapjuk a nyompont első képét: N_2'.

3. A nyompontok segítségével megkapjuk a metszésvonal két képét: $\overleftrightarrow{N_1'N_2'} = m'$ és $\overleftrightarrow{N_1''N_2''} = m''$.

Két síkidom metszésvonala

Adott egy $ABC\triangle$ háromszög dőlt és egy $PQR\triangle$ háromszög feszített síkban. Szerkesszük meg a két síkidom metszésvonalát! (4.22. ábra és 4.23. ábra)



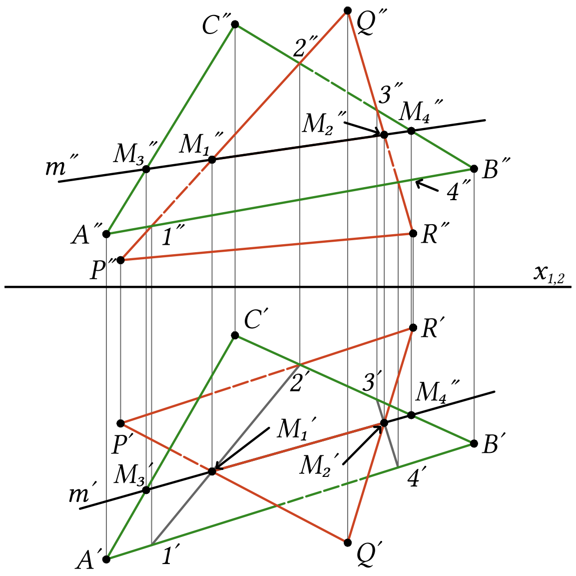
4.22. ábra. Két háromszög metszésvonala a térben

A szerkesztés lépései

Két síkidom metszésvonala egy szakasz. *A feladatot visszavezetjük sík(idom) és egyenes döféspontjának szerkesztésére.* A metszésvonal ugyanis nem más, mint két megfelelő döféspont által meghatározott szakasz.

1. Vegyük fel a két háromszöget tetszőlegesen, ügyelve arra, hogy mindkét képen legyen a háromszögeknek közös része. (Ha például egymás mellé vesszük fel a két háromszöget, nem kapnánk megoldást.)

2. Válasszuk ki az egyik síkidomot és rögzítsük, legyen például az $ABC\triangle$ fix. Ezt a háromszöget döfjük el a $\overleftrightarrow{PQ}$, $\overleftrightarrow{QR}$ és $\overleftrightarrow{PR}$ egyenesek közül kettővel. (Két döféspont ugyanis már meghatározza a metszésvonalat mint teljes egyenest.)



4.23. ábra. Két háromszög metszésvonala

3. Határozzuk meg az $ABC\triangle$ és a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes döféspontját: M_1. (A szerkesztést lásd a 4.2.1. fejezetben, a fedőegyenes két pontját egyszerűen 1-gyel és 2-vel jelöltük.)

4. Hasonlóan az előző ponthoz, az $ABC\triangle$ és a $\overleftrightarrow{QR}$ egyenes döféspontja az M_2 pont.

5. Az M_1 és M_2 döféspontok az $ABC\triangle$ háromszögben és a $\overline{PQ}$, illetve a $\overline{QR}$ szakaszokon vannak, ezért az $\overline{M_1M_2}$ mindkét háromszögben benne van. Így a keresett metszésvonal az $\overline{M_1M_2}$ szakasz.

Fontos megjegyzés: *A két háromszög teljes síkjainak m metszésvonala tartalmazza az M_3 és M_4 pontokat is.* – Emiatt megszerkeszthettük volna például a $\overline{BC}$ szakasz és a $PQR\triangle$ döféspontját is. Ebben az esetben azt az eredményt kaptuk volna, hogy a $\overline{BC}$ a $PQR\triangle$-t nem, de annak síkját már eldöfi az M_4 pontban. Ezt az M_4 pontot bármelyik korábban megszerkesztett döfésponttal összekötve, szintén megkaptuk volna az m metszésvonalat és a rajta lévő $\overline{M_1M_2}$ szakaszt. Ez azt is jelenti, hogy a metszésvonal meghatározása nem függ attól, hogy melyik szakaszt és melyik síkidomot választjuk ki a döféspontok megszerkesztéséhez.

Megjegyzések:

- A szerkesztésünk *helyességét és pontosságát* érdemes mindig leellenőrizni. Gyors ellenőrzés lehet az, ha felhasználjuk, hogy a Monge-projekció aránytartó: például az $\overline{AC}$ szakaszon lévő M_3 ugyanolyan arányú osztópont mindkét képen. (A pontos méréseket mellőzve, az M_3 „nagyjából” az $\overline{AC}$ szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontjához van közel a térben és a két képen is.)

- A megoldási módszer nem függ attól, hogy a síkidomok háromszögek; a szerkesztés ugyanígy végrehajtható például két síkbeli négyszöggel is.

- A valóban látványos végeredményhez fel kell tüntetni, hogy mely szakaszok láthatóak és melyek nem; lásd a 4.3. fejezetet.

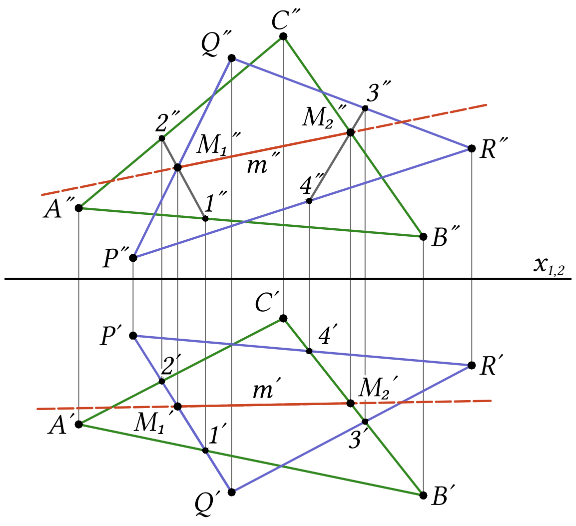
Két síkidom az előzőtől eltérően is metszheti egymást. Erre mutat példát a következő feladat.

Két síkidom metszésvonala – másik verzió

Adott egy $ABC\triangle$ háromszög dőlt és egy $PQR\triangle$ háromszög feszített síkban. Szerkesszük meg a két síkidom metszésvonalát! (a 4.24. ábra)

A szerkesztés lépései – útmutató

A megoldás teljesen azonos az előző feladatban látottakkal. A metszésvonalat mint szakaszt az $ABC\triangle \cap \overline{PQ} = M_1$ és $PQR\triangle \cap \overline{BC} = M_2$ döféspontok határozzák meg.



4.24. ábra. Két háromszög metszésvonala – szerkesztés

Megjegyzés: Néhány szerkesztés, mint az előbbi is, nem függ az $x_{1,2}$ pontos helyzetétől, csak annak állásától (ami általában vízszintes). Ezért bizonyos helyzetekben, ha nem cél a precíz rekonstruálás, akár el is hagyhatjuk az $x_{1,2}$ képsíktengelyt.

4.2.3. Gyakorló feladatok

1. Adott egy paralelogramma és egy tetszőleges egyenes. Szerkessze meg a döféspontjukat (második fedőegyenespárt alkalmazva)!

2. Adottak az a és b párhuzamos egyenesek, továbbá egy, a síkjukra nem illeszkedő e egyenes. Szerkesztendő a $D = [a, b] \cap e$ döféspont.

3. Adott egy sík h első és v második fővonalával, továbbá egy, a síkra nem illeszkedő egyenes. Szerkessze meg a sík és az egyenes közös pontját!

4. Adott egy feszített síkban fekvő $ABC\triangle$ háromszög és egy e egyenes. Szerkessze meg a háromszög és az egyenes döféspontját!

5. Adott egy második vetítősík és egy egyenes. Szerkesztendő a döféspontjuk.

6. Vegyen fel egy első vetítősíkot egy $ABC\triangle$ háromszöggel, valamint egy e egyenest! Határozza meg a vetítősík és az egyenes döféspontját, ha az létezik!

7. Adott egy háromszög és egy v_2 második vetítőegyenes. Határozza meg a döféspontot! (Segítség: A második vetítőegyenes második képe tartalmazza a döféspont második képét is. Az első képét úgy szerkesztjük meg, hogy a döféspont benne legyen a háromszögben.)

8. Adott egy első vetítősík és egy tetszőleges sík nyomvonalaival. Szerkessze meg a két sík metszésvonalát! (Segítség: Az első vetítősík első képe egyúttal a metszésvonal első képe is. A metszésvonal második képét megkapjuk, ha a metszésvonalat a másik síkra illesztjük.)

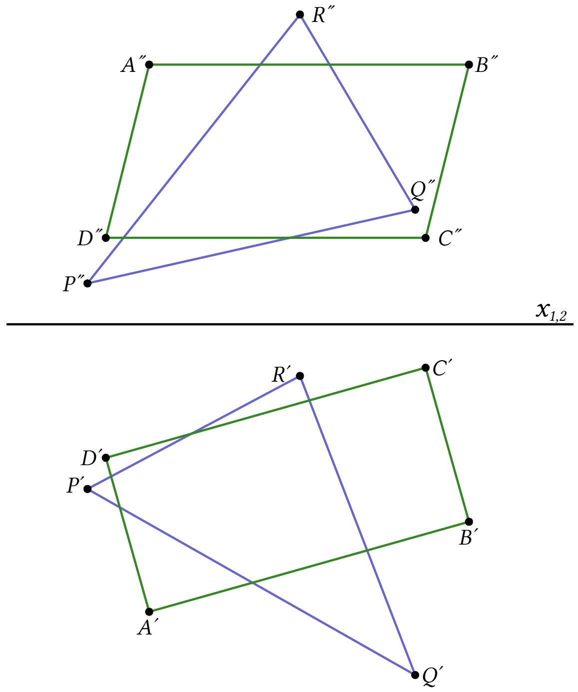
9. Vegyen fel egy dőlt síkban fekvő paralelogrammát és egy feszített síkban lévő háromszöget! Szerkesztendő a metszésvonaluk.

10. Adott a 4.25. ábrán látható dőlt síkú háromszög és feszített síkban fekvő paralelogramma. Szerkesztendő a metszésvonal.

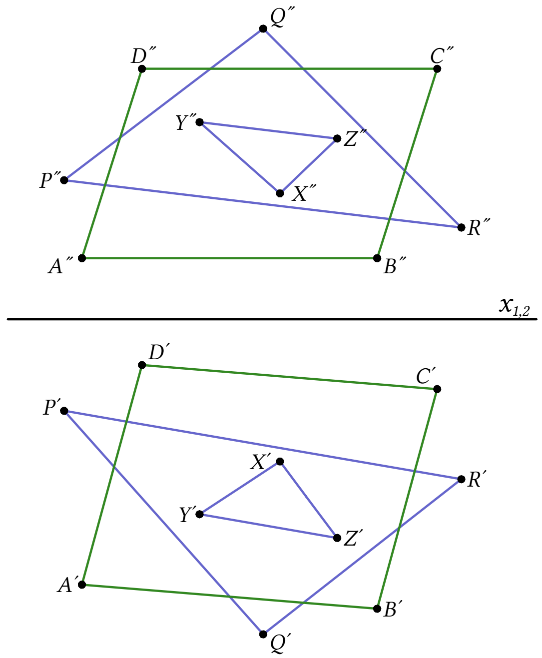
    A paralelogramma a valóságban egy téglalap. Miért? (Segítség: Az $\overleftrightarrow{AB}$ egy első fővonal, az $\overleftrightarrow{AD}$ egy azt metsző első esésvonal. Lásd a 4.1.3. fejezetet.)

11. (nehéz feladat) Adott a 4.26. ábrán látható feszített síkú lyukas háromszög és egy dőlt síkbeli paralelogramma. Szerkessze meg a metszésvonalat ügyelve az $XYZ\triangle$ lyukra! Mutassa meg, hogy az $XYZ\triangle$ illeszkedik a $PQR\triangle$ háromszög síkjára! (Segítség: Például az $\overleftrightarrow{XZ}$ egyenes két létező pontban metszi a $PQR\triangle$-et.)

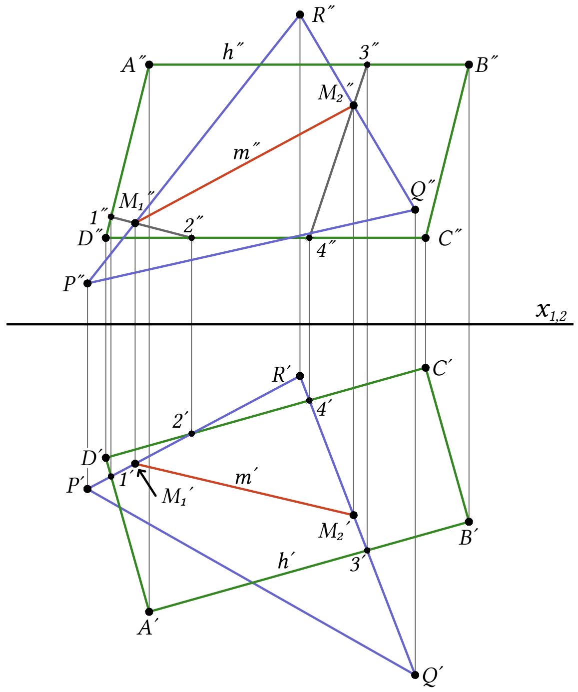
12. (nehéz feladat) Adott egy sík nyomvonalaival és egy $ABC\triangle$ háromszög. Szerkesztendő az adott sík metszésvonala az adott háromszöggel (mint síkkal). (Segítség: A háromszög egyeneseivel kell a nyomvonalakkal adott síkot döfni. Másik megoldás lehet, ha meghatározzuk a háromszög síkjának nyomvonalait, és a nyomvonalakkal adott síkok metszésvonalát szerkesztjük meg.)



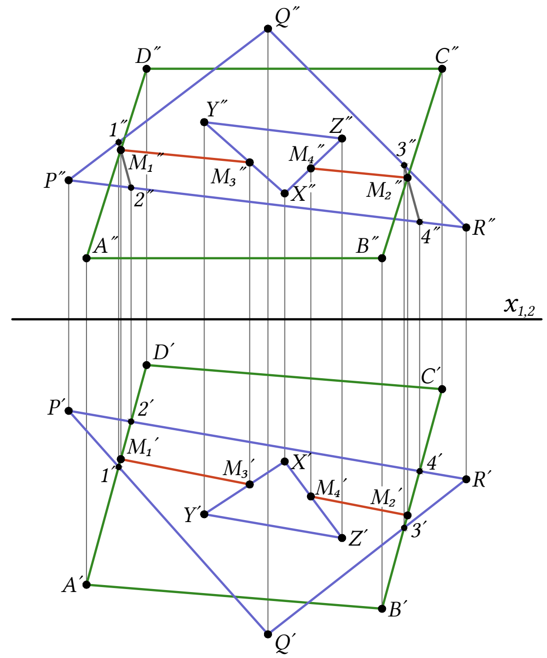
4.25. ábra. Háromszög és paralelogramma metszésvonala – ábrafelvétel



4.26. ábra. Lyukas háromszög és paralelogramma metszésvonala – ábrafelvétel



4.27. ábra. Háromszög és paralelogramma metszésvonala – 10. feladat megoldása



4.28. ábra. Lyukas háromszög és paralelogramma metszésvonala – 11. feladat megoldása

4.3. Objektumok láthatósága

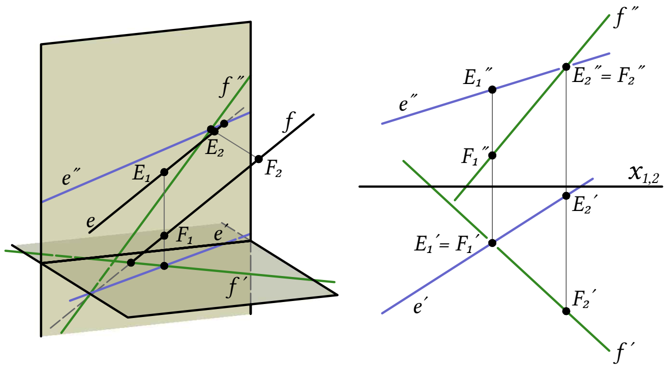
Az ábrázoló geometria egyik fő célja a szemléltetés. A szerkesztés során megkapott eredményről, az objektumok elhelyezkedéséről szeretnénk szemléletes képet kapni. Ezért meg kell állapítanunk, hogy a két képen – azaz felülnézetben és elölnézetben – mely térelemek láthatóak és melyek vannak takarásban.

4.3.1. Egyszerű alakzatok láthatósági viszonyai

A látható és takarásban lévő pontokról már esett szó korábban, a fedőpontokról szóló 3.1.4. fejezetben.

Egyenesek láthatósága

Adott két kitérő egyenes Monge-projekcióban. Határozzuk meg a láthatósági viszonyokat mindkét képen! (4.29. ábra)



4.29. ábra. Egyenesek láthatósága Monge-projekcióban

A szerkesztés lépései

A két képen külön-külön kell megállapítani, hogy mi látszik és mi marad takarásban.
Kezdjük például a felülnézettel, azaz az első képpel.

1. A két egyenes csak az $E_1' = F_1'$ pontpárban takarja egymást ($E_1 \in e$, $F_1 \in f$). A kérdés az, hogy az (E_1, F_1) első fedőpontpár melyik eleme van magasabban.

2. Ha rendezőt húzunk az $E_1' = F_1'$ első képből, akkor megkapjuk az E_1'' és F_1'' második képeket.

3. Az E_1'' távolsága az $x_{1,2}$-től nagyobb, mint az F_1'' távolsága (az $x_{1,2}$-től) – ez azt jelenti, hogy az E_1 pont van magasabban. Ezért az első képen az E_1 takarja F_1-et, tehát azon a részen az e egyenes látszik.

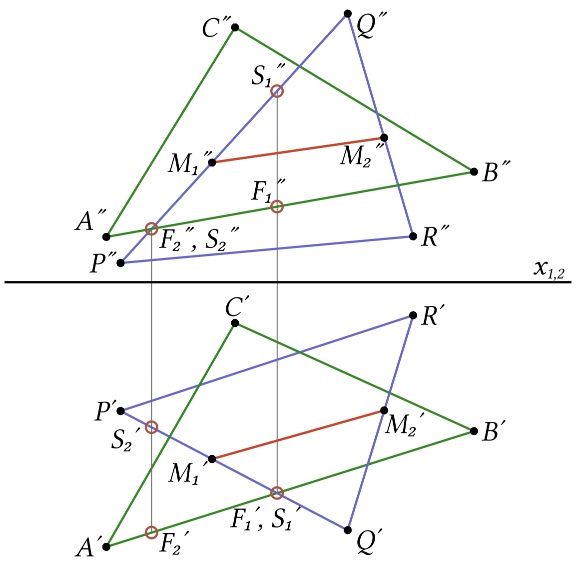
Hasonlóan járunk el az elölnézetnél (a második képnél). Itt az (E_2, F_2) második fedőpontpárt vizsgálva azt tapasztaljuk, hogy az F_2 távolabb van a $\mathcal{K}_2$ képsíktól, mint az E_2. Ezért a második képen (a fedésben lévő részen) az f egyenes látszik.

Érdekessége a láthatóság megállapításának, hogy az első kép láthatósági viszonyaihoz a második képet kellett segítségül hívni, és fordítva.

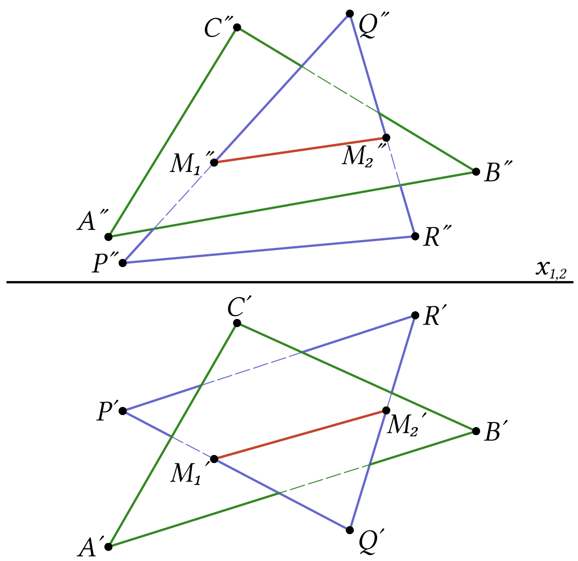
Az előző fejezet egyik példáján bemutatjuk egy kész ábra láthatóság szerinti teljes ábrázolását.

Láthatóság meghatározása

Adott két háromszög (mint nem átlátszó síklapok) és a megszerkesztett metszésvonaluk. Húzzuk ki az ábrát láthatóság szerint mindkét képen! (4.31. ábra) (A metszésvonal szerkesztését lásd a 4.2.2. fejezet első feladatában.)



4.30. ábra. Háromszögek metszésvonala – fedőpontpárok keresése



4.31. ábra. Háromszögek metszésvonala – láthatósággal

A szerkesztés lépései

A láthatóság megállapításánál mindegy, hogy melyik képpel kezdjük és azon belül mely pontpárokkal. Evidens, hogy mindkét képen a két háromszög mindegyik csúcspontja látható. Továbbá, az $\overline{M_1M_2}$ mindkét háromszögnek eleme, ezért *a metszésvonal látszik mindkét képen.* Csak az egymást fedő szakaszok fedőpontpárjairól kell döntenünk.
Tekintsünk egy-egy példát az első, illetve a második képen.

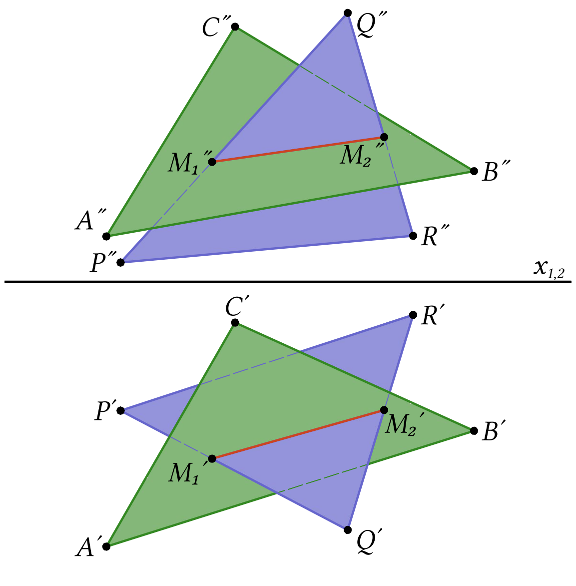
1. Az első képen $F_1 \in \overline{AB}$ és $S_1 \in \overline{PQ}$ első fedőpontok.
   (a) Az F_1 és S_1 első fedőpontok, azaz $F_1' = S_1'$.
   (b) Rendezővel kapjuk – a megfelelő szakaszokra illesztve – a pontok második képeit: F_1'' és S_1''.
   (c) A második képekről leolvasható, hogy az S_1 pont magasabban van, mint az F_1 – ezért az első képen S_1 látszik.
   (d) Ha látszik az S_1 az első képen, akkor a teljes $\overline{M_1Q}$ szakasz is látszik. (M_1 és Q is látható az első képen, és nincs más objektum, ami erre a szakaszra rátakarna.)
2. A második képen tekintsük a $F_2 \in \overline{AB}$ és $S_2 \in \overline{PQ}$ második fedőpontokat.
   (a) $F_2'' = S_2''$, hiszen a két pont második fedőpontpár.
   (b) Rendezővel: F_2' és S_2'.

(c) A pontok első képei megmutatják, hogy az F_2 pont távolabb van a második képsíktól, mint az S_2, ezért a második képen az F_2 látszik.

(d) Az A pont és az F_2 is látszik a második képen, ezért az A-ból induló szakaszrész biztosan látható elölnézetben. (Sőt, a szakasz egészen a B végpontig látszik, hiszen az $\overline{AB}$-n nincs a metszésvonalnak pontja. Ez egy igen logikus észrevétel, amely térszemlélet nélkül megállapítható; de leellenőrizhető egy másik, második fedőpontpárral.)

A többi fedőpontpárnál is hasonlóan járunk el.

Az összes megfelelő pontpárnál eldöntve a láthatóságot, a végeredményt a 4.32. ábra mutatja.

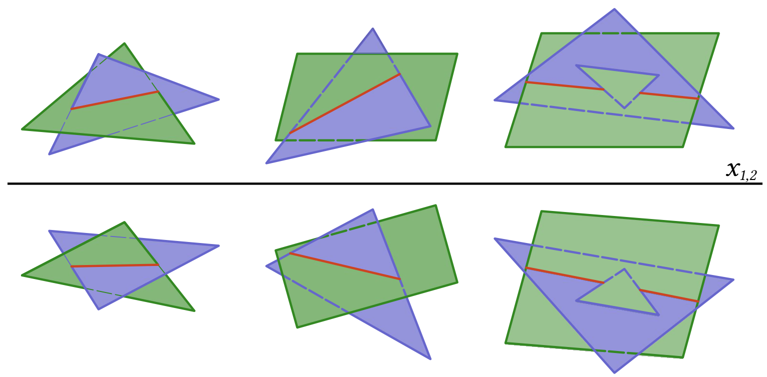


4.32. ábra. Háromszögek metszésvonala – végeredmény

Megjegyzés: Jó térlátással nincs szükség arra, hogy minden egyes fedőpontpár esetén eldöntsük mi látható és mi nem. Elegendő mindkét képen egy-egy fedőpontpárt megvizsgálni, azután a vetületeket már helyesen ki lehet húzni.

4.3.2. Gyakorló feladatok

Állapítsa meg a láthatósági viszonyokat a 4.24. ábrán, 4.27. ábrán és 4.28. ábrán, majd húzza ki azokat láthatóság szerint!



4.33. ábra. A három feladat végeredménye

4.4. Kiegészítés – Transzverzális szerkesztések

A műszaki életben igen sok matematikai ismeret kerül alkalmazásra, és az első pillantásra csak elméleti szépséggel bíró objektumokról kiderül, hogy gyakorlati hasznuk is van. Ilyenek a transzverziálisok is, amelyeket például a bányászatban, aknák és alagutak tervezésekor alkalmaznak.

Transzverzális

Két (vagy több) kitérő egyenes egy-egy pontját összekötő egyenest a két egyenes *transzverzális*ának nevezzük.

A leggyakoribb transzverzálisok:

- adott ponton áthaladó transzverzális
- adott iránnyal (egyenessel) párhuzamos transzverzális
- *normáltranszverzális*: a két adott kitérő egyenesre merőleges transzverzális (két egyenes közötti szakasz hossza, a két kitérő egyenes távolsága).

Jelenlegi tudásunkkal az első kettőt már meg tudjuk szerkeszteni, a normáltranszverzális szerkesztését lásd a 8.4. fejezetben.

Adott ponton átmenő transzverzális

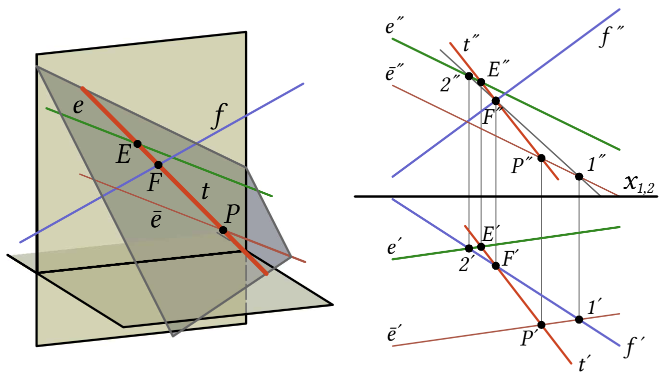
Adott az e és az f kitérő egyenes, továbbá egy, az egyenesekre nem illeszkedő P pont. Szerkesszük meg azt az egyenest, amely áthalad a P ponton és metszi mindkét adott egyenest! (4.34. ábra)

A szerkesztés lépései

Mielőtt a konkrét szerkesztést elvégeznénk, *„tervezzük meg" térben a feladat megoldását.* Olyan egyenest keresünk, amely P-n áthaladva, mindkét egyenest metszi. Ezért a keresett t transzverzális biztosan benne van (például) a $[P,e]$ síkban, ugyanis a P-t és az e egy pontját tartalmazza. A keresett egyenesnek azonban van egy közös pontja f-fel is; ez a pont csak az f és a $[P,e]$ sík döféspontja lehet.
A szerkesztés ezért a következő lépésekből építjük fel: meghatározzuk a $[P,e]$ síkot; eldöfjük az f-fel; végül kijelöljük a transzverzálist.

1. Szerkesszünk egy segédegyenest a $[P,e]$ síkon azért, hogy később, az f-fel alkotott döféspontot meg tudjuk szerkeszteni. Ez a segédegyenes bármilyen lehet; ha e-vel párhuzamost húzunk P-n keresztül, akkor biztosan síkbeli egyenest kapunk: $\bar{e}$. (Azaz: $\bar{e}' \parallel e'$ és $\bar{e}'' \parallel e''$.)
2. Metsszük el a $[P,e]$ síkot az f egyenessel. (A szerkesztés ismert, lásd a 4.2.1. fejezetet.) Itt az f-hez egy első fedőegyenest választottunk, amelyet az 1-es és 2-es pont feszít fel a síkon. A döféspont az F pont.
3. A $\overleftrightarrow{PF}$ egyenes már a keresett transzverzális: t. A szerkesztés akkor pontos és helyes, ha a t-nek van közös pontja e-vel is, az ábrán az E pont. (Az E' és E'' közös rendezőn van.)

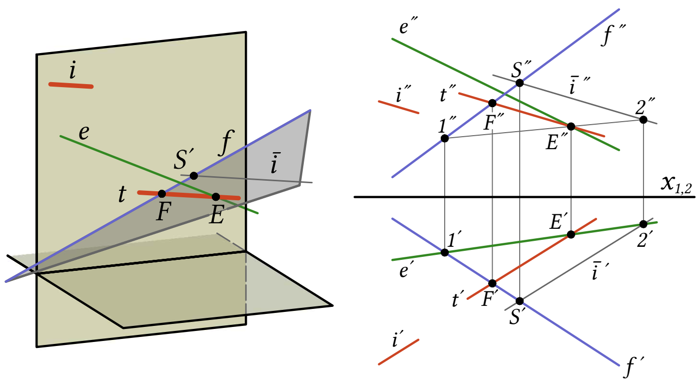
Látható, hogy az e és f egyenesek szerepe felcserélhető.



4.34. ábra. Adott ponton átmenő transzverzális

Adott iránnyal párhuzamos transzverzális

Adottak e és f kitérő egyenesek, valamint egy i irány. Szerkesszük meg az e és f egyenesek i-vel párhuzamos transzverzálisát! (4.35. ábra)



4.35. ábra. Adott iránnyal párhuzamos transzverzális

A szerkesztés lépései

Ebben az esetben is először térben kell végiggondolni a szerkesztést. A keresett t transzverzális metszi (például) az f egyenest és párhuzamos i-vel. Ez azt jelenti, hogy t benne van egy olyan, i-vel párhuzamos síkban, amely f-et tartalmazza. (Ezt a síkot egy, az i-vel párhuzamos $\bar{i}$ segédegyenessel határozzuk meg: $[f, \bar{i}]$.) Ezt a síkot eldöfjük az e egyenessel, és egy E döféspontot kapunk. Végül, az E-be i-vel párhuzamost húzunk, ez az egyenes benne van az $[f, \bar{i}]$ síkban (hiszen $\bar{i} \parallel i$), így metszi f-et is. Ezzel egy olyan egyeneshez jutunk, amely metszi e-t (E-ben), metszi f-et és párhuzamos i-vel – ez a keresett transzverzális.
A konkrét, technikai kivitelezés a következőképpen történhet.

1. Válasszunk ki az f egyenesen egy tetszőleges S segédpontot, majd húzzunk párhuzamost S-be i-vel: $\bar{i}' \parallel i'$ és $\bar{i}'' \parallel i''$.

2. Határozzuk meg az $[f, \bar{i}]$ sík és az e egyenes döféspontját (a már ismert szerkesztéssel): E (E', E'').

3. Húzzunk párhuzamost i-vel (vagy $\bar{i}$-sal) az E pontba: $t \parallel i \parallel \bar{i}$. Ez a t párhuzamos tartalmazza az e egy pontját (magát az E-t), és – mivel közös síkban (az $[f, \bar{i}]$-ban) van f-fel – metszi f-et is. A t a keresett, adott iránnyal párhuzamos transzverzális egyenes. A szerkesztés akkor helyes és pontos, ha t valóban metszi f-et (az F pontban).

A szerkesztés most sem függött attól, hogy először az f egyenest választjuk ki és a síkot e-vel döfjük, vagy fordítva járunk el.

5. fejezet

Képsíktranszformáció

Képsíktranszformáció alkalmazása során a két képsík közül az egyiket elhagyjuk, majd egy új, a megmaradt képsíkra merőleges képsíkot vezetünk be. Az új képsíknak két célja lehet: az ábrázolandó objektumról általánosabb képet szeretnénk kapni, vagy éppen ellenkezőleg, egy speciálisabb kép létrehozása a cél.

5.1. Új képsíkok bevezetése

Egy új képsík alkalmazása során az első és a második képsíkot is el lehet hagyni. A gyakorlati életben általában az első képsíkot őrizzük meg: például egy épületről, amely a talajon (azaz az első képsíkon) áll, szeretnénk egy másik nézetet megszerkeszteni. Ezért a II. képsík helyett egy új képsíkot veszünk fel. A műveletet többször is meg lehet ismételni. Egy új képsík bevezetése után elhagyjuk a „régi” képsíkot, majd ismét alkalmazhatunk egy új képsíkot egy korábbi képsík megszüntetésével.

A képsíkokat számozzuk, egy tetszőleges új képsík a rendszerünk *negyedik képsík*ja lesz, jelölése: $\mathcal{K}_4$ vagy IV. képsík. A számozás szokatlannak tűnik, hiszen két képsík után a harmadik következne. Ezt az elnevezést fenntartjuk arra az esetre, ha az új képsík mindkét eredeti képsíkra merőleges, azaz profilsík – ekkor nevezzük az új képsíkot *harmadik képsík*nak.

Az új képsíkok bevezetését egy pont segítségével mutatjuk be.

5.1.1. Pont transzformációja

Tekintsünk egy tetszőleges P pontot. Ha új képsíkokat alkalmazunk, akkor a P pontnak is új képei keletkeznek (negyedik, ötödik stb. képek). Az új képeket római számokkal vagy zárójeles arab számokkal jelölhetjük: P^{IV} vagy $P^{(4)}$. A „régi” képeket *elmaradó kép*eknek nevezzük. Ekkor azt mondjuk, hogy a P pontot *transzformáljuk*. (Ez a klasszikus elnevezés megtévesztő lehet: a P pont nem mozdul el a térben, csupán új képeit határozzuk meg.)

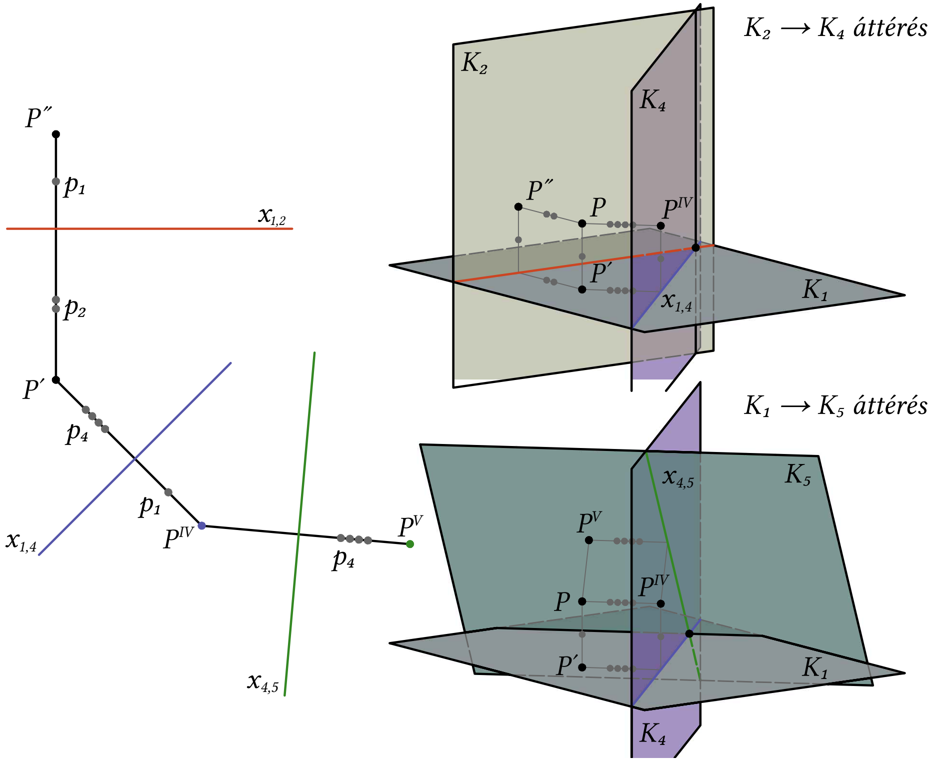
Pont transzformációja

Vezessünk be egy tetszőleges negyedik képsíkot a $\mathcal{K}_2$ képsík, majd egy ötödik képsíkot a $\mathcal{K}_1$ elhagyásával. Szerkesszük meg egy tetszőleges P pont új képeit! (5.1. ábra)

A szerkesztés lépései

Első lépésben vegyünk fel egy új, negyedik képsíkot, amely merőleges a $\mathcal{K}_1$ képsíkra, azaz a $\mathcal{K}_2$ képsíkot hagyjuk el.

1. Adjunk meg egy $x_{1,4}$ képsíktengelyt. Ezzel már az új $\mathcal{K}_4$ képsíkot is kijelöltük. (Figyeljük meg, hogy a $\mathcal{K}_4$ képsík valójában egy első vetítősík, amelynek nyomvonala az $x_{1,4}$.)



5.1. ábra. Pont transzformációja

2. A P'' pont $x_{1,2}$-től való távolsága egyenlő a P pont $\mathcal{K}_1$-től való távolságával (p_1 távolság). Ha megszüntetnénk a $\mathcal{K}_2$ képsíkot (és azzal együtt a P'' második képet), akkor ez az információ elveszne. Ezt kell átmásolnunk az új rendszerünkbe.

   (a) Állítsunk merőlegest P'-ből $x_{1,4}$-re. (Ez a merőleges a P új rendezőegyenese.)

   (b) Másoljuk át a p_1 távolságot (például egy körző segítségével) a rendezőegyenes és az $x_{1,4}$ metszéspontjából a rendezőegyenesre.

   (c) A kapott pont a P pont negyedik képe: P^{IV}.

Ezzel a második képsíkot és a második képeket elhagytuk. A $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_4$ képsíkok alkotta rendszerben minden ismert szerkesztés elvégezhető.
A második lépésben az első képsík elhagyásával egy új, ötödik képsíkot alkalmazunk. A szerkesztés lépései hasonlók az előző pontbeliekhez.

1. Az $x_{4,5}$ megválasztása tetszőleges. Ezzel az ötödik képsíkot is felvettük. (A $\mathcal{K}_5$ negyedik vetítősík.)

2. Az átmásolandó rendezőhossz a P pont távolsága a $\mathcal{K}_4$-től, azaz a p_4 szakasz. A kapott pont a P pont ötödik képe: P^V.

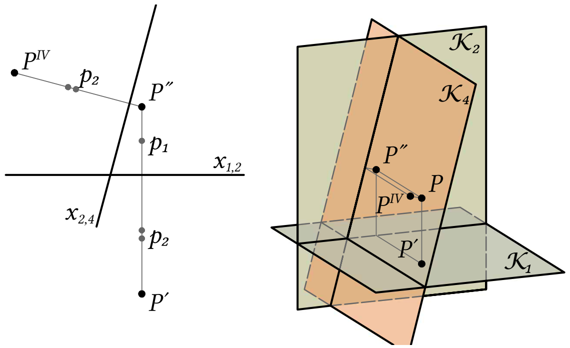
A $\mathcal{K}_4$ és $\mathcal{K}_5$ képsíkok ismét egy teljes értékű Monge-féle leképezési rendszert adnak.

Megjegyzés: A távolságok átmásolása során figyeljünk arra, hogy az adott ponthoz képest hol vettük fel az új képsíkot, és annak megfelelően, az új képsíktengely megfelelő oldalára vegyük fel az új képeket. Például, ha P' és P'' az $x_{1,2}$ tengely különböző oldalán van, akkor P' és P^{IV} is az $x_{1,4}$ különböző oldalán lesz.

A szerkesztés teljesen hasonló az előzőekhez akkor is, ha az első képsíkot szeretnénk elhagyni.

Pont transzformációja – másik verzió

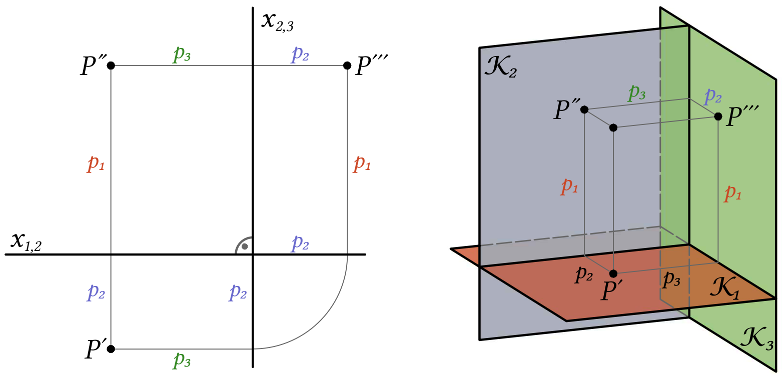
Adott egy P pont két képével. Vegyünk fel egy tetszőleges negyedik képsíkot az első képsík elhagyása mellett, majd határozzuk meg a P pont negyedik képét! (5.2. ábra)



5.2. ábra. Pont IV. képe

5.1.2. A harmadik képsík

Ahogyan azt a bevezetőben is említettük, a harmadik képsík *merőleges mindkét eredeti képsíkra*, azaz egy profilsík (5.3. ábra). A műszaki életben igen gyakran előfordul, hogy egy adott alkatrészről vagy egy épületről elöl-, felül- és oldalnézeti képet kell szerkeszteni.



5.3. ábra. Pont első, második és harmadik képe

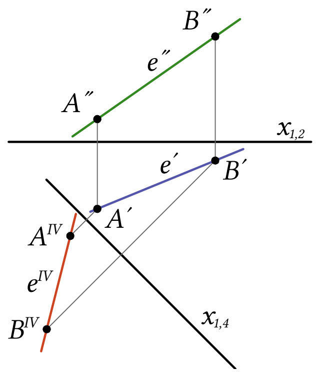
Ebben az esetben általában mindhárom képsíkot megtartjuk, és a képsíkokat egy doboz lapjaihoz hasonlóan „terítjük ki”. (A rendszert az $x_{1,3}$ mentén „vágjuk szét”.) Érdekesség, hogy itt a képsíkok egyesítése során a P' és P''' képek rendezője nem egyenes, hiszen tartalmaz egy negyedkört is. (Ha a rendszert az $x_{2,3}$ tengely mentén vágjuk el, akkor a P'' és P''' képek rendezőjében lép fel negyedkör.)

5.1.3. Egyenes transzformációja

Egy egyenes új képének/képeinek meghatározásakor felhasználjuk, hogy az egyenest két pontja egyértelműen meghatározza. Ezért nincs is szükség új módszerre, pusztán két pontját transzformáljuk, majd a kapott pontokat összekötve az egyenes új képéhez jutunk.

Egyenes transzformációja

Adott egy egyenes két képével. Vegyünk fel egy új, negyedik képsíkot, majd határozzuk meg az egyenes negyedik képét! (5.4. ábra)



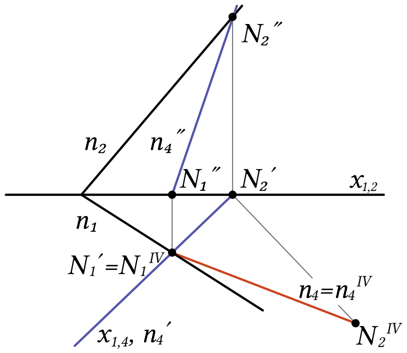
5.4. ábra. Egyenes transzformációja

5.1.4. Sík transzformációja

Ha a síkot három pontjával vagy két egyenesével határozzuk meg, akkor az új képek megszerkesztése visszavezethető pont és egyenes transzformációjára. Érdekes eset, ha a sík nyomvonalaival adott, és az új képeken is nyomvonalakat szeretnénk látni (negyedik, illetve ötödik nyomvonalakat).

Sík transzformációja nyomvonalak segítségével

Adott egy sík nyomvonalaival. Vegyünk fel egy tetszőleges negyedik képsíkot (a második képsík elhagyásával), majd határozzuk meg a sík negyedik nyomvonalát! (5.5. ábra)



5.5. ábra. Sík transzformációja

A szerkesztés lépései

Adjuk meg a tetszőleges síkot nyomvonalakkal, továbbá az új képsíkot az $x_{1,4}$ tengely segítségével.

1. A nyomvonalak a képsíktengelyen metszik egymást, ezért a keresett n_4 egyik pontja biztosan az n_1 és az $x_{1,4}$ metszéspontja.
2. A sík negyedik nyomvonala természetesen benne van az adott síkban és a $\mathcal{K}_4$ képsíkban is. (Az n_4 nyomvonal a két sík metszésvonala.) Mivel az új $\mathcal{K}_4$ képsík merőleges a $\mathcal{K}_1$-re, ezért a nyomvonal mint metszésvonal első képe $x_{1,4}$-gyel azonos: $x_{1,4} = n_4'$
3. Az n_4 síkbeli egyenes első képe már ismert, és a korábban tanultaknak megfelelően szerkeszthető a második képe (lásd 4.1.2. fejezet), az N_1 és N_2 nyompontjai segítségével.
4. Végül, az N_2 nyompont negyedik képét határozzuk meg: N_2^{IV} (Tekinthettünk volna tetszőleges pontot is az n_4-ről, de a szerkesztés során az N_2 mindkét képe ismertté válik, ezért jó választás.)
5. A sík negyedik nyomvonala az $\overleftrightarrow{N_1^{IV} N_2^{IV}}$ egyenes.

5.1.5. Gyakorló feladatok

1. Tetszőleges új képsíkok bevezetésével szerkessze meg a P pont IV. és V. képét, ha a P pont benne van
   (a) a II. térnegyedben,
   (b) a III. térnegyedben,
   (c) a $\mathcal{K}_1$ képsíkban,
   (d) a $\mathcal{K}_2$ képsíkban!

   A megoldások során vegyesen hagyja el az I. vagy a II. képsíkot!
2. Tetszőleges új képsíkok bevezetésével szerkessze meg az e egyenes IV. és V. képét, ha az egyenes
   (a) első fővonal,
   (b) második fővonal,
   (c) első vetítőegyenes,

   (d) második vetítőegyenes,
   (e) profilegyenes!

   A megoldások során vegyesen hagyja el az I. vagy a II. képsíkot!

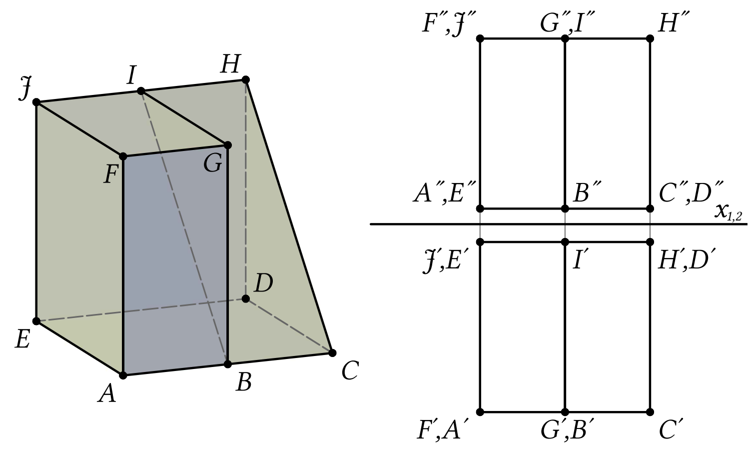
3. Tetszőleges új képsíkok bevezetésével szerkessze meg az $\mathcal{S}$ sík IV. és V. képét (nyomvonalakkal vagy az adott objektumok képeivel), ha a sík
   (a) nyomvonalaival adott és feszített,
   (b) három pontjával adott és dőlt,
   (c) metsző egyenespárral adott és feszített,
   (d) párhuzamos egyenespárral és dőlt!

   A megoldások során vegyesen hagyja el az I. vagy a II. képsíkot!

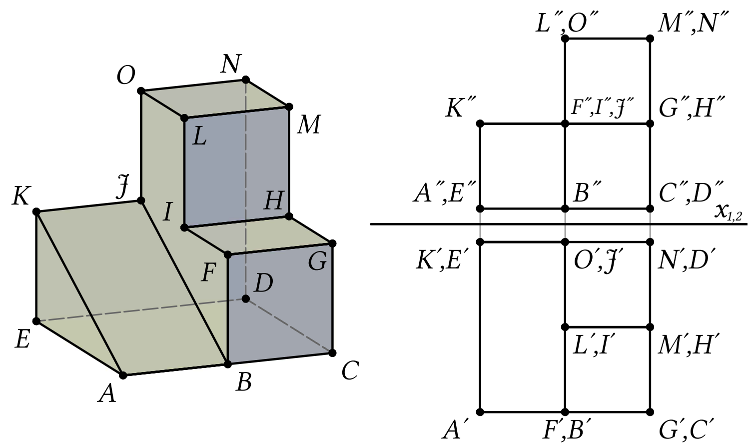
4. Új képsíkok alkalmazásával szerkessze meg az 5.6. ábrán, 5.7. ábrán és 5.8. ábrán látható csonkolt kockák IV. és V. képeit úgy, hogy az V. képen a csonkolt kocka egy általános nézetét kapjuk!

5. Szerkessze meg az előző feladatbeli csonkolt kockák oldalnézeti, azaz III. képeit!

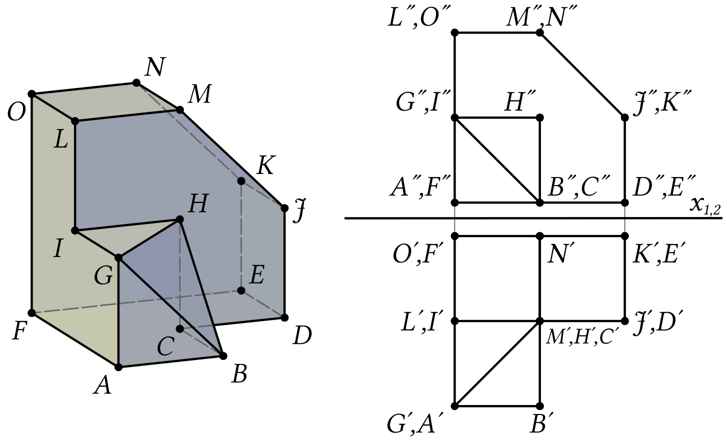
6. Határozza meg az 5.9. ábrán látható test I., II. és III. képeit! (A nézetirányok az ábrán láthatóak.)



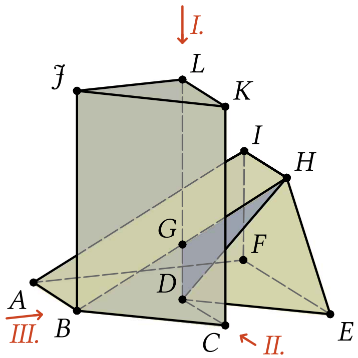
5.6. ábra. Csonkolt kocka 1.



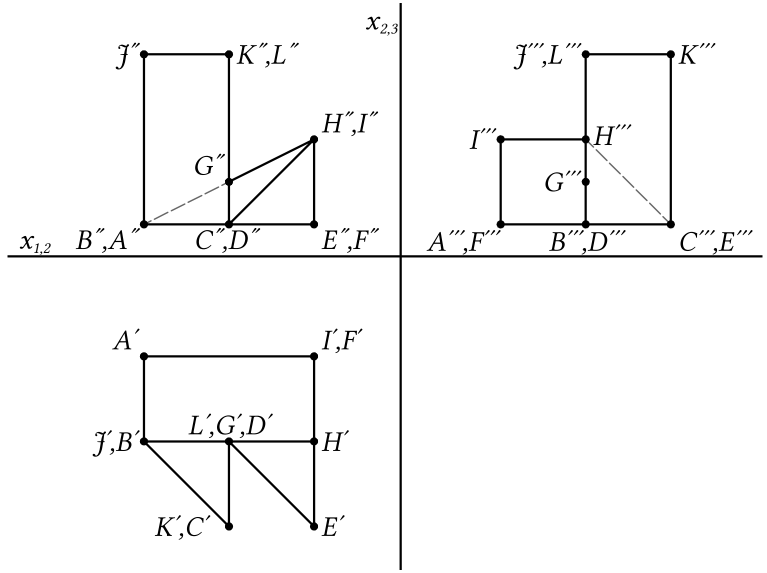
5.7. ábra. Csonkolt kocka 2.



5.8. ábra. Csonkolt kocka 3.



5.9. ábra. Csonkolt test



5.10. ábra. Csonkolt test nézetei – az 5.9. ábra megoldása

5.2. Céltranszformációk

A későbbi szerkesztések során gyakran szembesülünk olyan feladatokkal, amikor egy egyenes vagy egy sík általános helyzete megnehezíti annak megoldását. A szerkesztést azonban megkönnyíti, ha az egyenes/sík speciális helyzetű – ilyen esetekben a feladat megoldása igen egyszerűvé válik. Ebben a fejezetben erre láthatunk néhány alapvető példát.

Ha egy objektumot (leggyakrabban egyenest vagy síkot) azért transzformálunk, mert valamelyik új képsík bevezetésével az általunk végrehajtandó szerkesztés – az objektum speciális helyzete miatt – egyszerűbb, **céltranszformáció**ról beszélünk.

A fejezetben minden esetben a $\mathcal{K}_2$ képsíkot hagyjuk el először, ugyanis a módszer megértéséhez ez is elegendő. Javasoljuk a kedves Olvasónak, hogy – gyakorlásképpen – a szerkesztéseket végezze el a $\mathcal{K}_1$ képsík elhagyásával is.

5.2.1. Egyenes céltranszformációja

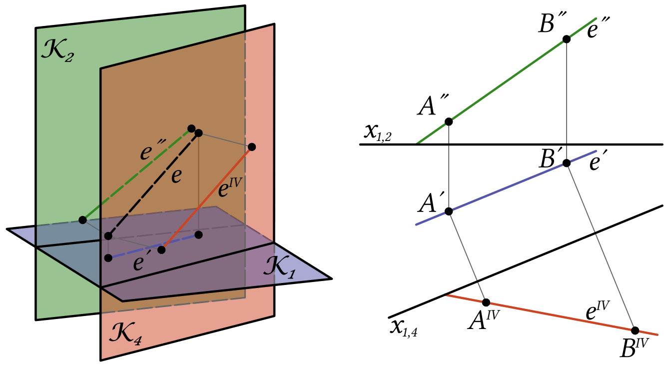
Egy egyenest képsíkkal párhuzamos vagy képsíkra merőleges helyzetűvé lehet transzformálni.

1. Egy tetszőleges egyenest egy alkalmas $\mathcal{K}_4$ képsík bevezetésével **képsíkkal párhuzamos** helyzetbe hozhatunk. A képsíkkal párhuzamos egyenesek fővonalak – vagyis a tetszőleges egyenes IV. fővonallá válik. (5.11. ábra)

   A fővonalak jellemzője, hogy az egyik képük a képsíktengellyel párhuzamos: egy IV. fővonal I. képe párhuzamos $x_{1,4}$-gyel, míg a IV. képe általános helyzetű (lásd a 3.2.2. fejezetet). Ezért $x_{1,4}$-et úgy vesszük fel, hogy az párhuzamos legyen az e' első képpel. (Az e'-vel végtelen sok párhuzamos egyenes húzható, így végtelen sok helyes megoldás van.)

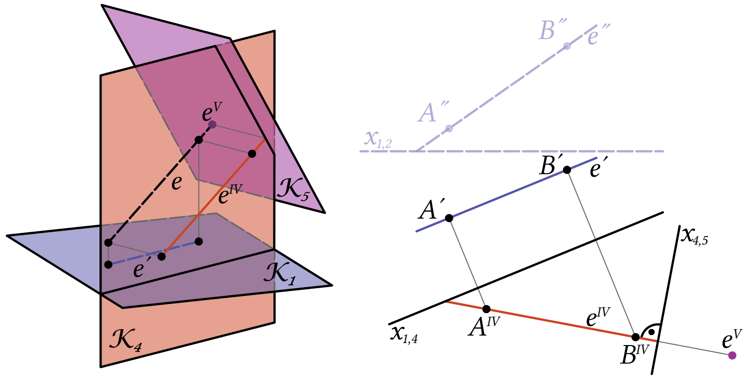
   Az alkalmas $\mathcal{K}_4$ képsík felvétele után az egyenes e^{IV} képét az előző fejezetben látottaknak megfelelően szerkeszthetjük meg.

   Fontos, hogy ekkor *az egyenes a IV. képen valódi nagyságában látszik*, azaz ezen a képen minden szakaszának IV. képe az adott szakasz valódi hosszúságát mutatja.



5.11. ábra. Egyenes céltranszformációja 1.

2. Az előző transzformációt újabb követheti: célunk ezúttal az, hogy az egyenes az új $\mathcal{K}_5$ **képsíkra merőleges** legyen (az I. képsík elhagyásával). (5.12. ábra)



5.12. ábra. Egyenes céltranszformációja 2.

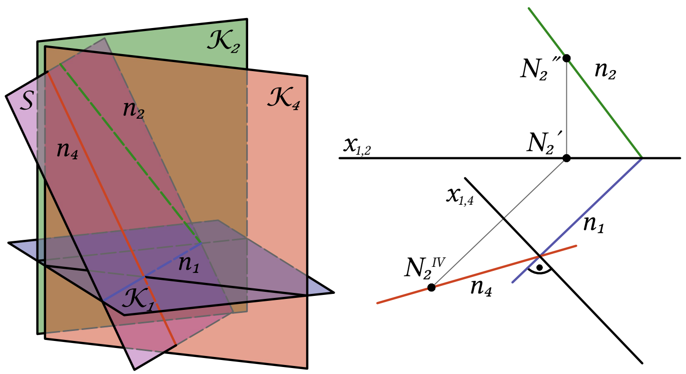
A képsíkra merőleges egyenesek a vetítőegyenesek, tehát az eredeti, tetszőleges egyenesből V. vetítőegyenes lesz. A vetítőegyenesek egyik képe pont, a másik a képsíktengelyre merőleges (lásd a 3.2.2. fejezetet) – itt e^{IV} merőleges a leendő $x_{4,5}$-re, e^V pedig egyetlen pont. A kívánt tulajdonságú új képsíkhoz e^{IV}-re merőleges $x_{4,5}$-öt kell felvenni. (Az alkalmas új képsíkok száma itt is végtelen.)

A transzformációt a korábbiaknak megfelelően végezhetjük el, azaz az egyenes új képét továbbra is két pontjával kapjuk meg. (Vegyük észre, hogy a felmérendő rendező hosszúsága az egyenes bármely pontja esetén ugyanakkora.)

5.2.2. Sík céltranszformációja

Egy síkot képsíkra merőleges vagy képsíkkal párhuzamos helyzetbe transzformálhatunk. A síkot ezúttal nyomvonalaival adjuk meg.

1. A tetszőleges, nyomvonalaival adott $\mathcal{S}$ síkot első lépésben az új $\mathcal{K}_4$ **képsíkra merőleges** helyzetbe lehet transzformálni. (5.13. ábra) Ekkor az $\mathcal{S}$ sík negyedik vetítősíkká válik (lásd 3.3.2. fejezet), és a negyedik képén „élben látszik”, azaz minden pontjának, egyenesének stb. IV. képe az n_4 nyomvonalra esik.

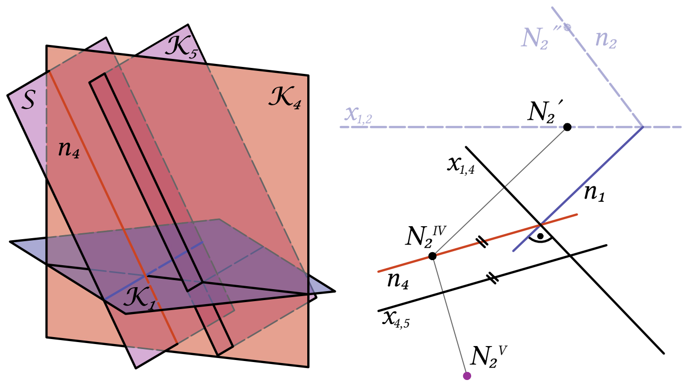


5.13. ábra. Sík céltranszformációja 1.

Ha egy sík vetítősík, akkor az egyik nyomvonala (itt az n_1 első nyomvonala) merőleges a képsíktengelyre (az $x_{1,4}$-re). Tehát ahhoz, hogy $\mathcal{S}$ vetítősík legyen, az új képsíkot meghatározó $x_{1,4}$ képsíktengelyt úgy kell felvenni, hogy az merőleges legyen n_1-re. (A jó megoldások száma végtelen.)

A sík n_4 nyomvonala biztosan az n_1 és az $x_{1,4}$ közös pontjából „indul ki”. Szükségünk van az n_4 egy újabb pontjára. Mivel $\mathcal{S}$ sík minden pontjának IV. képe n_4-re illeszkedik, ezért elegendő a sík egyetlen (tetszőleges) pontját transzformálni. Legyen ez a síkbeli pont az n_2 nyomvonal egy N_2 pontja pontja. (Ennek a pontnak ugyanis mindkét képe igen egyszerűen megkapható.) Az N_2^{IV} pont megszerkesztésével adódik az n_4 nyomvonal is.

2. Egy új, V. képsík bevezetésével elérhető, hogy az eredeti $\mathcal{S}$ sík az új $\mathcal{K}_5$ **képsíkkal párhuzamos** legyen. (5.14. ábra)



5.14. ábra. Sík céltranszformációja 2.

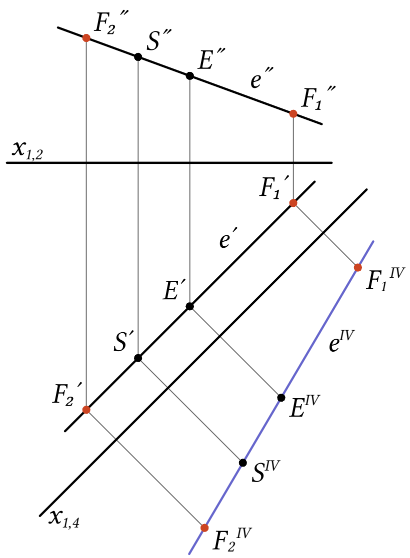
A képsíkkal párhuzamos síkok az ún. fősíkok (lásd a 3.3.2. fejezetet), amelyeknek egyik nyomvonala párhuzamos a képsíktengellyel. Hogy ez teljesüljön, az $x_{4,5}$ képsíktengelyt úgy kell felvenni, hogy n_4-gyel párhuzamos legyen. (A megoldások száma végtelen.)

A pontokat – az első képek elhagyásával – a szokásos módon transzformálhatjuk. A speciális helyzet miatt, a sík ötödik képén *a sík minden objektuma valódi méretében látszik*. (Így például egy háromszögről az ötödik képe segítségével megállapítható, hogy mekkorák az oldalai, szögei, stb.)

5.2.3. A céltranszformáció leggyakoribb alkalmazási lehetőségei

Adott hosszúságú szakasz felmérése egy egyenesre

Adott egy e egyenes két képével, továbbá az egyenesen egy E pont. Vegyünk fel az egyenesen olyan F pontot, amely az E-től 2 cm távolságra van! (5.15. ábra)



5.15. ábra. Távolság felmérése szakaszra

A szerkesztés lépései

Kezdésként adjuk meg az e egyenes képeit.

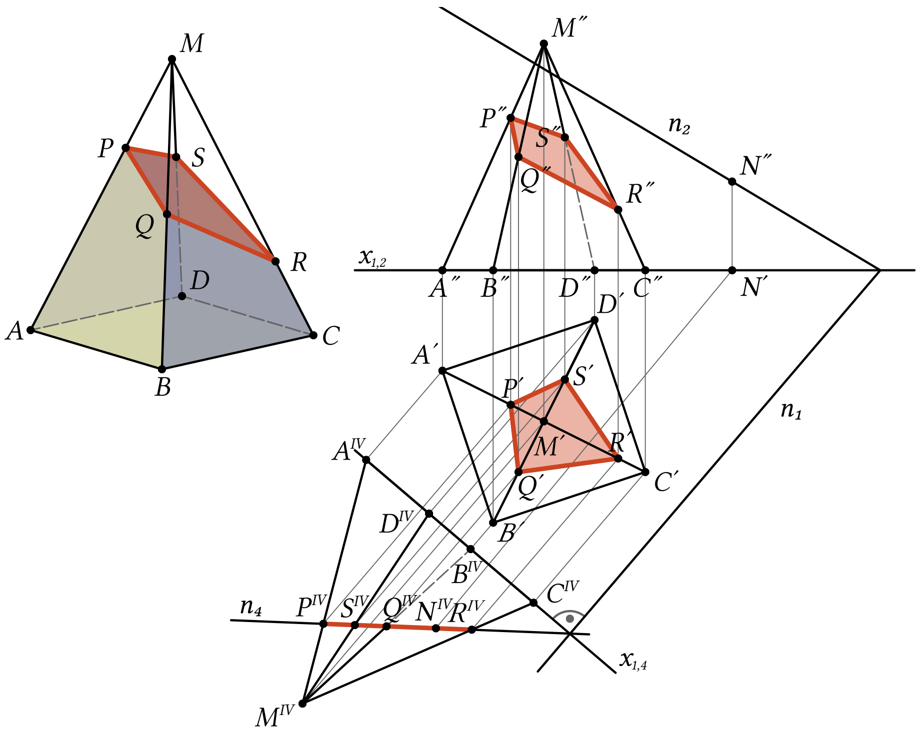
1. Ha az e-re adott hosszúságot szeretnénk felmérni, valódi nagyságában kell látnunk. Ehhez céltranszformációra van szükség, mégpedig egy új, az egyenessel párhuzamos $\mathcal{K}_4$ képsíkra. (Lásd az 5.2.1. fejezetet.)
2. Az előző pont miatt, az $x_{1,4}$ párhuzamos e'-vel. Az egyenest pedig két pontjával transzformálhatjuk (az E-vel és az S segédponttal).
3. A IV. képen az egyenest valódi nagyságban látjuk, ezért itt felmérhető E-től a 2 cm-es távolság. Két megoldást kapunk: az F_1 és az F_2 pontokat, pontosabban azok IV. képeit.
4. Az F_1^{IV} és F_2^{IV} képekből az $x_{1,4}$-re merőleges rendezőket húzunk. Ezek az e'-ből kimetszik a két pont első képeit: F_1' és F_2'.
5. Szintén rendezők segítségével kaphatóak meg a hiányzó második képek: F_1'' és F_2''.

Test metszése síkkal

Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló, négyzet alapú egyenes gúla, valamint egy dőlt sík nyomvonalaival. Szerkesszük meg a gúla síkmetszetét! Ábrázoljuk a gúlatest metsző sík alatti részét láthatóság szerint! (5.16. ábra)

A szerkesztés lépései

Adjunk meg egy gúlát és egy metsző síkot a feladat kiírásának megfelelően. (A gúla alapjának nagysága és a gúla magassága tetszőleges.)
Egy lehetséges és helyes megoldás lenne, ha a síkot a gúla minden oldalélével elmetszenénk. Ez azonban igen időigényes már négy oldalél esetén is. A cél az, hogy a metsző síkot „élben”, azaz vetítő helyzetben lássuk. Ekkor ugyanis a síkmetszet is szakasznak látszik, és a pontjai könnyen megszerkeszthetőek.



5.16. ábra. Gúla síkmetszete

1. A metsző sík IV. vetítősíkká válik, ha az új képsíktengely merőleges az első nyomvonalra: $x_{1,4} \perp n_1$.
2. Transzformáljuk a gúlát és a síkot is (például az N pont segítségével) a IV. képre.
3. Mivel a metsző sík a IV. képen élben látszik, ezért a síkmetszet ezen a képen azonnal kijelölhető. A gúla oldalélei a síkot a P, Q, R és S pontokban metszik: P^{IV}, Q^{IV}, R^{IV} és S^{IV}.
4. Rendezőegyenesek segítségével határozzuk meg az első, majd a második képeket is: P', Q', R', S', illetve P'', Q'', R'', S''.
5. Végül, a 4.3. fejezetnek megfelelően állapítsuk meg az első és a második képen a láthatóságot.

A szerkesztés pontosságát ellenőrizhetjük. Precíz szerkesztés esetén például a P^{IV} távolsága az $x_{1,4}$-től ugyanakkora, mint a P'' távolsága az $x_{1,2}$-től. (Mindkét távolság a P pont $\mathcal{K}_1$-hez viszonyított magasságát mutatja.)

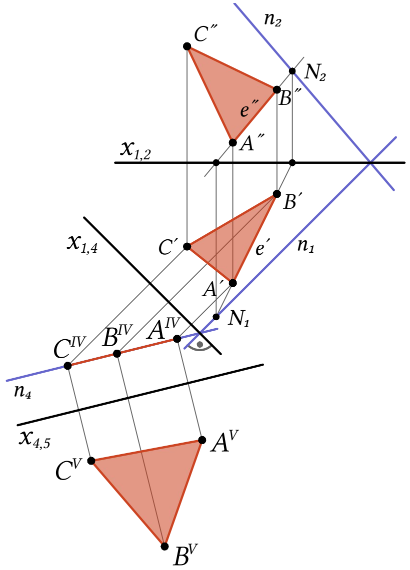
Síkidom szerkesztése adott síkon

Adott egy dőlt sík nyomvonalaival, valamint egy síkbeli $\overline{AB}$ szakasz. Szerkesszünk olyan síkbeli, szabályos háromszöget, melynek egyik oldala az $\overline{AB}$! (5.17. ábra)

A szerkesztés lépései

Induljunk ki a nyomvonalakkal megadott síkból. A feladat első lépésében fel kell venni egy olyan szakaszt, amely benne van az adott síkban.

1. Az $\overline{AB}$ első képe tetszőlegesen felvehető, a második képét pedig a 4.1.2. fejezet szerint szerkeszthetjük meg.
2. Ahhoz, hogy egy sík objektumait valódi nagyságban lássuk, két, egymást követő transzformációra van szükségünk. (Lásd az 5.2.2. fejezetet.)
   (a) Elsőként képsíkra merőleges (vetítő) helyzetbe transzformáljuk a síkot: az $x_{1,4}$ képsíktengely merőleges az n_1-re. Az A^{IV} és B^{IV}



5.17. ábra. Tetszőleges síkbeli szabályos háromszög

pontok az n_4 nyomvonalra illeszkednek (ugyanis a sík IV. vetítősík).

(b) Az V. képsíkot az eredeti síkkal párhuzamosan kell felvenni, azaz $n_4 \parallel x_{4,5}$. Szerkesszük meg az A^V és B^V képeket.

3. Az V. képen az $\overline{AB}$ szakasz valódi nagyságban látszik (mivel a $\mathcal{K}_5$ párhuzamos az adott síkkal). Itt megszerkeszthetjük a szabályos háromszöget. (A két megoldás közül elegendő csak az egyiket megadni.) A háromszög hiányzó C csúcsának V. képe: C^V.

4. A C pont IV. képe az n_4-re illeszkedik, így a C^V-ből húzott rendező kimetszi azt: C^{IV}.

5. A hiányzó C' és C'' képeket az 5.1.1. fejezetben látottaknak megfelelően kapjuk meg.
C' esetén $d(C', x_{1,4}) = d(C^V, x_{4,5})$;
C'' esetén pedig $d(C'', x_{1,2}) = d(C^{IV}, x_{1,4})$.

A szerkesztés pontossága most is ellenőrizhető: vizsgáljuk meg, hogy C valóban síkbeli pont-e (lásd a 4.1.4. fejezetet).

5.2.4. Gyakorló feladatok

1. Adott egy $\overline{AB}$ szakasz két képével. Határozza meg a valódi hosszát!

2. Adott egy szabályos hatszög alapú egyenes hasáb, amely a $\mathcal{K}_1$ képsíkon áll. Metssze el a hasábot egy tetszőleges dőlt síkkal, majd ábrázolja a metsző sík alatti hasábtestet láthatóság szerint!

3. Az $ABC\triangle$ háromszög adott két képével. Határozza meg a háromszög valódi nagyságát! (Segítség: A háromszög síkjának egyik nyomvonalát – vagy azzal párhuzamos egyik fővonalát – kell első lépésben meghatározni; annak ismeretében már felvehető egy alkalmas új képsík.)

4. Legyen adott egy e egyenes és egy $[n_1, n_2]$ (nyomvonalakkal megadott) sík. Szerkesztendő a sík és az egyenes döféspontja. (Segítség: A síkot vetítő helyzetbe transzformálva, a döféspont az adott képről azonnal leolvasható.)

5. Adott egy sík nyomvonalaival, továbbá egy arra nem illeszkedő pont. Állítson merőleges egyenest a pontból a síkra! (Segítség: Ha a síkot élben látjuk a IV. képen, akkor a síkra merőleges egyenes IV. képe merőleges a sík IV. nyomvonalára.)

A fenti feladatok mindegyikénél céltranszformáció(ka)t alkalmazzon!

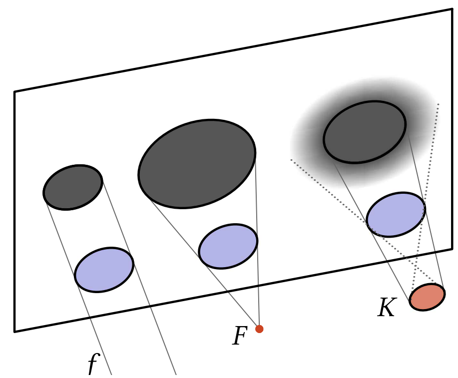
6. fejezet

Árnyékszerkesztés

Az építészeti ábrázolásban egyszerre van jelen a törekvés egyrészt az egzaktságra (hogy az épület „egyértelműen rekonstruálható”, azaz megépíthető legyen), másrészt a valószerűségre, szemléletességre. Az árnyékszerkesztés érdekes módon mindkét előbbi célt szolgálhatja. Az ereszek, erkélyek, nyílászárók árnyékának megjelenítése egyrészt valósághűbbé teszi a képet, másrészt segít a látvány értelmezésében is, mivel az árnyékok mélységi információt rendelnek a kétdimenziós képhez. A tipikus elemek, például az ablakmélyedések árnyékai öntudatlanul is sugallanak egyféle léptéket, ami érzékelhetővé teszi például a síkváltások mélységét.

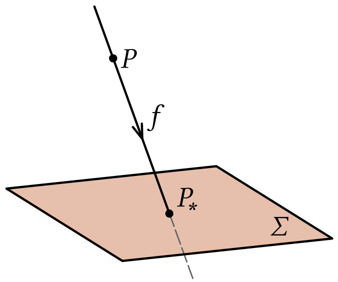
Az árnyékszerkesztés során kritikus kérdés a *fényforrás helyzete* (*távoli* vagy *közeli*) és *látószöge*, vagy *látszólagos mérete* (*pontszerű* vagy *kiterjedt*). E kategóriák közé persze nem lehet egzakt határvonalat húzni, mégis fontosak: nyilván másképp viselkedik, ezért másképp is modellezhető egy csillag (távoli pontszerű), a Nap (távoli kiterjedt), egy neoncső (közeli kiterjedt) vagy egy izzó (közeli pontszerű) fénye. (6.1. ábra)

A gyakorlatban persze össze kell vetni a befektetett munkát, és az elérhető eredményt. Ezért van, hogy az épületeket napfényben ábrázoljuk (ami elég egyértelmű döntés), és hogy a Napból érkező fénysugarakat párhuzamosaknak tekintjük – ami csak „távoli pontszerű” fényforrás esetén lenne igaz. A „napkorong” kifejezés önmagában is egyértelművé teszi, hogy a Napra ez a feltétel nem teljesül (a korong két széle nyilván eltérő szögben látszik) – ám egy kiterjedt fényforrás árnyékának szerkesztése (és a teljesen megvilágított és árnyékos területek közti átmenet ábrázolása) több bonyodalmat okozna, mint amennyit a kép valósághűségéhez hozzáadna. Árnyékszerkesztéskor tehát a fényforrást egy egyenessel mint iránnyal adjuk meg – a fénysugarakat az adott iránnyal párhuzamosaknak feltételezve *az árnyékszerkesztést párhuzamos vetítésnek tekintjük.* (Lásd a 2. fejezetet.)



6.1. ábra. Távoli pontszerű, közeli pontszerű, és kiterjedt fényforrások árnyéka (A fekete kör a teljes árnyék határát jelzi.)

Tekintsünk egy objektumot, a fénysugarak irányát (az ún. *fénysugár-irányt*, röviden *fényirányt*), illetve további alakzatokat, amelyekre az árnyék vetül. Egy objektum **vetett árnyék**át megkapjuk, ha az objektum pontjaira fénysugarakat illesztünk, majd megszerkesztjük a fénysugarak és az ún. *árnyékfelfogó alakzatok* közös pontjait.



6.2. ábra. Pont árnyéka

Legegyszerűbb esetben az objektum egyetlen pont, az árnyéka pedig egy síkra (például a talajra) vetül (6.2. ábra).

6.1. Egyszerű alakzatok árnyéka

Ebben a fejezetben az alakzatok csak a képsíkokra vetnek árnyékot, egyéb árnyékfelfogó felület vagy test nem szerepel a szerkesztésekben. Összetettebb példát a 6.2. fejezetben mutatunk be.

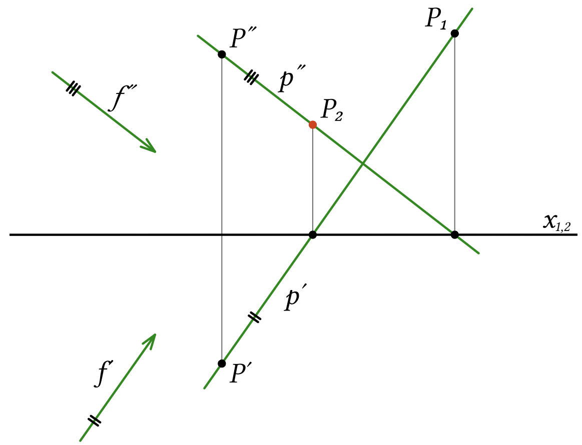
6.1.1. Pont árnyéka

Minden árnyékszerkesztési feladat visszavezethető pontok árnyékaira, ezért érdemes ezzel a legalapvetőbb esettel kezdeni. Egy pont árnyéka szintén egyetlen pont. Ez az árnyék a képsíkok valamelyikére esik, ha nincs egyéb alakzat, amelyet a ponton áthaladó fénysugár „hamarabb” elérne.

Megjegyzés: Monge-projekcióban a képsíkokat nem tekintjük átlátszónak, ezért egy I. térnegyedbeli pont árnyéka a $\mathcal{K}_1$ vagy a $\mathcal{K}_2$ képsík pozitív részében van.

Pont árnyéka

Adott egy P pont és a fénysugarak iránya (képeikkel). Szerkesztendő a P pont képsíkokra eső árnyéka. (6.3. ábra)



6.3. ábra. Pont képsíkra vetett árnyéka

A szerkesztés lépései

1. Húzzunk párhuzamost a fénysugarak irányával a P ponton keresztül; jelöljük ezt az egyenest p-vel.

2. A P pont első képsíkra eső árnyéka nem más, mint a p egyenes első nyompontja: P_1. Hasonlóan, a P pont második képsíkra eső árnyéka a p egyenes második nyompontja: P_2. (Lásd a 3.2.1. fejezetet.)

3. A két lehetséges árnyék (P_1 és P_2) közül azt tekintjük a pont árnyékának, amely az I. térnegyedben – pontosabban valamelyik képsík pozitív részén – van. A P_1 pont a $\mathcal{K}_1$ képsík negatív, míg a P_2 pont a $\mathcal{K}_2$ képsík pozitív részén van. Ezért a P pont árnyéka ebben az esetben a P_2 pont.

6.1.2. Egyenes árnyéka

Bármilyen egyenesre teljesül, hogy az árnyéka az egyenes nyompontjából indul ki. (Más szavakkal: a nyompont egyik árnyéka önmaga.) – Ez egy természetes észrevétel, a mindennapi életben is tapasztalható. Ha például az asztalunkat egy tollal vagy egy pálcikával megérintjük, és megnézzük annak árnyékát, akkor az árnyék az érintési pontból indul ki.

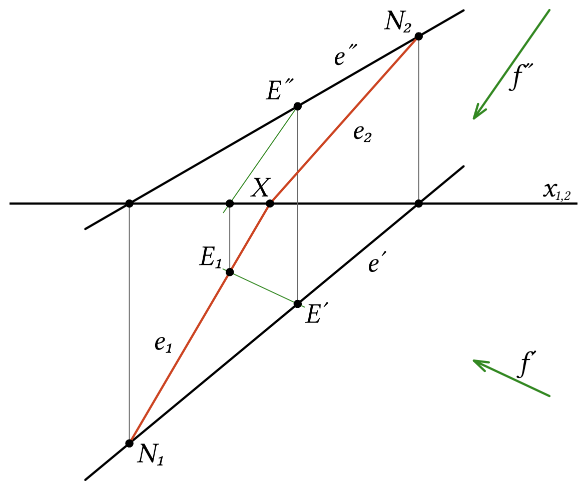
Egyenes árnyéka

Adott egy e egyenes és egy f irány képeikkel. Szerkesztendő az e egyenes képsíkokra vetett árnyéka, ha f a fénysugarak iránya. (6.4. ábra)

A szerkesztés lépései

Legyen e olyan általános helyzetű egyenes, amelynek mindkét nyompontja az I. térnegyedben van. Az árnyéka „nyomponttól nyompontig” tart, és megtörik az $x_{1,2}$ tengelyen. (Valójában csak az N_1N_2 szakasz árnyékát kell megszerkeszteni.)

1. Kiindulásként határozzuk meg az egyenes nyompontjait (N_1 és N_2), hiszen az árnyék tartalmazza ezeket a pontokat.



6.4. ábra. Egyenes képsíkokra vetett árnyéka

2. Szerkesszük meg az egyenes egy tetszőleges E pontjának (egyik) árnyékát az előző fejezet útmutatását követve: E_1.

3. Az árnyék biztosan az N_1-ből indul, és tartalmazza az E_1 pontot mint árnyékot is. Ez a félegyenes az egyenes első képsíkra eső árnyéka.

4. Az első képsíkra vetülő árnyék az X-ben metszi az $x_{1,2}$ tengelyt. Ez a töréspont mindkét képsíkra eső árnyékban benne van, ezért innen indul ki a $\mathcal{K}_2$-re eső árnyék.

5. Az egyenes második képsíkra eső árnyéka az N_2 nyompontban ér véget, így az árnyék az XN_2 szakasz.

6. Az egyenes képsíkokra vetett árnyéka az $N_1X - XN_2$ töröttvonal.

Fontos megjegyzés: Ha a nyompont nem állna rendelkezésre (kívül esik a szerkesztés határain vagy az egyenes speciális helyzetű), akkor az egyenes árnyékát *két pontjával* mindig megszerkeszthetjük. A két pont képsíkokra vetett árnyékai egy-egy egyenest határoznak meg, amelyek az $x_{1,2}$ tengelyen – a töréspontban – találkoznak.

6.1.3. Síkidom árnyéka

Teljes síkok helyett inkább síkidomok árnyékait érdemes vizsgálni, ugyanis egy sík árnyéka lefedné a képsíkok nagy részét, így gyakorlati jelentősége nincs.

Egy síkidomot (illetve később bonyolultabb felületeket/testeket) tekintve észrevehetjük, hogy annak egyik része fényes, míg a másik része a helyzetéből adódóan nem kap fényt. Ez utóbbit **önárnyékos rész**nek nevezzük.
Egy dőlt síkban lévő sokszög esetén mindkét képen a síkidom fényes (vagy éppen önárnyékos) részét látjuk. Feszített síkbeli sokszög esetében viszont az egyik képen a fényes, a másik képen az önárnyékos felét látjuk. (Ennek oka, hogy feszített sík esetén a sík különböző oldalait látjuk a két képen, lásd a 3.3.1. fejezetet.)

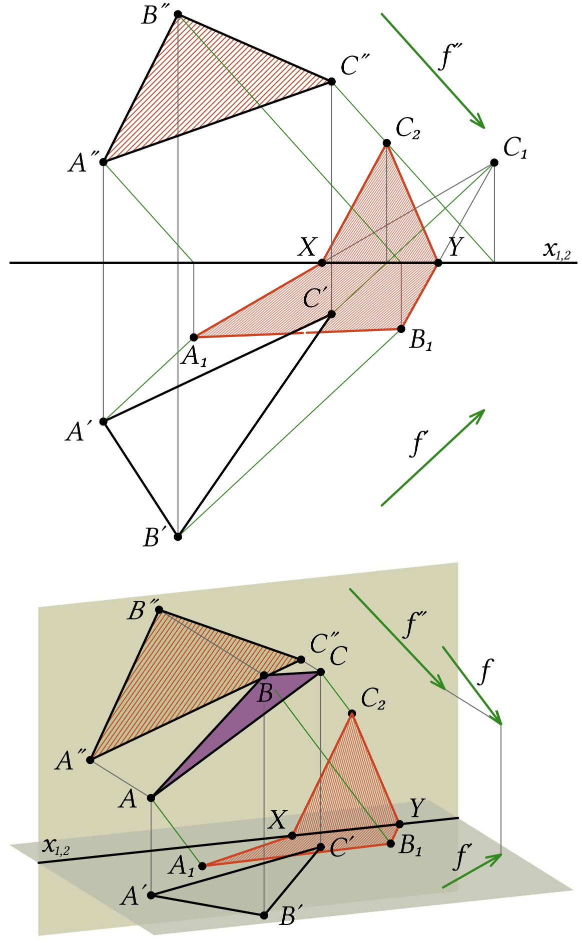
Háromszög árnyéka

Adott egy feszített síkban fekvő ABC háromszög és egy f irány. Szerkesszük meg a háromszög képsíkokra eső árnyékát, ha a fénysugarak iránya az f irány! Jelöljük a háromszög önárnyékos részét is! (6.5. ábra)

A szerkesztés lépései

A teljes szerkesztés visszavezethető pontok és egyenesek árnyékára, az önárnyékos rész megkeresése azonban érdekes feladat.

1. Szerkesszük meg az A, B és C pontok első képsíkra eső árnyékait. Mivel a C_1 árnyék nem az I. térnegyedben van, ezért a C_2 árnyékra is szükség van.



6.5. ábra. Háromszög képsíkokra vetett árnyéka

2. Az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ szakaszok árnyékainak töréspontjait meghatározzák az A_1C_1 és B_1C_1 árnyékok $x_{1,2}$-vel közös pontjai: X és Y.

3. A háromszög árnyékát a $A_1X - XC_2 - C_2Y - YB_1 - B_1A_1$ zárt törött-vonal adja.
4. *Önárnyékos rész meghatározása:* (6.5. ábra) Figyeljük meg a háromszög képeinek és árnyékainak körüljárási irányát! Az első kép és az első képsíkra eső árnyék körüljárási iránya azonos, ami azt jelenti, hogy az első képen a háromszög megvilágított oldalát látjuk – azaz a háromszög önárnyékos oldala a második képen látható. (Ha megszerkesztenénk a második képsíkra eső teljes árnyékot, akkor azt látnánk, hogy a második kép és a második képsíkra eső árnyék körüljárási iránya ellentétes.)

6.1.4. Gyakorló feladatok

1. Legyen e olyan általános helyzetű egyenes, amelynek nyompontjai nem szerkeszthetők meg. (A rajzolás tartományán – például a papírlapon – kívül esnek.) Szerkessze meg – tetszőleges fényirányt véve – az egyenes árnyékát két pontja segítségével!

2. Legyen v első vetítőegyenes. Szerkessze meg – tetszőleges fényirányt véve – az árnyékát! Mit tapasztal?
(Megoldás: Egy vetítőegyenes első képsíkra eső árnyéka a fénysugarak irányának első képével párhuzamos.)

3. Legyen h első fővonal. Szerkessze meg – tetszőleges fényirányt véve – az árnyékát! Mit tapasztal? (Megoldás: Egy első fővonal első képsíkra vetett árnyéka önmagával párhuzamos.)

4. Adott egy dőlt síkban fekvő paralelogramma. Szerkessze meg – tetszőleges fényirányt véve – az árnyékát! Mit tapasztal? (Megoldás: A paralelogramma vetett árnyékai szintén paralelogrammák.)

6.2. Egy összetett árnyékszerkesztési feladat

Természetesen felmerülő kérdés: hogyan szerkeszthető meg egy bonyolultabb test árnyéka? Mi történik akkor, ha nem csak a képsíkokra vetül árnyék? Ezekre a kérdésekre ad választ a következő feladat, amelyben egy épület árnyékát kell megszerkeszteni. Ebben a példában az épület egyes részei magára az épületre is árnyékot vetnek, ezt gyakran **rávetett árnyék**nak nevezzük, és általában $*$ szimbólummal jelöljük. *A rávetett árnyék szerkesztése mindig visszavezethető egyenes (fénysugár) és felület/sík (itt falak és tető) döféspontjának megszerkesztésére.*

Épület árnyéka

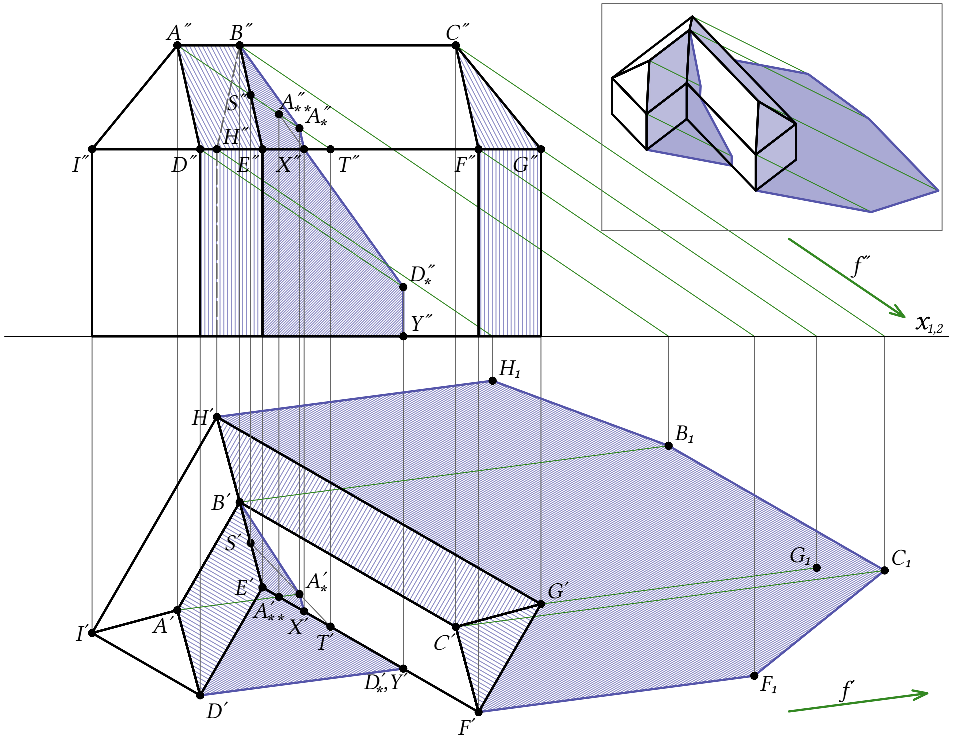
Szerkesszük meg az ábrán látható épület összes árnyékát a megadott f fénysugár-irány mellett! (A $\mathcal{K}_2$ képsíkot átlátszónak tekintjük.) (6.6. ábra)

Az épületnek a $\mathcal{K}_1$ képsíkra eső árnyékát – a gyakorlatban előforduló szóhasználatot követve – *talajra vetett árnyék*ként említjük.

A szerkesztés lépései

Nevezzük el az épület jellemző pontjait: A, ..., I.

1. A szerkesztést a talajra vetett árnyékkal érdemes kezdeni.
   (a) Szerkesszük meg a B,C,F,G,H pontok árnyékait: B_1,C_1,F_1,G_1,H_1.
   (b) Vegyük észre, hogy a $\overline{BC}$ szakasz párhuzamos a $\mathcal{K}_1$ képsíkkal (a talajjal), ezért $\overline{B_1C_1}$ párhuzamos és egybevágó $\overline{BC}$-vel. (Az ok: a fénysugarak közös iránya egy párhuzamos vetítést határoz meg.)
   (c) Az árnyék mindig a nyompontból indul ki, ezért az F-ből és H-ból induló függőleges élek árnyékai a nyomponttól F_1-ig, illetve H_1-ig tartanak.
   Röviden: Az F-ből és H-ból induló *függőleges élek (mint első vetítősugarak) vetett árnyékai f'-vel párhuzamosak.*



6.6. ábra. Épület árnyéka

(d) Ugyanezt az ötletet alkalmazhatjuk a D-ből induló függőleges élre is. Ott az árnyék az épület falánál, az Y-ban törik meg. (Később további pontokat szerkesztünk ebből az árnyékból.)

(e) Az A és D pontok árnyéka láthatóan nem a talajra kerül. Az I ponthoz tartozó fénysugár az épületen haladna keresztül, így ott biztosan fényes az épület.

2. A talajra vetett árnyékból már következtethetünk az önárnyékos részekre, a térszemléletünket követve. Segítség továbbá az is, hogy ott látunk önárnyékos részt, ahol a kép és a vetett árnyék körüljárási iránya ellentétes (lásd a 6.1.3. fejezetet). Ezek alapján egyértelműen önárnyékos lapok:

   - a tetőn lévő $ABED$ lap mindkét képen,
   - a DE élhez tartozó függőleges fal a II. képen,
   - az FG-hez tartozó függőleges fal a II. képen,
   - a tető CGF lapja mindkét képen (itt $C'F'G'$ és $C_1F_1G_1$ körüljárási irányok ellentétesek),
   - a tető $BCGH$ lapja az I. képen (a körüljárási irányok alapján).

   Önárnyékos, de nem látható rész a GH élhez tartozó hátsó fal.

3. Végül a falra és a tetőre vetett árnyékokat szerkesztjük meg. Tekintsük először a falra vetett árnyékot. Az AD él ide (is) veti az árnyékát.

   (a) Rajzoljuk meg a D-n áthaladó fénysugarat.

   (b) A D pont vetett árnyékát döféspontként szerkeszthetjük meg. Azonban itt ez nagyon egyszerű, hiszen a fal függőleges, így a D_* rávetett árnyék első képét azonnal kijelölhetjük: D'_*.

   (c) A D''_* illeszkedik a D''-ből induló fénysugár második képére, ezért a D'_*-ból húzott rendező kimetszi azt.

   (d) A D-ből induló függőleges él árnyéka az Y (törés)pontig a talajon haladt, ezután Y-tól a D_*-ig tart. Ezzel megszerkesztettük az él teljes árnyékát.
   Fontos észrevétel, hogy az $\overline{YD_*}$ szakasz függőleges maradt. Ezt a jelenséget a mindennapi életben is tapasztalhatjuk: *függőleges egyenes függőleges falra vetett árnyéka szintén függőleges.*

   (e) A D_* mintájára szerkesszük meg az A pont falra vetett árnyékát, és jelöljük A_{**}-gal. A szerkesztés akkor is megvalósítható, ha az A_{**} nem esik a falra, de a fal teljes függőleges síkjában benne van.

(f) Az AD tetőél falra vetett árnyéka az $\overline{A_{**}D_*}$ szakasz. Ez a szakasz a fal EF élét az X pontban metszi. Az X'' leolvasható a II. képről, innen rendezővel kapjuk az X' első képet.

(g) A falra vetett árnyék az $YD_* - D_*X$ töröttvonal.

4. A tetőre vetett árnyékkal fejezzük be a szerkesztést. Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy az A pont a tetőre veti az árnyékát.

(a) Szerkesszük meg az A-n keresztül vett fénysugár és az $BCFE$ lap döféspontját: A_*. (A szerkesztés technikáját lásd a 4.2.1. fejezetben.)

(b) Az AD tetőél árnyékának hiányzó darabja a tetőre eső $\overline{XA_*}$ szakasz. (Így kaptuk meg az AD él teljes vetett árnyékát: $D_*X - XA_*$.)

(c) Hiányzik még az AB él vetett árnyéka, amely – A_* miatt – szintén a $BCFE$ lapra kerül. Vegyük észre, hogy a B pont az élnek és a lapnak is eleme, ezért az árnyék innen indul ki. Az AB él vetett árnyéka az $\overline{A_*B}$ szakasz.

(d) Ezzel elkészült a teljes tetőre vetett árnyék: $XA_* - A_*B$.

Látható, hogy egy bonyolultabb árnyékszerkesztéshez is pusztán az alapszerkesztéseket használjuk: pont, egyenes vagy sokszög árnyéka, valamint a rávetett árnyékhoz döféspont-szerkesztés.

7. fejezet

Síklapú testek döfése egyenessel és metszése síkkal

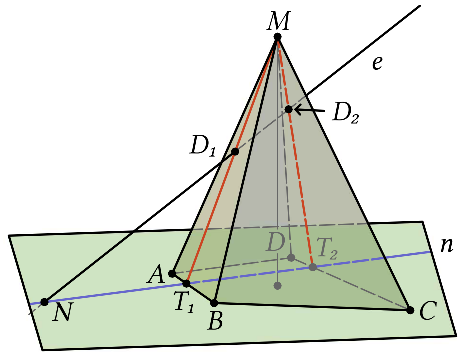
Ebben a fejezetben azt a geometriai problémát vizsgáljuk, hogy hogyan szerkeszthetők meg egy test és egy egyenes/sík közös pontjai. Mindkét feladattípust egy-egy $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló gúla és hasáb példáján mutatjuk be.

7.1. Síklapú test döfése egyenessel

Egy konvex gúla vagy hasáb és egy (alkotótól különböző) egyenes közös pontjainak száma legfeljebb kettő. Már jelenlegi tudásunkkal is megszerkeszthetnénk ezeket a pontokat, megkeresve a test összes oldalának és az egyenesnek a döféspontjait (lásd a 4.2.1. fejezetet). Ám igen hosszadalmas lenne például egy hatoldalú gúla esetében a hat oldallap és az egy alaplap miatt rossz esetben hét döféspont-szerkesztést végrehajtani – amelyek közül legfeljebb kettő adna eredményt. Egy térgeometriai gondolatot felhasználva a feladat megoldása ennél jóval egyszerűbb.

7.1.1. Gúla döfése egyenessel

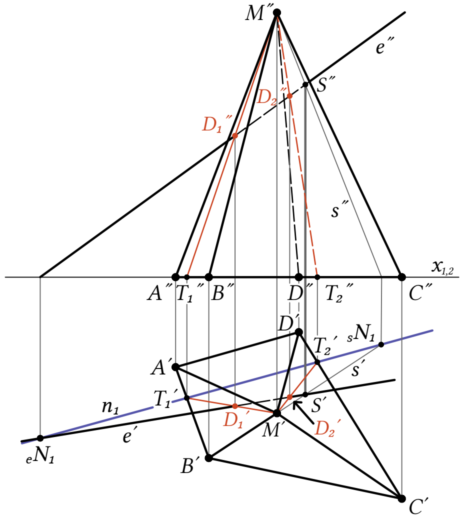
Tekintsünk egy M csúcspontú, $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló gúlát, és egy azt döfő e egyenest. A gúla csúcspontja és az egyenes egyértelműen meghatároz egy síkot, (lásd a 3.3. fejezetet), ami (mivel áthalad M-en) alkotókat metsz ki a gúlából. Ezen alkotók egy síkban vannak az e egyenessel, így azt egy-egy pontban metszik: ezek a keresett döféspontok, hiszen illeszkednek a gúlára és az egyenesre is. (7.1. ábra)



7.1. ábra. Gúla döfése egyenessel (elv)

Gúla döfése egyenessel

Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló, $ABCD$ konvex négyszög alapú, M csúcspontú gúla, és egy azt döfő e egyenes. Szerkesszük meg a gúla és az egyenes közös pontjait! Jelöljük mindkét képen a láthatóságot! (7.2. ábra)



7.2. ábra. Gúla döfése egyenessel

A szerkesztés lépései

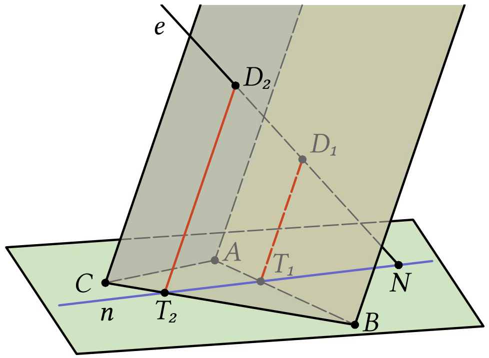
1. Elsőként határozzuk meg az egyenesnek és a gúla csúcspontjának síkját, azaz az $[e, M]$ síkot.
   (a) Ehhez egy s segédegyenest választunk, amely áthalad az M ponton, és az e egyenes egy tetszőleges S pontján: S', S'', majd s', s''.
   (b) Szükségünk lesz az $[e, M]$ sík első nyomvonalára. Ezt meghatározza két síkbeli egyenes első nyompontja, ezért szerkesszük meg e és s egyenesek első nyompontjait: ${}_eN_1$ és ${}_sN_1$.
   (c) A sík első nyomvonala az $\overleftrightarrow{{}_eN_1\,{}_sN_1} = n_1$ egyenes.
2. Az n_1 nyomvonal az $ABCD$ alapnégyszöget T_1 és T_2 pontokban metszi, ezek azon alkotók talppontjai, amelyek benne vannak az $[e, M]$ síkban.
3. Rajzoljuk meg a gúla MT_1 és MT_2 alkotóit mindkét képen.
4. Az egyenes a gúlát ebben a két alkotóban metszi, így ezek metszéspontjai az e egyenessel megadják a keresett döféspontokat: D_1 és D_2.
5. A szerkesztés pontosságát ellenőrizhetjük is, hiszen nyilván egy rendezőre kell esnie a döféspontok két képének (D_1' és D_1'', illetve D_2' és D_2'').
6. Végül, a korábban tanultaknak megfelelően (lásd a 4.3. fejezetet), húzzuk ki láthatóság szerint mindkét képet.

7.1.2. Hasáb döfése egyenessel

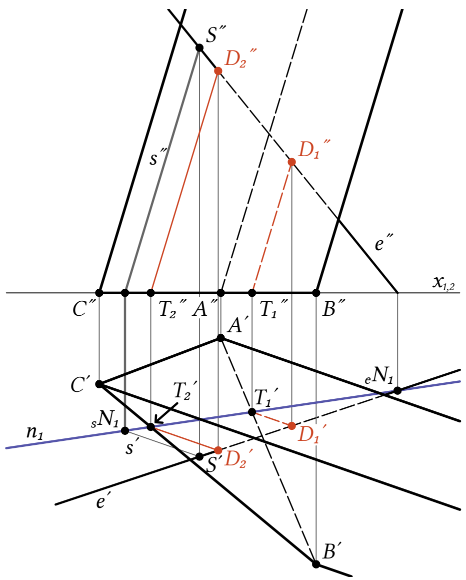
Legyen adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló, ferde hasáb, és egy azt döfő e egyenes. Az előző fejezetben olvasható megoldáshoz hasonlót szeretnénk a hasáb esetén is alkalmazni: keressük azokat a hasábalkotókat, amelyeket az adott egyenes elmetsz. Így a hasáb és az egyenes döféspontjainak keresése helyett csupán egyenesek (az alkotók és e egyenes) metszéspontjait kell meghatározni. A megoldás kulcsa tehát annak a síknak a megtalálása, amely tartalmazza az e egyenest, és párhuzamos a hasáb alkotóival – ez a sík metszi ki a hasábból a keresett alkotókat. (7.3. ábra)

Hasáb döfése egyenessel

Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló, ABC háromszög alapú, ferde hasáb, és egy azt döfő e egyenes. (A hasáb fedőlap nélküli, így alkotói félegyenesek.) Szerkesszük meg a hasáb és az egyenes közös pontjait, majd jelöljük mindkét képen a láthatóságot! (7.4. ábra)



7.3. ábra. Hasáb döfése egyenessel (elv)



7.4. ábra. Hasáb döfése egyenessel

A szerkesztés lépései

1. A korábban leírt elvet követve, adjuk meg az e egyenest tartalmazó, a hasáb alkotóival párhuzamos síkot. (Elegendő az n_1 első nyomvonalát megszerkeszteni.)

   (a) Egy sík akkor párhuzamos egy egyenessel (itt alkotóval), ha tartalmaz az adott egyenessel párhuzamos egyenest. Válasszunk ki az e egyenesen egy tetszőleges S segédpontot, és húzzunk azon át egy, az alkotókkal párhuzamos s egyenest. (Az s képei párhuzamosak az alkotók megfelelő képeivel.)

   (b) Az $[e, s]$ sík párhuzamos az alkotókkal. Ezen sík első nyomvonalát az e és az s első nyompontjai meghatározzák. Szerkesszük meg az ${}_eN_1$ és ${}_sN_1$ nyompontokat.

   (c) A szükséges sík első nyomvonala az $\overleftrightarrow{{}_eN_1\,{}_sN_1} = n_1$ egyenes.

2. A hasáb alaplapját, azaz az $ABC\triangle$ háromszöget az n_1 nyomvonal a T_1 és T_2 pontokban metszi. (Szerkesszük meg a pontok mindkét képét.)

3. A T_1 és T_2 pontok a keresett alkotók talppontjai. Rajzoljuk be ezt a két alkotót mindkét képen.

4. A két alkotó egy-egy pontban metszi el az e egyenest. Ez a két metszéspont – D_1 és D_2 – a két keresett döféspont. (Mindkét képen jelöljük ki a döféspontok első és második képeit.)

5. A szerkesztés pontosságát – a gúlánál látottakkal analóg módon – ellenőrizhetjük: a metszéspontok két-két képe egy rendezőre kell essen.

6. Jelöljük mindkét képen a láthatóságot is.

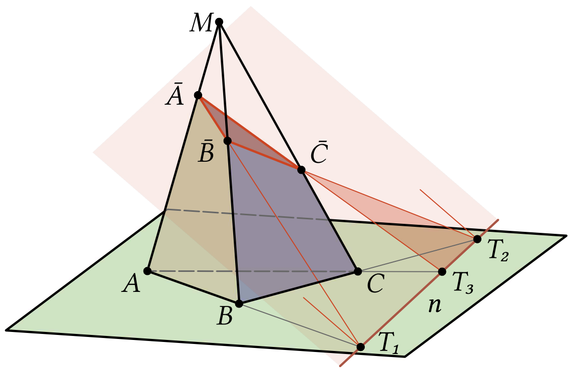
Megjegyzés: A szerkesztés elve természetesen akkor is alkalmazható, ha a hasáb nem végtelen hosszúságú alkotókat tartalmaz, hanem fedőlapja is van.

7.2. Síklapú test metszése síkkal

Síklapú test síkmetszetére láttunk már korábban példát az 5.2.3. fejezetben, ahol képsíktranszformáció segítségével oldottunk meg a feladatot. Ebben a fejezetben térgeometriai gondolatmenet segítségével szeretnénk megszerkeszteni a végeredményt. Az egyszerűség kedvéért továbbra is $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló gúlát és hasábot vizsgálunk.

7.2.1. Gúla síkmetszete

Adott egy, az első képsíkon álló gúla (például ABC alaplappal és M csúcsponttal) és egy azt metsző sík (nyomvonala: n). Tegyük fel, hogy már megszerkesztettük a síkmetszetet: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. (7.5. ábra)



7.5. ábra. Gúla síkmetszete (elv)

Az ABM oldallap és a metsző sík metszésvonala az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ pontok által meghatározott egyenes, hiszen mindkét metszéspont benne van mindkét síkban. Ezen egyenes nyompontja az n-en lévő T_1 pont. Hasonló módon megkereshetők a többi oldallapon lévő metszésvonalak n-en lévő nyompontjai is.

Mindez azt jelenti, hogy az alaplapon (A, B, C) és a síkmetszeten $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ lévő pontok között geometriai összefüggés van, nevezetesen: **a gúla alapja és a síkmetszet centrális kollineációval egymásnak megfeleltethető, ahol a kollineáció centruma a gúla M csúcspontja, a tengelye pedig az alap és a metsző sík n metszésvonala**. (Lásd a 2.2.2. fejezetet.) Egy megfelelő pontpár például az $(A, \overline{A})$ pár, a T_1 pedig tengelyen lévő fixpontnak tekinthető. *Ez az összefüggés megmarad akkor is, ha a gúla és a metsző sík vetületeit vizsgáljuk.* (Az ok: a párhuzamos vetítés nem változtatja meg az egyes térelemek illeszkedését és metszését.)

Ezt az észrevételt kihasználva a gúla síkmetszetét egy egyszerű centrális kollineációs feladatra vezethetjük vissza. A centrális kollineációt egyértelműen meghatározza centruma, tengelye és egy megfelelő pontpár – a centrum és a tengely már adott, a pontpárt pedig egyetlen döféspont-szerkesztéssel megkapjuk.

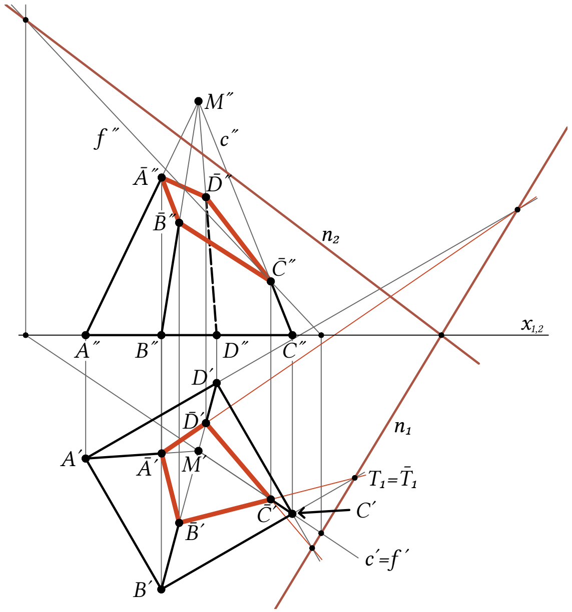
Gúla síkmetszete

Adott egy, az első képsíkon álló, négyzet alapú egyenes gúla (mint tömör test), továbbá egy nyomvonalaival adott dőlt sík. Szerkesszük meg a gúla síkmetszetét! Jelöljük a láthatóságot! (7.6. ábra)

A szerkesztés lépései

Az előbbi leírt geometriai ötletet felhasználva, a szerkesztés során centrális kollineációt alkalmazunk, amelynek tengelye az n_1 nyomvonal, centruma a gúla csúcspontjának M' első képe. Szükség van még egy megfelelő pontpárra.

1. Válasszunk ki egy tetszőleges alkotót, például az $\overline{MC}$-t. Szerkesszük meg a metsző sík döféspontját az $\overleftrightarrow{MC}$ egyenessel. Így megkapjuk a $\overline{C}$ metszéspontot. (Lásd a 4.2.1. fejezetet.)



7.6. ábra. Gúla síkmetszete

2. Az $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ és $\overline{D}'$ pontokat centrális kollineáció segítségével szerkeszthetjük meg, a $(C', \overline{C}')$ pontpárt, továbbá centrális kollineáció tengelyének fixpontjait is felhasználva.

3. Rendezők segítségével, a megfelelő alkotókra illeszkednek a síkmetszet pontjainak második képei: $\overline{A}''$, $\overline{B}''$, $\overline{D}''$

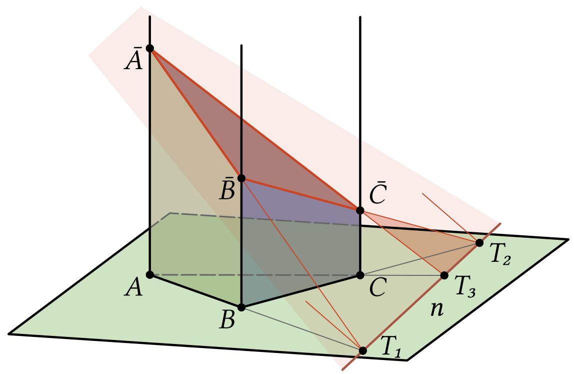
4. A láthatóság ábrázolásánál a gúla metsző sík feletti részét távolítsuk el.

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy ez a szerkesztés igazán hasznos, ha a gúlának sok oldallapja van. Ilyen esetben – képsíktranszformáció helyett – kényelmesebb mindössze egy döféspontot megszerkeszteni, és a többi metszéspontot centrális kollineáció segítségével meghatározni.

7.2.2. Hasáb síkmetszete

Hasábok síkmetszeteinél a gúla síkmetszeténél tárgyaltakhoz hasonló észrevételeket tehetünk, azonban van egy lényeges különbség: centrális kollineáció helyett tengelyes affinitást alkalmazhatunk.

Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló végtelen hasáb (alaplapja: ABC) és egy tetszőleges sík (nyomvonala: n). Tegyük fel, hogy már megszerkesztettük a síkmetszetet: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$. (7.7. ábra)



7.7. ábra. Hasáb síkmetszete (elv)

Az AB élhez tartozó oldallap és a metsző sík metszésvonala az $\overline{A}$ és $\overline{B}$ pontok egyenese – ennek nyompontja az n-en fekvő T_1 pont. Hasonló módon megkereshetők a többi oldallapon lévő metszésvonalak n-en fekvő nyompontjai is.
Ez azt jelenti, hogy az alaplap (A, B, C) és a síkmetszet $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ között geometriai összefüggés van: **a hasáb alapja és a síkmetszet tengelyes affinitással egymásnak megfeleltethető, ahol az affinitás tengelye az alap és a metsző**

sík n metszésvonala, iránya pedig a hasábalkotók közös iránya. (Lásd a 2.2.1. fejezetet.) Az affinitásban például az A pont képe az $\overline{A}$, továbbá a T_1 egy tengelyen lévő fixpont. *Ez az összefüggés akkor is igaz, ha a hasáb és a metsző sík vetületeit vizsgáljuk.* (Az ok: a párhuzamos vetítés nem változtatja meg a térelemek illeszkedését és metszését.)

Az előzőek alapján, a hasáb síkmetszetét tengelyes affinitásra vezetjük vissza. A tengelyes affinitást egyértelműen meghatározza tengelye és egy megfelelő pontpár, amely az irányt is megadja – a tengely és az irány ismert, a szükséges pontpárt döféspont-szerkesztéssel kaphatjuk meg.

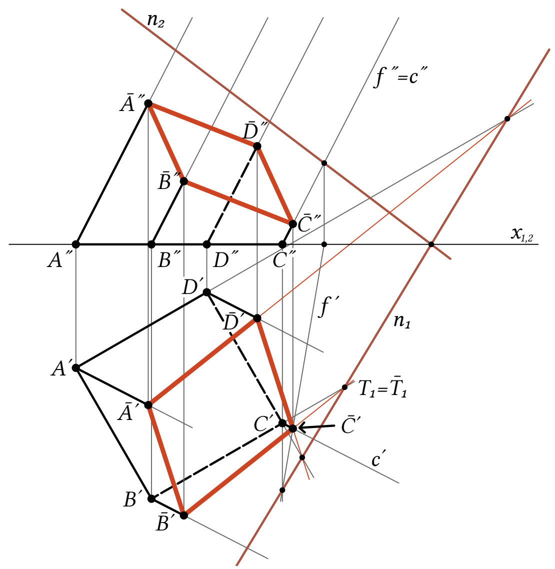
Hasáb síkmetszete

Adott egy, az első képsíkon álló, négyzet alapú ferde hasáb, amelynek alkotói félegyenesek, valamint adott egy dőlt sík, nyomvonalaival. Szerkesztendő a hasáb síkmetszete. A metsző sík feletti rész eltávolítása után jelöljük a megmaradt hasábtest láthatóságát! (7.8. ábra)

A szerkesztés lépései

A bemutatott módszert felhasználva feladatunk a síkmetszet egyetlen pontjának megtalálása. A hiányzó pontokat tengelyes affinitással szerkesztjük meg.

1. Tekintsünk egy tetszőleges alkotót, például a C-ből kiindulót. Szerkesszük meg az alkotó és a sík döféspontját: $\overline{C}$. (Lásd a 4.2.1. fejezetet.)
2. A keresett $\overline{A}'$, $\overline{B}'$ és $\overline{D}'$ pontokat azzal a tengelyes affinitással határozzuk meg, amelynek tengelye az n_1 nyomvonal, egy megfelelő pontpárja pedig a $(C', \overline{C}')$ pár.
3. Rendezők segítségével, a megfelelő alkotókra illeszkednek a síkmetszet pontjainak második képei: $\overline{A}''$, $\overline{B}''$, $\overline{D}''$.
4. Végül ábrázoljuk a csonkolt hasábot láthatóság szerint.



7.8. ábra. Hasáb síkmetszete

Megjegyzés: A bemutatott módszer akkor is alkalmazható, ha a hasáb nem végtelen, hanem fedőlapja is van.

7.2.3. Gyakorló feladatok

1. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló egyenes gúla, amelynek alaplapja tetszőleges sokszög. Ábrázoljon egy tetszőleges első fővonalat, majd szerkessze meg a fővonal és a gúla közös pontjait!
2. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló ferde gúla, amelynek alaplapja tetszőleges sokszög. Ábrázoljon egy tetszőleges második vetítőegyenest, majd szerkessze meg a vetítőegyenes és a gúla közös pontjait!

3. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló ferde hasáb, amelynek alaplapja tetszőleges sokszög. Ábrázoljon egy tetszőleges első fővonalat, majd szerkessze meg a fővonal és a hasáb közös pontjait!

4. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló egyenes hasáb, amelynek alaplapja tetszőleges sokszög. Ábrázoljon egy tetszőleges második vetítőegyenest, majd szerkessze meg az egyenes és a hasáb közös pontjait!

5. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló ferde gúla, amelynek alaplapja tetszőleges, legalább négyoldalú sokszög, továbbá egy dőlt sík nyomvonalaival. Szerkesztendő a gúla síkmetszete az adott síkkal.

6. Adott egy, a $\mathcal{K}_1$ képsíkon álló ferde hasáb, amelynek alaplapja tetszőleges, legalább négyoldalú sokszög, továbbá egy dőlt sík nyomvonalaival. Szerkesztendő a hasáb síkmetszete az adott síkkal.

8. fejezet

Metrikus feladatok Monge-projekcióban

Azokat a szerkesztési problémákat, amelyek távolságokkal és szögekkel kapcsolatosak (például két pont távolsága, merőlegesség vagy akár egy szabályos háromszög szerkesztése) *metrikus feladatok*nak is nevezzük.

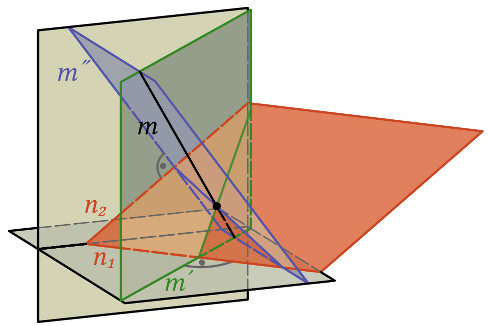
A korábbi fejezetekben megismerkedtünk azokkal a feladatokkal, amelyek illeszkedéssel és metszéssel kapcsolatosak. Azonban a metrikus problémák megoldására csak a céltranszformációt (lásd az 5.2. fejezetet) tudtuk alkalmazni, amely néha igen nehézkes és/vagy korlátozottan alkalmazható. Most megismerkedünk azokkal a szerkesztési módszerekkel is, amelyekkel mindenféle metrikus problémát megoldhatunk.

8.1. Sík és egyenes merőlegessége

Természetes, hogy két egyenes, illetve két sík szögét – néhány igen speciális esetet kivéve – *nem* lehet leolvasni a képeikből. Egy egyenes és egy sík által bezárt szöget sem látjuk a két képről. Más a helyzet azonban, ha egy egyenes és egy sík merőlegességét szeretnénk igazolni. Emlékeztetőül, ha egy geometriai tulajdonságra a vetületi képekből következtetni tudunk, akkor azt *képi feltétel*nek nevezzük.

Sík és egyenes merőlegességének képi feltétele – 1. verzió

Egy m egyenes akkor és csak akkor merőleges egy $[n_1, n_2]$ nyomvonalakkal megadott síkra, ha az egyenes első képe merőleges a sík első nyomvonalára, és az egyenes második képe merőleges a sík második nyomvonalára. (8.1. ábra)
Röviden: $m \perp [n_1, n_2] \iff m' \perp n_1$ és $m'' \perp n_2$

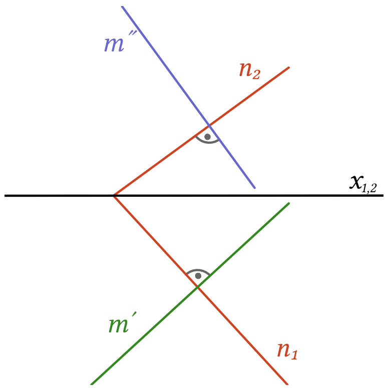


8.1. ábra. Sík és egyenes merőlegessége

A precíz bizonyítást mellőzve, gondoljuk végig a következőket. Tekintsük az m-en áthaladó első vetítősíkot, amelynek nyomvonala éppen az m'. Ha m'-re merőleges n_1, akkor n_1 merőleges az m első vetítősíkjára, így az m egyenesre is. Ugyanígy, ha m második vetítősíkját vizsgáljuk, akkor azt kapjuk, hogy n_2 is merőleges az m egyenesre. Ebből az következik – felhasználva a 1.2.1. fejezetbeli tételt –, hogy az m merőleges az $[n_1, n_2]$ síkra. (A gondolatmenet rejtett módon erősen kihasználja, hogy egy vetítősík merőleges az adott képsíkra.)

Nyomvonalaival adott síkra merőleges egyenes szerkesztése

Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszünk egy egyenest, mely merőleges erre a síkra! (8.2. ábra)



8.2. ábra. Nyomvonalaival adott síkra merőleges egyenes

Megjegyzés: Végtelen sok egyenes létezik, amely egy adott síkra merőleges.

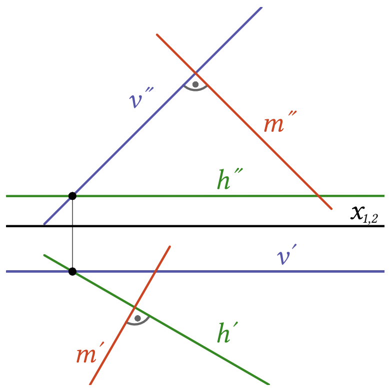
A szerkesztés lépései

A feladat megoldása mindössze a tétel feltételeit alkalmazza. Rajzoljunk két olyan egyenest, amely n_1-re, illetve n_2-re merőleges. Az n_1-re merőleges egyenes az m' első kép, az n_2-re merőleges egyenes pedig a keresett merőleges egyenes m'' második képe.

Felmerülhet a kérdés, hogy mi történik akkor, ha valamilyen ok miatt nem tudjuk megszerkeszteni egy sík nyomvonalait. Ilyenkor felhasználhatók a sík fővonalai, amelyek a nyomvonalakkal párhuzamosak. (Lásd a 4.1.3. fejezetet.)

Sík és egyenes merőlegességének képi feltétele – 2. verzió

Egy m egyenes akkor és csak akkor merőleges a $[h, v]$ fővonalakkal megadott síkra, ha az egyenes első képe merőleges az első fővonal első képére, és az egyenes második képe merőleges a második fővonal második képére. Röviden: $m \perp [h, v] \iff m' \perp h'$ és $m'' \perp v''$



8.3. ábra. Fővonalaival adott síkra merőleges egyenes

Fővonalaival adott síkra merőleges egyenes szerkesztése

Adott egy sík fővonalaival. Szerkesszünk egy egyenest, mely merőleges erre a síkra! (8.3. ábra)

A szerkesztés az előzőek alapján teljesen evidens – de ügyelni kell arra, hogy a két fővonal metsző legyen.

8.2. Egyenes leforgatása

Távolságfeladatoknál alapvető fontosságú, hogy egy szakasz hosszát (két pont távolságát) mérni tudjuk. Erre korábban a céltranszformációt (lásd az 5.2. fejezetet) használtuk, ebben a fejezetben pedig két új módszerrel ismerkedünk meg.

8.2.1. Egyenes leforgatása

Leforgatás alatt az egyenes valamelyik képsíkba (vagy azzal párhuzamos síkba) forgatását értjük. A módszert egy egyszerű feladaton keresztül mutatjuk be. (8.3. ábra)

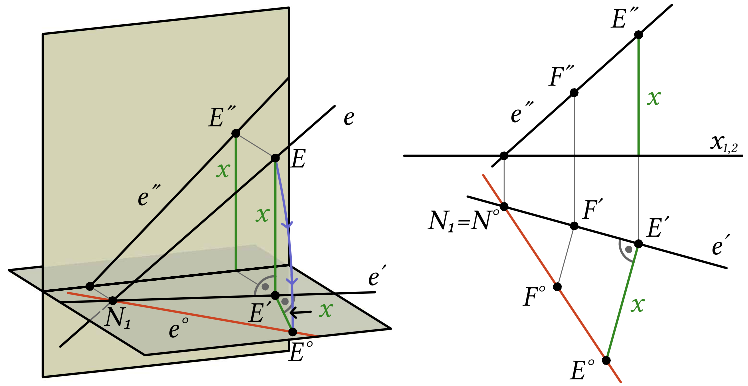
Egyenes képsíkba forgatása

Adott egy e egyenes két képével, és azon egy E pont. Szerkesztendő az egyenes egy olyan pontja, amely az E-től 2 cm távolságra van. (8.4. ábra)

A leforgatott pontokat gyakran $^\circ$ szimbólummal jelöljük.

A szerkesztés lépései – elvi magyarázatokkal kiegészítve

Az e egyenest az e' első képe körül a $\mathcal{K}_1$ képsíkba forgatjuk. Ekkor az első nyompontja fixen marad. Ha az egyenes két pontjának forgatott képét meg tudjuk határozni, akkor az azokat összekötő egyenes éppen az egyenes leforgatott képe.



8.4. ábra. Egyenes képsíkba forgatása

1. Szerkesszük meg az N_1 első nyompontot, amely a forgatás során nem mozdul: $N_1 = N_1^\circ$.
2. A leforgatott egyeneshez szükségünk van egy „tetszőleges” pont forgatott képére. Legyen ez az E pont.
   (a) Az E pont egy E' középpontú, x sugarú körön mozog. A kör síkja merőleges az e' első képre.
   (b) Innen következik, hogy az E pont forgatott képe az E'-ből az e'-re állított merőlegesen van.
   (c) Mérjük el erre a merőlegesre (E'-ből) az x hosszúságot, amely az E pont $\mathcal{K}_1$-től mért távolsága.
   (d) A kapott végpont az E pont E° forgatott képe.
3. Az egyenes leforgatott képe az $\overleftrightarrow{N_1^\circ E^\circ} = e^\circ$ egyenes.
4. A leforgatott egyenesen valódi nagyságban szerkeszthetünk. Itt jelöljük ki az egyik lehetséges megoldást: F° (ahol $d(E, F) = 2$ cm).

5. Határozzuk meg az F két képét.
   (a) Állítsunk merőlegest $F°$-ból e'-re. Ez kimetszi az F' első képét. – Ezt a lépést gyakran *visszaforgatás*nak is nevezzük.
   (b) Rendező segítségével jelöljük ki F''-t is.

Megjegyzések:

- A $\mathcal{K}_2$ képsíkba való forgatást analóg módon végezhetjük el, a megfelelő képek szerepeinek felcserélésével.
- Amennyiben nem áll rendelkezésre az N_1 nyompont, úgy az egyenes két tetszőleges pontjának forgatottját kell meghatározni. (Erre az esetre egy másik módszert is mutatunk a következő alfejezetben.)

8.2.2. A különbségi háromszög módszer

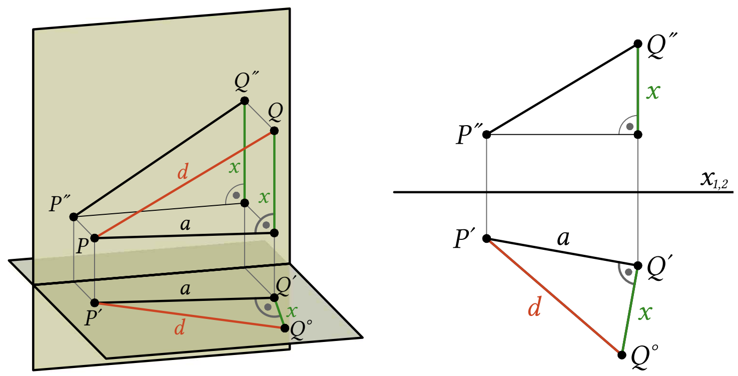
A következő eljárást elsősorban szakaszok hosszának meghatározására alkalmazzuk.

Különbségi háromszög módszer – 1. verzió

Adott egy $\overline{PQ}$ szakasz két képével. Határozzuk meg a szakasz valódi hosszát! (8.5. ábra)

A szerkesztés lépései – elvi magyarázatokkal kiegészítve

Tekintsük a térbeli ábrát. A $\overline{PQ}$ egy olyan derékszögű szakasz átfogója, amelynek egyik befogója a P és Q pontok magasságkülönbsége (x), a másik befogója a $\overline{P'Q'}$ szakasszal párhuzamos és egybevágó (az a szakasz). Ezt a háromszöget – az ún. **különbségi háromszöget** – szerkesztjük meg az első képen.



8.5. ábra. Szakasz hosszának keresése különbségi háromszög módszerrel

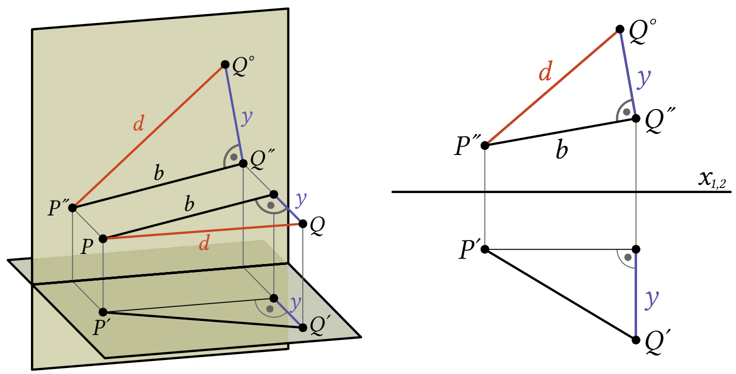
1. Az a szakasz hossza $\overline{P'Q'}$ hosszával egyezik meg, ezért ebből a szakaszból indulunk ki.
2. Állítsunk merőlegest Q'-ből $\overline{P'Q'}$-re, majd mérjük fel rá az x magasságkülönbséget. Így kapjuk a $Q°$ pontot.
3. Ekkor a $\overline{P'Q°}$ szakasz hossza megegyezik a $\overline{PQ}$ szakasz keresett valódi hosszával.

Ugyanilyen gondolatmenettel a második képen is dolgozhatunk.

Különbségi háromszög módszer – 2. verzió

Adott egy $\overline{PQ}$ szakasz két képével. Határozzuk meg a szakasz valódi hosszát! (8.6. ábra)

A szerkesztés a megfelelő képek szerepeinek felcserélésével evidens.



8.6. ábra. Szakasz hosszának keresése különbségi háromszög módszerrel

Megjegyzések:

- Vegyük észre, hogy ez a módszer szinte teljesen megegyezik az egyenes képsíkba forgatásával. A különbség mindössze abban áll, hogy itt a képsíkkal párhuzamos síkba – egy fősíkba – forgatjuk az egyenest. (Például az első esetben a P pont magasságában lévő, $\mathcal{K}_1$-gyel párhuzamos fősíkba.)
- A különbségi háromszög módszer alkalmazható akkor is, ha egy szakaszra (egyenesre) adott hosszúságú szakaszt szeretnénk felmérni. Ebben az esetben a két végpont leforgatása után, a leforgatott szakaszon (egyenesen) mérhetünk valódi nagyságban.

8.2.3. Gyakorló feladatok

1. Adott egy a egyenes két képével, és az egyenesen egy A pont. Szerkesszen olyan pontokat az egyenesen, amelyek A-tól 4 cm-re helyezkednek el! A feladatot az egyenes második képsíkba forgatásával oldja meg!
2. Adott egy e egyenes két képével, és azon egy $\overline{EF}$ szakasz. Határozza meg a szakasz hosszát az egyenes képsíkba forgatásával, az egyenes nyompontjának használatát mellőzve!
3. Adott egy $\overline{AB}$ szakasz. Határozza meg a szakasz hosszát különbségi háromszög módszerrel!

8.3. Sík leforgatása

Gyakran előforduló probléma, hogy szeretnénk egy tetszőleges síkban szerkeszteni: például 3 cm oldalhosszúságú szabályos háromszöget, két egyenes szögét stb. Ezekhez a feladatokhoz nem elegendő az első és a második képe az alakzatoknak, hiszen ott sem a távolságot, sem pedig a szöget nem látjuk valódi nagyságban. Ezért van szükségünk olyan módszerre, amely segítségével egy tetszőleges sík minden elemét eredeti méreteiben látjuk, így a síkon szerkeszteni is tudunk.

Egy *sík leforgatása* azt jelenti, hogy a síkot valamelyik képsíkba (vagy azzal párhuzamos síkba) forgatjuk. Ekkor a tetszőleges síknak keletkezik egy *leforgatott képe*, amely valódi nagyságban látszik.

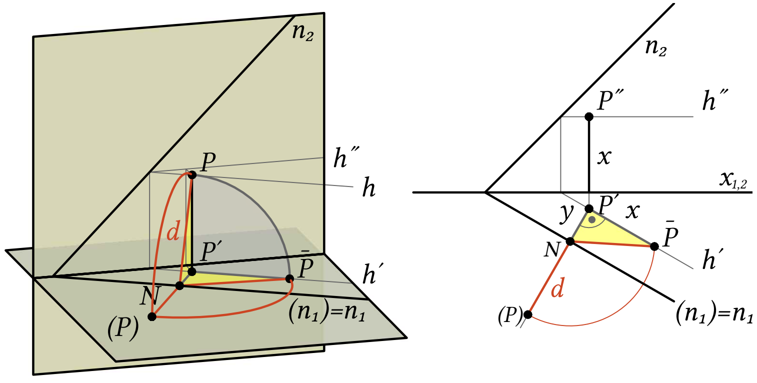
8.3.1. Sík képsíkba forgatása

A sík leforgatásának legtipikusabb példája az, amikor a síkot az első nyomvonala körül a $\mathcal{K}_1$ első képsíkba forgatjuk. A leforgatott képet (mint síkot) egyértelműen megadja egy egyenese és egy pontja. Ha ez a két térelem a rendelkezésünkre áll, akkor a síkon minden további elemet ezekhez illesztünk. Röviden: képesek leszünk a síkban szerkeszteni.

Az egyenes legyen az első nyomvonal, a pont a sík egy tetszőleges pontja.

Sík leforgatása az első képsíkba

Tekintsünk egy síkot, amely nyomvonalaival adott, valamint abban a síkban egy P pontot. Forgassuk le a P pontot (és a teljes síkot) az első képsíkba! (8.7. ábra)



8.7. ábra. Sík leforgatása az első képsíkba

A szerkesztés lépései – elvi magyarázatokkal kiegészítve

Első lépésként, a pontot a síkra kell illeszteni, a 4.1.4. fejezetben látottak szerint. (Itt, P'-ből indulva, a h első fővonal segítségével kaptuk meg a P''-t.)

Vizsgáljuk meg a szemléltető ábrát és a Monge-féle képeket is párhuzamosan. A leforgatott alakzatokat hagyományosan zárójellel jelöljük.

1. A célunk az, hogy a síkot a $\mathcal{K}_1$-be forgassuk. Az n_1 nyomvonal mindkét síknak (az $[n_1, n_2]$-nek és $\mathcal{K}_1$-nek is) eleme, ezért fixen marad a forgatás során: $n_1 = (n_1)$.

2. Ha a síkban merőlegest állítunk P-ből n_1-re, akkor az N pontot kapjuk. A P pont a leforgatáskor egy körívet ír le: $\wideparen{P(P)}$. Ennek a körívnek a középpontja az N pont, sugara az $\overline{NP}$ szakasz hossza. A körív síkja merőleges az n_1-re, emiatt az $\overline{N(P)}$ is merőleges n_1-re. (Az $\overleftrightarrow{NP}$ a sík egy első esésvonala, ezért az első képe merőleges n_1-re.)

3. Szeretnénk az $\overline{NP}$ szakasz hosszát megszerkeszteni, az ugyanis a P pont n_1-től való távolságát adja. Vegyük észre, hogy az $\overline{NP}$ szakasz a $PP'N\triangle$ derékszögű háromszög átfogója. Ezt a háromszöget *leforgatási háromszögnek* nevezzük. Amennyiben sikerül meghatározni a két befogó ($\overline{NP'}$ és $\overline{PP'}$) hosszát, úgy az átfogót is megkapjuk.

4. Térjünk át a Monge-féle képekre. Ábrázoljuk itt is az $\overleftrightarrow{NP}$ első képét; így az $\overline{NP'}$ befogó hossza az első képen már (valódi nagyságban) szerepel (y). A $\overline{PP'}$ befogó hossza a P pont távolsága a $\mathcal{K}_1$ képsíktól: ez éppen a P pont második rendezőjének hossza (x).

5. A $PP'N\triangle$ leforgatási háromszög ezzel már megszerkeszthető. Az $\overline{NP'}$-t és a h'-t felhasználva, mérjük fel h'-re az x rendezőhosszt. A $\bar{P}P'N\triangle$ háromszög egybevágó a leforgatási háromszöggel, ezért $N\bar{P} = NP$.

6. Végül, az N-et mint középpontot felhasználva, mérjük fel az $\overline{N\bar{P}}$-t az $\overleftrightarrow{NP'}$-re. Ezzel megkapjuk a P pont (P) forgatott képét.

Látható, hogy a térbeli meggondolásokat mellőzve, a szerkesztés igen egyszerű: csak a $\bar{P}P'N\triangle$ háromszöget kell megszerkeszteni, majd az átfogóját az $\overleftrightarrow{NP'}$ egyenesre mérni.

Megjegyzések:

- A P pont leforgatásához használt ív „felbukkan” az első képsíkban is, ugyanis $\wideparen{PN(P)} = \wideparen{\bar{P}N(P)}$.

- A leforgatás során a sík képsíkkal bezárt szögének kiegészítő szögével forgattunk. Használhattuk volna a képsíkkal bezárt szöget is; ebben az esetben az első és leforgatott képek az n_1 ugyanazon oldalára kerülnének. (Ekkor igen „sűrűvé” válhat az ábra, ezért a gyakorlatban inkább elkerüljük ezt a megoldást.)

- A síkot leforgathatjuk (pontosabban beforgathatjuk) a második képsíkba is. A képek szerepeinek felcserélésével a feladat megoldásának módszere ugyanaz.

Természetesen felmerülő kérdés, hogy egyetlen pont leforgatása hogyan segít teljes alakzatok első (majd második) képének megszerkesztésében. Az első és a forgatott képek között azonban van egy igen szoros kapcsolat: *a sík első képéből a sík forgatott képe* ***merőleges affinitás*** *segítségével megkapható. Az affinitás tengelye a fixen maradó n_1 nyomvonal, a P' pont affin képe a (P) leforgatott pont.* Ez könnyen látható, ugyanis a nyomvonal pontjai fixen maradnak a forgatás során, egy pont első képét és forgatott képét összekötő egyenes mindig merőleges a nyomvonalra, továbbá az illeszkedések és párhuzamosságok is „megmaradnak". Ezekkel az adatokkal az affinitás adott, így minden további pont forgatott képe, illetve a forgatott pontokból az első képek megszerkeszthetők.

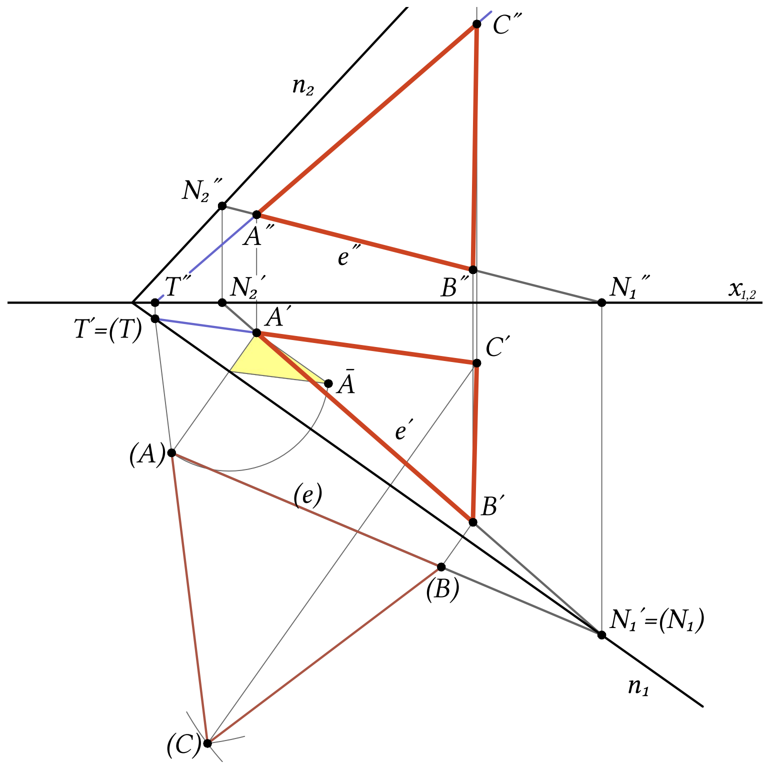
A következő feladat ezt az összefüggést használja ki.

Szabályos háromszög szerkesztése tetszőleges síkban

Adott egy dőlt sík nyomvonalaival, és abban egy $\overline{AB}$ szakasz. Szerkesztendő olyan, a síkban fekvő szabályos háromszög, melynek egyik oldala az $\overline{AB}$. (8.8. ábra)

A szerkesztés lépései

1. A sík nyomvonalai tetszőlegesen felvehetők, továbbá – például – az $\overline{A'B'} = e'$ szakasz első képe is. Az $\overline{A''B''} = e''$ második képet a 4.1.2. fejezet szerint kapjuk meg.
2. Forgassuk le az A pontot az előző példa segítségével: (A)
3. A B pont forgatott képét már merőleges affinitással szerkesztjük meg. (Lásd a 2.2.1. fejezetet.)
   (a) Az $\overleftrightarrow{A'B'} = e'$ egyenes az affinitás tengelyét elmetszi egy pontban, a fixen maradó $N_1 = N_1' = (N_1)$ nyompontban.
   (b) Az e' egyenes affin/leforgatott képe – két pontja segítségével – az $\overleftrightarrow{(N_1)(A)} = (e)$ egyenes.



8.8. ábra. Szabályos háromszög szerkesztése tetszőleges síkban

   (c) A B' pontban vett affinitás iránya, amely most merőleges az n_1-re, kimetszi az (e)-ből a keresett (B) pontot.
4. Az $[(n_1), (e)] = \mathcal{K}_1$ a sík leforgatott képe, itt minden valódi nagyságban látszik. Szerkesszük meg az egyik lehetséges megoldást: az $(A)(B)(C)\triangle$ szabályos háromszöget.
5. Affinitással határozzuk meg a C' első képét.

(a) Például az $\overleftrightarrow{(A)(C)}$ egyenes elmetszi az n_1 nyomvonalat (mint tengelyt) a $(T) = T'$ pontban. (A T egyúttal az $\overleftrightarrow{(A)(C)}$ első nyompontja is.)

(b) Az egyenes első képe a $\overleftrightarrow{T'A'}$, amely majd tartalmazza a C'-t is.

(c) Az affinitás iránya, azaz a (C)-ből az n_1-re állított merőleges, kimetszi a keresett C' pontot. – Ezzel a háromszög első képét megkaptuk: $A'B'C'\triangle$.

6. Hiányzik még a C pont második képe. A C''-t legkönnyebben úgy kapjuk meg, ha az $\overline{AC}$ egyenes második képét megszerkesztjük. (A T pont felhasználható, lásd a 4.1.4. fejezetet.) A háromszög második képe: $A''B''C''\triangle$.

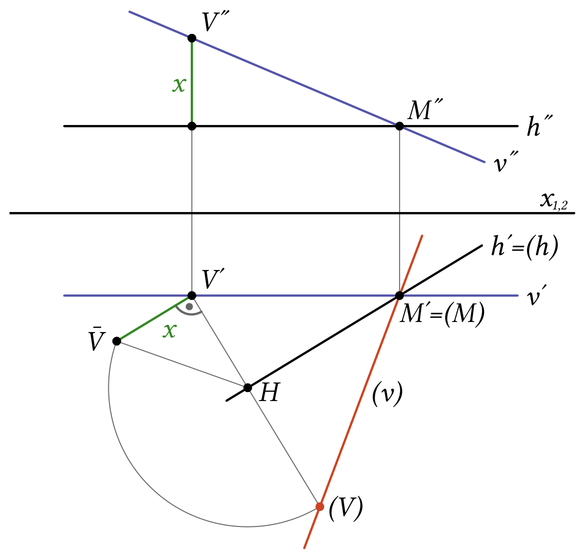
8.3.2. Sík fősíkba forgatása

Előfordulhat, hogy a sík nyomvonalai nem állnak rendelkezésre, például azért, mert a szerkesztéshez használt papíron nem férnének ki. Ilyenkor megtehető, hogy nem a képsíkba, hanem egy azzal párhuzamos, ún. fősíkba forgatunk. (Lásd a 3.3.2. fejezetet.) Ez egyúttal azt is jelenti, hogy a leforgatás tengelye nem a nyomvonal, hanem egy azzal párhuzamos síkbeli egyenes, azaz egy fővonal.

A következő példa a legegyszerűbb esete *a fővonal körüli forgatás*nak, ugyanis a síkot magával a fővonalával és egy pontjával adjuk meg.

Sík forgatása fővonal körül

Adott egy sík egy h első fővonalával és egy V pontjával. Forgassuk le a V pontot (és ezzel együtt a síkot) a h magasságában lévő fősíkba! A pont leforgatását követően határozzuk meg a ponton áthaladó v második fővonal leforgatott képét is! (8.9. ábra)



8.9. ábra. Sík forgatása fővonal körül

A szerkesztés lépései

A feladat megoldása igen egyszerű. Ha képsík helyett fősíkba forgatunk, akkor a leforgatás során a nyomvonalat fővonalra, a pont képsíktól való távolságát pedig a pont fősíktól való távolságára kell kicserélni.

Adottak a h és a V képei. A h körül forgatunk, ezért $h' = (h)$.

1. A leforgatás elve nem változik, ezért a (V) biztosan a V'-ből a h'-re állított merőlegesen van.

2. A leforgatási háromszög most a $\overline{V}V'H\triangle$ háromszög, ahol a $\overline{V'\overline{V}} = x$ szakasz hossza a V és a h-hoz tartozó fősík távolsága ($\sim$ rendezőhossz).

3. A H középpontú, $H\overline{V}$ sugarú kör kimetszi az előző merőleges egyenesből a (V) pontot.

A V pont leforgatását követően a leforgatott síkban bármilyen alakzat megszerkeszthető; a merőleges affinitás segítségével – ahol a tengely a h' – az első képek, síkra illesztéssel pedig a második képek meghatározhatók.

1. Vegyük fel a V-n áthaladó, v második fővonalat. (Lásd a 4.1.2. fejezetet.)
    (a) A v első képe $x_{1,2}$-vel párhuzamos: v'.
    (b) A v a h-t az M pontban metszi, így az első képen: $v' \cap h' = M'$.
    (c) Az M metszéspont második képe h''-re illeszkedik: M''.
    (d) Végül, $\overleftrightarrow{V''M''} = v''$.
2. Az M pont éppen a leforgatás tengelyén, a h első fővonalon nyugszik, ezért $M' = (M)$.
3. A v egyenes leforgatott képe az $\overleftrightarrow{(M)(V)}$ egyenes.

8.3.3. Gyakorló feladatok

1. Adott egy sík nyomvonalaival. Forgassa be a síkot – egy tetszőleges pontja segítségével – a második képsíkba!
2. Adott egy első vetítősík. Forgassa le a vetítősíkot az első képsíkba! Mit tapasztal? (Segítség: A leforgatási háromszög nem létezik, helyette elegendő a rendezőhossz.)
3. Adott egy sík nyomvonalaival, és abban három pont: A, B, C. Szerkesztendő az $ABC\triangle$ háromszög valódi nagysága.
4. Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesztendő a síkon egy tetszőleges szakasz, majd egy olyan négyzet, amelynek egyik oldala az adott szakasz. Mit vesz észre a képeken? (Segítség: A párhuzamosságtartás miatt, a négyzet mindkét képe egy-egy paralelogramma.)
5. Adott egy sík nyomvonalaival. Tetszőleges pontjának felhasználásával forgassa le a síkot az első képsíkba! Szerkessze meg a sík második nyomvonalának leforgatott képét! (Segítség: A második nyomvonal az elsőt az $x_{1,2}$-ben metszi, ez a leforgatott képnek is eleme. Ezután elegendő egy tetszőleges pontjának leforgatott képét megszerkeszteni.)
6. Adott egy sík egy első fővonalával és egy pontjával. Szerkesszen olyan egyenlő szárú háromszöget, melynek egyik csúcsa az adott pont, az alapja 4 cm hosszúságú és az adott fővonalon nyugszik!
7. Adott három pont: A, B, C. Szerkesztendő az $ABC\triangle$ háromszög valódi nagysága. (Segítség: Az egyik ponton keresztül vegyen fel egy első fővonalat, majd forgassa le a három pontot a fővonal körül. A fővonalat érdemes úgy felvenni, hogy a háromszög egyik oldalát elmetssze.)

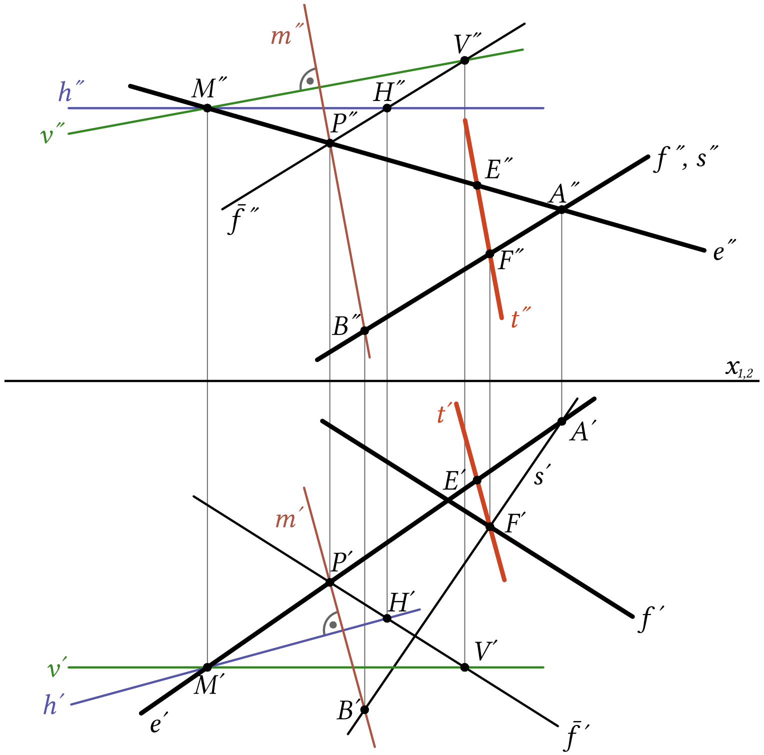
8.4. Kiegészítés – Néhány alapvető metrikus feladat

A sík és egyenes merőlegességének képi feltétele, valamint a sík leforgatásának ismeretében minden távolsággal és szöggel kapcsolatos feladat megoldható Monge-projekcióban.

A következőkben néhány tipikus példát mutatunk. Mivel a szerkesztésekhez mindvégig ismert alapszerkesztéseket alkalmazunk, ezért csupán útmutatásokat közlünk. Egyes feladatok összetettek, így csak az előző fejezetek alapos ismeretével oldhatók meg.

Normáltranszverzális szerkesztése

Adott két kitérő egyenes, szerkesztendő a normáltranszverzálisuk (mint egyenes). (Lásd az 1.2.2. fejezetet.) (8.10. ábra)



8.10. ábra. Normáltranszverzális szerkesztése

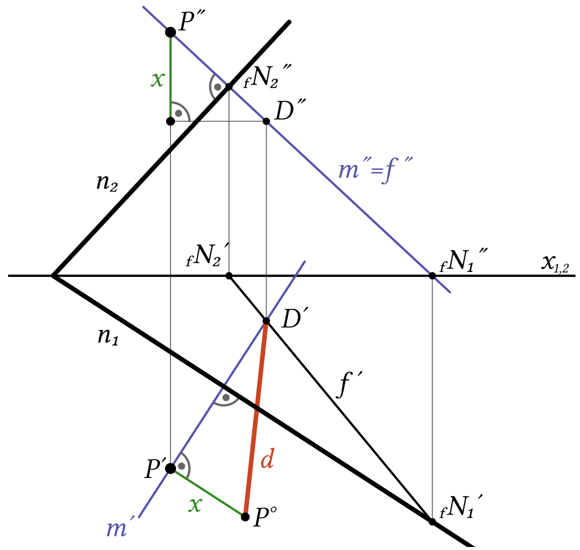
A szerkesztés lépései – útmutató

A két egyenes normáltranszverzálisa mindkét egyenesre merőleges transzverzális. A feladatot két részre osztjuk: először megkeressük a normáltranszverzális irányát, második lépésben pedig adott iránnyal párhuzamos transzverzálist szerkesztünk.

A normáltranszverzális irányát megkapjuk, ha az egyik egyenest eltoljuk a másik egy pontjába, majd az általuk meghatározott síkra merőlegest állítunk. Itt az e egyenes P pontjába toltuk el az f egyenest, azután egy e-beli M ponton át két fővonalat szerkesztettünk (4.1.3. fejezet). A két fővonal segítségével a merőleges irány meghatározható (8.1. fejezet). (A rajzon az egyszerűség kedvéért rögtön a P-ből állítottunk merőlegest a $[h, v]$ síkra.) Az m irányt felhasználva, iránnyal párhuzamos transzverzálist szerkesztünk: $t = \overleftrightarrow{EF}$ (4.4. fejezet).

Pont és sík távolsága

Adott egy sík nyomvonalaival és egy, a síkra nem illeszkedő P pont. Szerkesztendő a pont és a sík távolsága. (8.11. ábra)



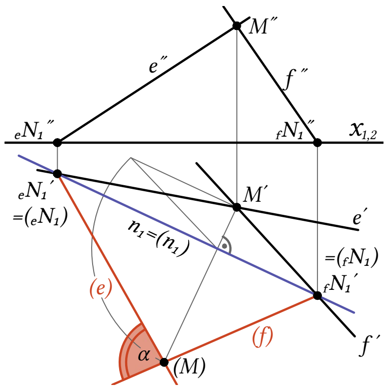
8.11. ábra. Pont és sík távolsága

A szerkesztés lépései – útmutató

Pont és sík távolságát a pontból a síkra bocsátott merőleges szakasz hossza adja (1.2.2. fejezet).
A feladat megoldáshoz először a P-ből merőleges egyenest állítunk a síkra (8.1. fejezet), majd megszerkesztjük annak döféspontját a síkkal (4.2.1. fejezet), végül meghatározzuk a szakasz hosszát, például különbségi háromszög módszerrel (8.2.2. fejezet).

Két egyenes szöge

Adott két metsző egyenes Monge-projekcióban. Határozzuk meg a két egyenes szögét! (8.12. ábra)



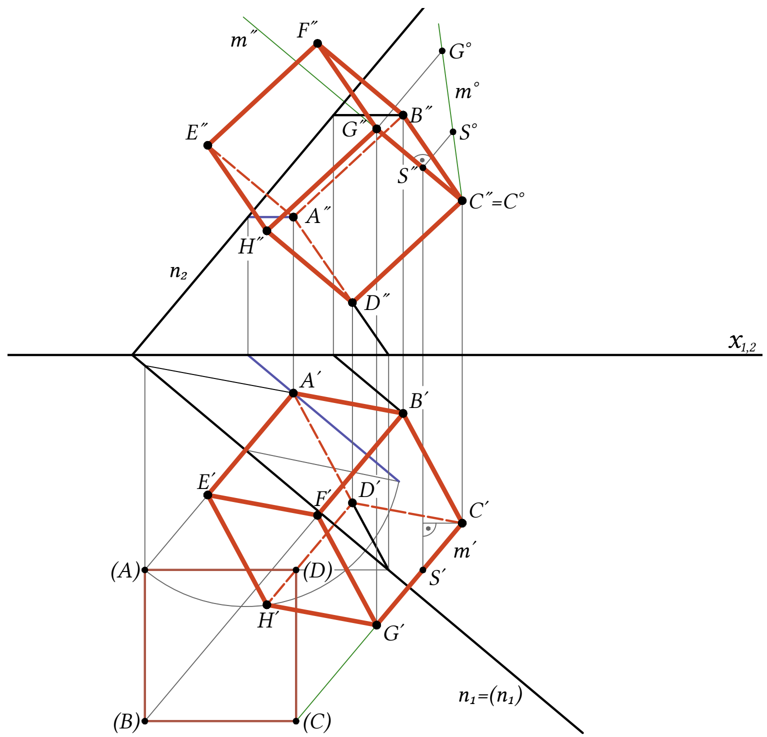
8.12. ábra. Két egyenes szöge

A szerkesztés lépései – útmutató

A két metsző egyenes szögét valódi nagyságban látjuk, ha leforgatjuk a két egyenes síkját (8.3.1. fejezet).

Tetszőleges síkon álló kocka ábrázolása

Adott egy sík nyomvonalaival, továbbá a síkban egy A pont. Szerkesztendő egy, a síkon álló, A csúcspontú, 4 cm oldalhosszúságú kocka. (8.13. ábra)



8.13. ábra. Tetszőleges síkon álló kocka ábrázolása

A szerkesztés lépései – útmutató

Ez a feladat igen nehéz és egyúttal szép is, hiszen a Monge-féle ábrázolásról tanultak összességét felhasználja. Kiindulásként, készítsünk „feladatmegoldási tervet”. Hogyan tudjuk felépíteni ezt a kockát? Milyen sorrendben kell haladni? Mik a geometriai lépések? Ha ezekre válaszolni tudunk, akkor csupán a megfelelő szerkesztéseket kell felhasználni, hogy a kocka két képét megkapjuk.

A kockát a következőképpen lehet felépíteni:

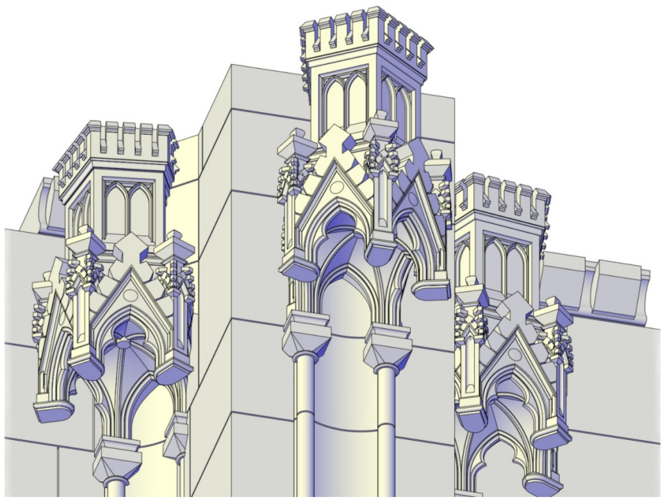
1. Meghatározzuk a síkban fekvő egyik lapját ($ABCD$), amely egy négyzet.
   (a) Vegyük fel a síkot, és abban az A pontot. (4.1.4. fejezet)
   (b) Forgassuk le a síkot az első képsíkba, az A pont segítségével. (8.3.1. fejezet)
   (c) A leforgatott síkban szerkesszünk egy, a feltételnek megfelelő négyzetet, majd affinitás segítségével határozzuk meg az első képeket: $A'B'C'D'$. (2.2.1. fejezet és 8.3.1. fejezet)
   (d) Határozzuk meg az $ABCD$ négyzet második képét. (4.1.4. fejezet)
2. Állítsunk merőleges egyenest a síkra, például a C pontból. (8.1. fejezet)
3. Mérjük fel a C-ből kiindulva az m merőlegesre a kocka 4 cm-es élhosszúságát. (8.2.2. fejezet)
4. Toljuk el a kapott $\overline{CG}$ élt az A, B és D csúcsokba, mindkét képen. (4.1.1. fejezet)
5. Végül ábrázoljuk mindkét képen a láthatóságot. (3.1.4. fejezet)

Nyilvánvaló, hogy a feladatnak végtelen sok megoldása van.

9. fejezet

Axonometria

Az axonometria az egyik legismertebb ábrázolási eljárás. Amikor például egy kockát rajzolunk, és figyelünk arra, hogy az éleit párhuzamosan rajzoljuk meg, valójában axonometriában dolgozunk. Az axonometria segítségével *szemléletes kép*et kapunk egy adott objektumról, ezért gyakran találkozhatunk ezzel a leképezéssel látványtervekben, vagy akár egy tankönyvben is.



9.1. ábra. Az Országház néhány kövének axonometrikus nézete

Az axonometria kevésbé valósághű képet eredményez, mint a 10. fejezetben tárgyalt perspektíva, ám annál jóval egyszerűbben elkészíthető, és a kapott kép arányos, adott esetben akár mérhető lesz.

9.1. Az axonometria alapjai

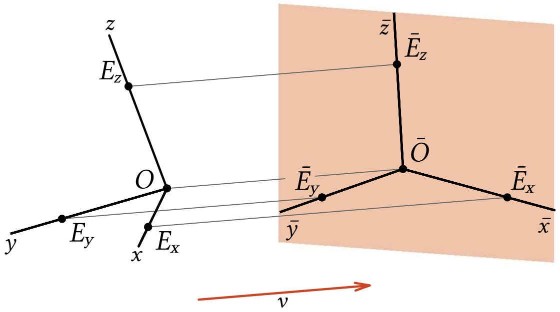
Elsőként értelmezzük az axonometriát mint leképezési eljárást.

Axonometria, tengelykereszt, rövidülés

Az *axonometria* (vagy axonometrikus ábrázolás) egyetlen képsíkra történő párhuzamos vetítés. A vetítés a következőképpen történik:
Tekintsünk egy derékszögű koordinátarendszert az origójával és az x, y, z (koordináta)tengelyeken lévő egységpontokkal: O, E_x, E_y, E_z. Válasszunk egy tetszőleges síkot, az ún. *képsík*ot, és egy (a képsíkkal nem párhuzamos) *vetítési irány*t. Vetítsük a derékszögű koordinátarendszer pontjait az adott vetítési iránnyal a képsíkra. Az így kapott alakzat a koordinátarendszer képe, amelyet röviden *tengelykereszt*nek nevezzük.
A leképezés során egy alakzatot először ebben a koordinátarendszerben helyezzük el, majd az alakzatot és a koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit is vetítjük. (Az $[x, y]$, $[x, z]$, $[y, z]$ síkokat *koordinátasík*oknak nevezzük.)

A tengelyek *rövidülése* a $q_{\text{tengely}} = \frac{\text{egységszakasz képének hossza}}{\text{az egységszakasz hossza}}$ hányados, azaz:

$$q_x = \frac{\bar{O}\bar{E}_x}{OE_x} \qquad q_y = \frac{\bar{O}\bar{E}_y}{OE_y} \qquad q_z = \frac{\bar{O}\bar{E}_z}{OE_z}$$



9.2. ábra. Az axonometria vetítési rendszerének sémája

Megjegyzések:

- Az axonometria mint párhuzamos vetítés egyenestartó, párhuzamosságtartó és aránytartó. (Lásd a 2.1. fejezetet.)
- A koordinátarendszer felhasználása nélkül egy pont képe egyetlen pont lenne, ezért eredeti helye nem lenne rekonstruálható. (Lásd a 2.1. fejezetet.)

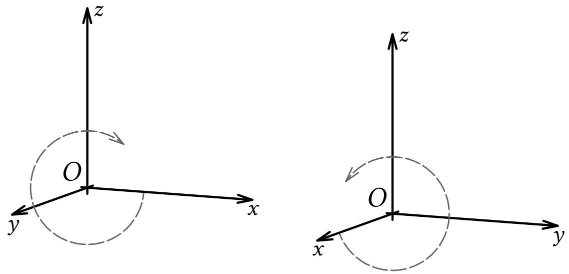
Felmerülhet a kérdés, hogy ha megrajzolunk három különböző egyenest és azokon az egységeket, vajon lesz-e olyan koordinátarendszer a térben, aminek ez a képe? A válasz: igen. Ezt a szabadságot az alábbi tételnek köszönhetjük:

Pohlke tétele

Az $\{\bar{O}, \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z\}$ pontnégyes, amelynek semelyik három pontja nem esik egy egyenesre, tetszőlegesen felvehető, mert mindig létezik olyan derékszögű koordinátarendszer (O origóval, E_x, E_y és E_z egységpontokkal), képsík és vetítési irány, hogy az $\{O, E_x, E_y, E_z\}$ pontnégyes képe – hasonlóság erejéig – az adott $\{\bar{O}, \bar{E}_x, \bar{E}_y, \bar{E}_z\}$ pontnégyes.

Az egyszerűség kedvéért a későbbiekben az axonometrikus képekről a felülvonásos jelölést elhagyjuk.

A koordinátarendszer lehet jobb- vagy balsodrású. A 9.3. ábrán baloldalt *balsodrású*, jobboldalt *jobbsodrású* koordinátarendszer látható; a gyakorlatban mindkét típus előfordul.



9.3. ábra. Bal- és jobbsodrású tengelykereszt

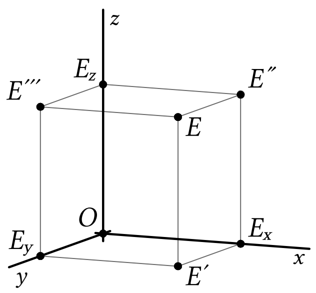
Az axonometrikus leképezés típusai

Ha a koordinátatengelyek képei és a rövidülések tetszőlegesek, *szabad axonometriá*ról beszélünk. Ha a tengelyek képei, a képsík vagy a vetítési irány különleges helyzetű, akkor az axonometria *speciális*. (Erről bővebben a 9.3.1. fejezetben lesz szó.)

Fontos megjegyzés: Ha a feladat csak illeszkedésekről, metszésekről szól, a koordinátatengelyek egységeinek ábrázolását elhagyhatjuk.

9.1.1. Pont ábrázolása

A legtöbb vetítési rendszer megismerésekor első lépésként egy pontot érdemes ábrázolni. Kezdjük a legegyszerűbb esettel, az $E(1;1;1)$ koordinátákkal rendelkező pont ábrázolásával egy adott (szabad) axonometriában. (9.4. ábra) Az E pont megrajzolásakor az x és y tengelyekkel párhuzamosan „lépünk” egyet, így kapjuk az E'-vel jelölt pontot. E'-ből „felfelé” mérve egy egységet, a keresett E ponthoz jutunk.

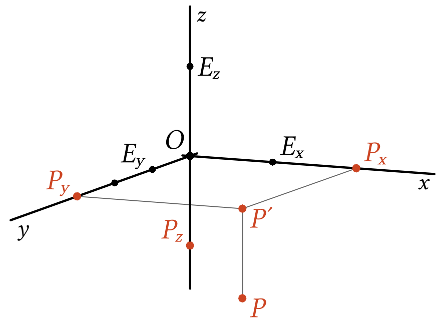


9.4. ábra. Az $E(1;1;1)$ koordinátákkal rendelkező pont ábrázolása axonometriában

Következő lépés egy tetszőleges pont ábrázolása.

Pont ábrázolása koordinátáival

Adott egy tengelykereszt képe szabad axonometriában. Ábrázoljuk a $P(2;3;-1)$ pontot! (9.5. ábra)



9.5. ábra. A $P(2;3;-1)$ koordinátákkal rendelkező pont ábrázolása axonometriában

A szerkesztés lépései

Az ábrázolás során a pont bármelyik koordinátájával kezdhetünk, itt először az x és y koordinátákat mérjük fel.

1. Az x tengely mentén 2 egységet, az y tengely mentén 3 egységet kell felmérni. (Körzőnyílásba vesszük az OE_x, illetve OE_y szakaszhosszakat, és az adott tengely mentén kétszer, illetve háromszor egymás után felmérjük.) A kapott pontok: P_x és P_y.
2. P_x-ből az y tengellyel, P_y-ból az x tengellyel húzunk párhuzamost. A két egyenes metszéspontja a P' pont (P' koordinátái: $(2;3;0)$).
3. A z tengelyre is felmérjük a kért koordinátát (-1-et), ezzel a P_z ponthoz jutottunk.

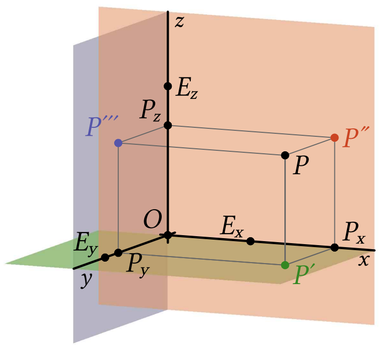
4. P'-ből párhuzamost húzunk a z tengellyel, és átmásoljuk arra az OP_z szakasz hosszát. Az így keletkező pont a keresett P pont.

Megjegyzés: A P pont $[x,y]$ koordinátasíkra eső merőleges vetülete a $P'(x;y;0)$ pont. A tengelyekre eső pontok: $P_x(x;0;0)$, $P_y(0;y;0)$, $P_z(0;0;z)$.

Pont képei

Adott egy koordinátarendszer és egy tetszőleges P pont. A P pont $[x,y]$, $[x,z]$ és $[y,z]$ koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit rendre P'-vel, P''-vel és P'''-vel jelöljük (9.6. ábra).

Ha az adott koordinátarendszert, a P pontot és a három vetületét axonometriában ábrázoljuk, akkor a kapott képek nevei:
P – a P pont *axonometrikus képe*
P' – a P pont *első képe*
P'' – a P pont *második képe*
P''' – a P pont *harmadik képe*

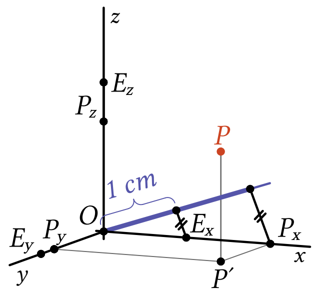


9.6. ábra. Általános helyzetű pont

Megjegyzések:

- A merőleges vetítések miatt a $P, P', P'', P''', P_x, P_y, P_z, O$ pontok egy téglalap alapú, egyenes hasáb csúcsai. Ezt a hasábot szokás *axonometrikus vetítőhasáb*nak is nevezni. Igen könnyű látni azt is, hogy emiatt például a $\overline{PP'}$ szakasz párhuzamos a z tengellyel (hiszen a z tengely merőleges az $[x,y]$-ra).
- A $\overleftrightarrow{PP'}$, $\overleftrightarrow{PP''}$ és $\overleftrightarrow{PP'''}$ egyeneseket – sőt, bizonyos esetekben az axonometrikus vetítőhasáb összes élegyenesét – szokás *rendező*nek is nevezni.
- A pont képeinek nevei a könnyű érthetőség miatt ilyen egyszerűek. Például a P' pont valójában a „a P pont $[x,y]$ koordinátasíkra eső merőleges vetületének axonometrikus képe” – de sokkal kényelmesebb az „első kép” elnevezést használni.

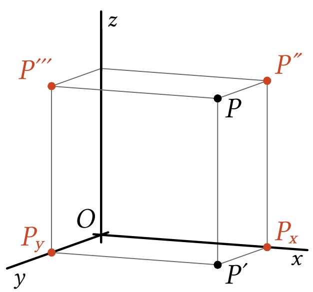
A P pont koordinátái könnyen megszerkeszthetők a párhuzamos szelők tételével: például az x koordináta esetén egy szögszárra felmérjük az OE_x és OP_x szakaszhosszakat, a másik szögszárra pedig az egységhosszt (1 cm-t), majd párhuzamosok segítségével kapjuk a koordináta valódi hosszát (9.7. ábra).



9.7. ábra. Pont koordinátájának valódi hossza

Pont ábrázolása képeivel

Adott egy tengelykereszt képe szabad axonometriában, továbbá egy P pont axonometrikus és első képe. Szerkesztendő a második és harmadik kép. (9.8. ábra)



9.8. ábra. Pont ábrázolása képeivel

A szerkesztés lépései

A P és P' pontok tetszőlegesen felvehetők, de ügyelni kell arra, hogy a $\overline{PP'}$ szakasz párhuzamos a z tengellyel. Az ábrázolás során most nem szükséges feltüntetni az egységeket, mivel nincs szükségünk a P pont konkrét koordinátáira, csak a pont helyzetét akarjuk meghatározni. A feladat persze többféleképpen megoldható, itt most egy lehetséges megoldást mutatunk be.

1. Húzzunk párhuzamost az y tengellyel P'-ből. Ez a párhuzamos az x tengelyt a P_x pontban metszi.
2. Húzzunk párhuzamost y-nal P-ből, illetve z-vel P_x-ből. A két egyenes metszéspontja a P'' második kép.
3. A fenti két lépést végezzük el az $[y, z]$ sík esetében is (ekkor az x és a z tengelyekkel kell párhuzamosokat húzni), az eredmény a P''' harmadik kép.

Látható, hogy két kép ismeretében a hiányzó két képet meg tudtuk szerkeszteni.

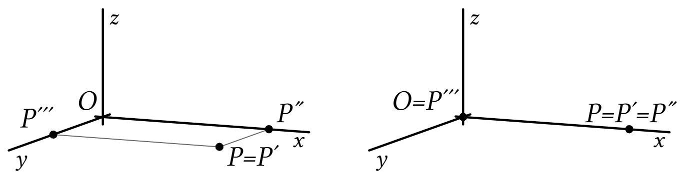
Objektum ábrázolásához szükséges képek száma

Axonometriában tetszőleges objektum (pont) *egyértelmű* ábrázolásához a négy lehetséges képből bármelyik kettő felvétele szükséges és elegendő is egyben.

Megjegyzés: A műszaki gyakorlatban legtöbbször az objektum axonometrikus és első képeit adjuk meg, mivel az első kép felülnézeti képnek tekinthető, ami gyakran előforduló nézet (például egy épület alaprajza is felülnézeti kép).

Speciális helyzetű pontok

Ha egy pont valamelyik koordinátasíkban vagy valamelyik koordinátatengelyen van, ábrázolása természetesen akkor is lehetséges. A 9.9. ábrán baloldalt a P pont az $[x, y]$ koordinátasíkban van, jobboldalt pedig az x tengelyen. Figyeljük meg a különböző képek egybeesését!



9.9. ábra. Speciális helyzetű pontok

9.1.2. Egyenes ábrázolása

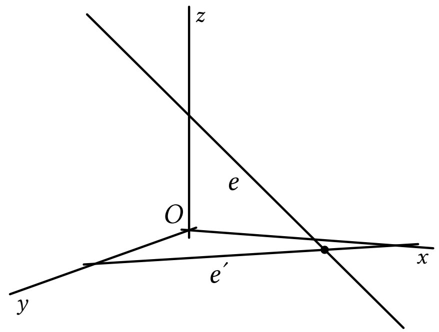
Egy egyenes ábrázolása axonometriában igen hasonló egy pont ábrázolásához. Ez nyilvánvaló, hiszen egy egyenest megadhatunk két, nem egybeeső pontjával.

Egyenes képei

Adott egy koordinátarendszer és egy tetszőleges e egyenes. Az e egyenes $[x,y]$, $[x,z]$ és $[y,z]$ koordinátasíkokra eső merőleges vetületeit jelölje rendre e', e'' és e'''.

Amennyiben a koordinátarendszert és az e egyenest három vetületével együtt axonometriában ábrázoljuk, akkor a kapott képek nevei:
e – az e egyenes *axonometrikus képe*
e' – az e egyenes *első képe*
e'' – az e egyenes *második képe*
e''' – az e egyenes *harmadik képe*

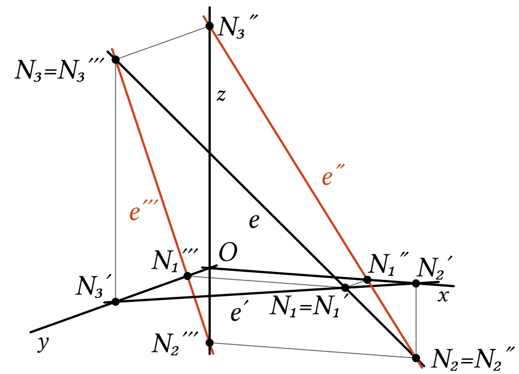
A 9.1.1. fejezetben láthattuk, hogy bármely objektumot két képe egyértelműen meghatározza. Ennek köszönhetően elegendő az egyenest két képével ábrázolni. A 9.10. ábrán az e egyenest az axonometrikus és az első képével határoztuk meg.



9.10. ábra. Egyenes ábrázolása axonometriában

Egyenes képeinek meghatározása

Adott egy tengelykereszt képe szabad axonometriában, továbbá egy e egyenes axonometrikus és első képe. Szerkesztendő az egyenes második és harmadik képe. (9.11. ábra)



9.11. ábra. Egyenes hiányzó képeinek szerkesztése

A szerkesztés lépései

A tengelykereszt és az e, e' képek tetszőlegesek.

1. Az e és e' képek metszik egymást egy N_1 pontban. Az e' az e egyenes merőleges vetülete, ezért az e egyenes az $[x,y]$ koordinátasíkot az N_1-ben metszi.

2. Az N_1 pont az $[x,y]$ síkban van, ezért $N_1 = N_1'$, továbbá N_1'' az x-tengelyre, N_1''' az y-ra esik.

3. Az e' merőleges vetület elmetszi az x tengelyt is, legyen ez a pont az N_2'. Vegyük észre, hogy ez a pont éppen az e egyenes és az $[x,z]$ sík közös pontjának első képe.

4. Húzzunk párhuzamost N_2'-ből z-vel; ez a párhuzamos kimetszi e-ből az N_2 pontot.

5. Mivel az N_2 pont $[x,z]$-beli, így a második képe önmaga ($N_2 = N_2''$), míg a harmadik képe a z tengelyre esik: N_2'''.

6. Hasonló logikával kapjuk az N_3 pontot, amely az e egyenes és az $[y,z]$ sík közös pontja: N_3' az y tengelyen van; a segítségével kapjuk az N_3 axonometrikus képet ($N_3 = N_3'''$), végül az N_3''-t.

7. A szerkesztésből világosan látszik, hogy az e' első kép tartalmazza az N_1', N_2' és N_3' első képeket. Ugyanez teljesül a hiányzó e'' második, és e''' harmadik képekre is.

8. Az N_1'', N_2'' és N_3'' pontok egy egyenesre illeszkednek, ami az e egyenes második képe: e''.

9. Az N_1''', N_2''' és N_3''' pontok pedig az e harmadik képén vannak: e'''.

Egyenes nyompontjai

Azon pontokat, amelyekben egy egyenes metszi a koordinátasíkokat, *nyompontok*nak nevezzük. Az $[x,y]$, $[x,z]$ és $[y,z]$ koordinátasíkokat az egyenes rendre az N_1 első, N_2 második és N_3 harmadik nyompontban metszi.

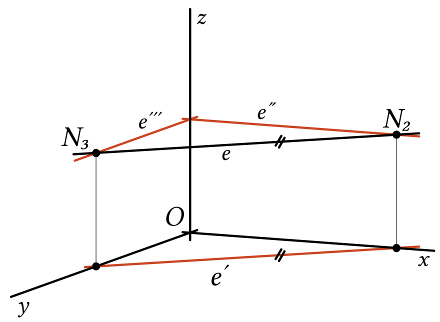
Megjegyzés: A nyompontok definíciója hasonló a Monge-projekció során tanultakhoz. (Lásd a 3.2.1. fejezetet.)

Speciális helyzetű egyenesek

Speciális helyzetűnek tekintünk minden olyan egyenest, amelyek a képsíkokkal párhuzamos vagy azokra merőleges helyzetűek. A következőkben csak az $[x,y]$ koordinátasík esetét vizsgáljuk végig. Javasoljuk a Kedves Olvasónak, hogy a többi koordinátasíkra is végezze el a szerkesztéseket. (Lásd a 9.1.4. fejezetet.)

Koordinátasíkkal párhuzamos egyenes ábrázolása

Ábrázoljunk egy, az $[x,y]$ koordinátasíkkal párhuzamos egyenest szabad axonometriában! (9.12. ábra)



9.12. ábra. Koordinátasíkkal párhuzamos egyenes (fővonal)

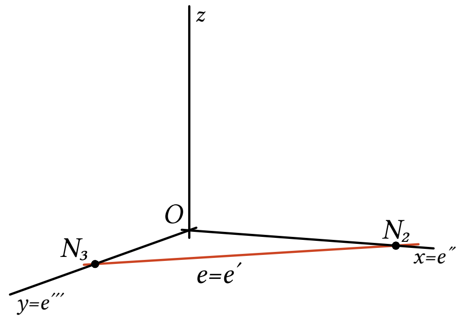
Ha egy egyenes párhuzamos az $[x,y]$-nal, akkor nem létezik első nyompontja, továbbá az e és e' képek párhuzamosak egymással. A hiányzó képek szükség esetén megszerkeszthetők, és párhuzamosak az x és y tengelyekkel.

Összefoglalva a kapott *képi feltételek*et:

$$e \parallel e' \,; \qquad e'' \parallel x \,; \qquad e''' \parallel y \,.$$

Megjegyzés: Felhasználva a Monge-projekcióval való hasonlóságot, egy koordinátasíkkal párhuzamos egyenest gyakran *fővonal*nak is nevezünk. (Lásd a 3.2.2. fejezetet.)

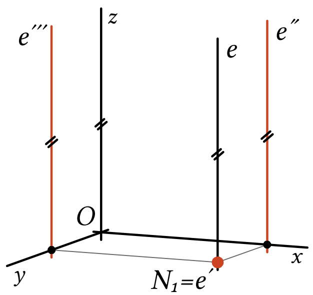
Az előző feladat speciális esete, ha az egyenes épp az $[x,y]$ koordinátasíkban fekszik (9.13. ábra).



9.13. ábra. Koordinátasíkban fekvő egyenes

Koordinátasíkra merőleges, koordinátatengellyel párhuzamos egyenes ábrázolása

Ábrázoljunk egy, az $[x, y]$ koordinátasíkra merőleges, azaz a z tengellyel párhuzamos egyenest szabad axonometriában! (9.14. ábra)



9.14. ábra. Koordinátasíkra merőleges egyenes (vetítőegyenes)

Ha egy egyenes merőleges az $[x, y]$ koordinátasíkra, úgy első képe ponttá fajul. Mivel az egyenes párhuzamos z-vel, nem létezik második és harmadik nyompontja, valamint axonometrikus, második és harmadik képei is párhuzamosak z-vel.

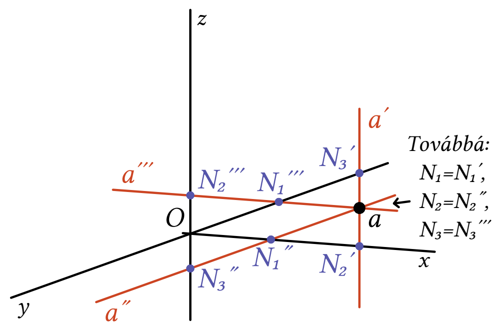
Összefoglalva a kapott *képi feltételek*et:

$$e' = N_1 \; ; \qquad e, e'', e''' \parallel z \, .$$

Megjegyzés: A Monge-projekció elnevezéseit követve, egy koordinátasíkra merőleges egyenest *vetítőegyenes*nek nevezünk. (Lásd a 3.2.2. fejezetet.)

Egy érdekes példa: axonometrikus vetítőegyenes ábrázolása

Ábrázoljunk szabad axonometriában egy olyan egyenest, amely a vetítési iránnyal párhuzamos! (9.15. ábra)



9.15. ábra. Axonometrikus vetítőegyenes

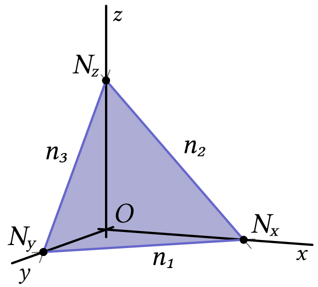
A szerkesztés lépései – útmutató

Egy, a vetítési iránnyal párhuzamos egyenes minden pontjának axonometrikus képe ugyanaz, azaz az egyenes axonometrikus képe *egyetlen pont* (az

ábrán az a-val jelölt pont). Ez az a pont tartalmazza az N_1, N_2 és N_3 nyompontok axonometrikus képeit is.
Az a', a'' és a''' képek meghatározásához meg kell szerkeszteni a nyompontok első, második és harmadik képeit. Azt az érdekes eredményt kapjuk, hogy a kapott képek párhuzamosak a koordinátatengelyek képeivel, azonban a térben a vetítőegyenes természetesen nem párhuzamos a koordinátatengelyekkel.

9.1.3. Sík ábrázolása

Ahogyan Monge-projekcióban egy síkot nyomvonalaival ábrázoltunk (lásd a 3.3. fejezetet), itt is hasonlóan járhatunk el (9.16. ábra).



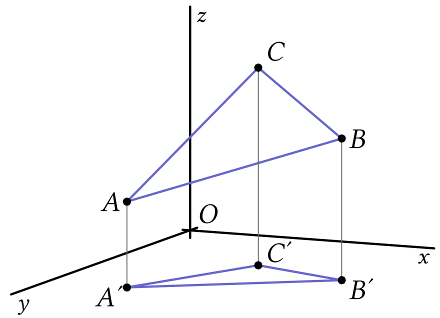
9.16. ábra. Sík megadása nyomháromszögével

Sík nyomvonalai és nyomháromszöge

Egy tetszőleges sík $[x,y]$, $[x,z]$ és $[y,z]$ koordinátasíkokkal való metszésvonalait rendre *első*, *második* és *harmadik nyomvonalának* nevezzük. Jelölések: n_1, n_2 és n_3

Ha a síknak és a koordinátatengelyeknek a metszéspontjai az N_x, N_y és N_z pontok, úgy az $N_xN_yN_z\triangle$ háromszöget *nyomháromszög*nek nevezzük.

Egy síkot megadhatjuk például három pontjával is (9.17. ábra).



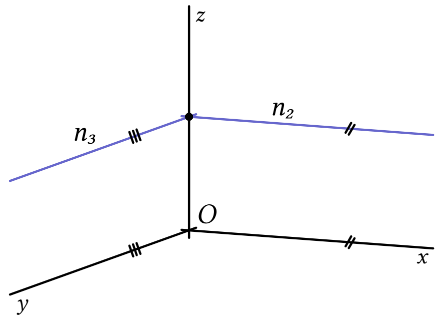
9.17. ábra. Sík megadása három pontjával

Speciális helyzetű síkok

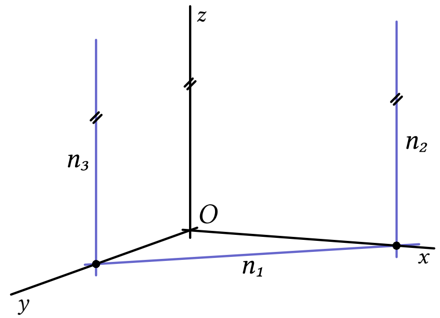
Ahogyan a korábbi fejezetekben, a speciális helyzetet itt is a koordinátasíkokkal való kölcsönös helyzet szerint értelmezzük. A választott koordinátasík most is az $[x,y]$ sík – a másik két koordinátasík eseteinek szerkesztéseit a Kedves Olvasóra bízzuk.

Koordinátasíkkal párhuzamos, koordinátatengelyre merőleges sík ábrázolása

Ábrázoljunk egy, az $[x,y]$ koordinátasíkkal párhuzamos, azaz a z tengelyre merőleges síkot szabad axonometriában! (9.18. ábra)



9.18. ábra. Koordinátasíkkal párhuzamos sík (fősík)



9.19. ábra. Koordinátasíksíkra merőleges sík (vetítősík)

Ha a sík párhuzamos az $[x, y]$ koordinátasíkkal, úgy nem létezik a metszésvonaluk, azaz a síknak nincs első nyomvonala. Ebből már következik, hogy a másik két nyomvonal párhuzamos a koordinátatengelyekkel.

Így a *képi feltételek*:

$$n_1 \text{ nem létezik}; \qquad n_2 \parallel x\,; \qquad n_3 \parallel y\,.$$

Megjegyzés: A Monge-projekció mintájára, egy koordinátasíkkal párhuzamos síkokat *fősík*oknak is nevezünk.

Koordinátasíkra merőleges, koordinátatengellyel párhuzamos sík ábrázolása

Ábrázoljunk egy, az $[x, y]$ koordinátasíkra merőleges, azaz a z tengellyel párhuzamos síkot szabad axonometriában! (9.19. ábra)

Mivel sík párhuzamos a z tengellyel, nem létezik közös pontjuk – így a nyomháromszög is elfajul, és két oldalegyenese párhuzamos a z tengellyel.

A *képi feltételek*:

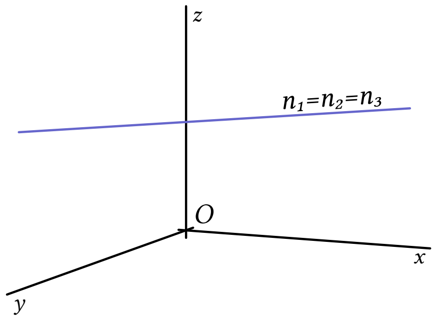
$$n_1 \text{ tetszőleges}; \qquad n_2, n_3 \parallel z\,.$$

Megjegyzés: A Monge-projekcióban látottakhoz hasonlóan, egy koordinátasíkra merőleges síkokat *vetítősík*oknak nevezünk. Az első vetítősíkok esetén a sík minden objektumának első képe az n_1 nyomvonalra esik.

Egy érdekes eset: axonometrikus vetítősík ábrázolása

Ábrázoljunk egy olyan síkot, amely az axonometrikus vetítés irányával párhuzamos! (9.20. ábra)

Az ábra megértéséhez képzeljük el, hogy egy egyenest szeretnénk a képsíkra vetíteni. A vetítési irány és ez az egyenes egy síkot határoz meg – e síknak a képsíkkal vett metszésvonala az egyenes axonometrikus képe. Ebben a síkban azonban még végtelen sok másik egyenes is van, amelyeknek a vetítés során ugyanaz az axonometrikus képe. Ez tehát egy olyan sík, amelynek minden objektumának – így a nyomvonalainak – az axonometrikus képe ugyanazon az egyenesen van. Ezt nevezzük *axonometrikus vetítősík*nak.



9.20. ábra. Vetítés irányával párhuzamos sík (axonometrikus vetítősík)

9.1.4. Gyakorló feladatok

A feladatok mindegyikét szabad axonometriában oldja meg! A koordinátatengelyeken tüntesse fel az egységeket is, ha szükséges!

1. Ábrázolja a $P(-2; 1; 4)$ pontot!

2. Adott egy tetszőleges pont második és harmadik képe. Szerkessze meg a hiányzó első és axonometrikus képeket!

3. Ábrázolandó egy pont az $[x, z]$ koordinátasíkban (mind a négy képével!).

4. Ábrázoljon egy pontot a z tengelyen, az összes képe meghatározásával!

5. Adottak az A és B pontok első és axonometrikus képeikkel. Szerkessze meg az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes első és axonometrikus képét, valamint a hiányzó második és harmadik képét is! (Segítségül: megszerkesztheti az egyenes nyompontjait, vagy az A és B pontok második és harmadik képeit is.)

6. Határozza meg egy egyenes axonometrikus és első képét, ha a második és a harmadik képe adott!

7. Szerkesztendő egy egyenes első és második képe, ha az axonometrikus és a harmadik képe adott.

8. Ábrázoljon egy tetszőleges,

   (a) $[x, z]$-vel párhuzamos egyenest;
   (b) $[y, z]$-vel párhuzamos egyenest;
   (c) $[x, z]$-re merőleges egyenest;
   (d) $[y, z]$-re merőleges egyenest!

9. Ábrázoljon egy tetszőleges,

   (a) $[x, z]$-vel párhuzamos síkot;
   (b) $[y, z]$-vel párhuzamos síkot;
   (c) $[x, z]$-re merőleges síkot;
   (d) $[y, z]$-re merőleges síkot!

9.2. Illeszkedési és metszési feladatok

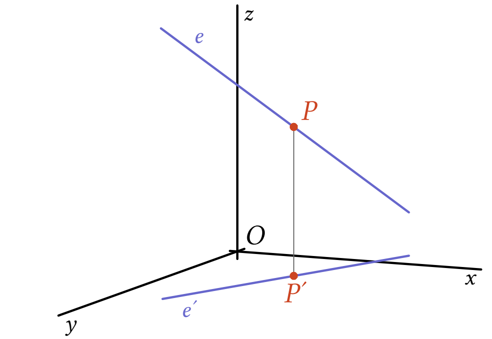
Ebben a fejezetben áttekintjük pontok, egyenes és síkok lehetséges kölcsönös helyzeteit, amelyeket az 1.1. fejezetben már láthattunk. A példák a könnyebb feladatoktól a nehezebb problémák felé tartanak. Néhány teljesen egyértelmű esetet – például két pont egybeeső-e vagy különbözőek – nem tárgyalunk.

9.2.1. Térelemek illeszkedése és párhuzamossága

Pont illeszkedése egyenesre

Ábrázoljunk egy e egyenest és egy arra illeszkedő P pontot szabad axonometriában! (9.21. ábra)

Egy P pont illeszkedik egy e egyenesre, ha a megfelelő képek illeszkednek egymásra. (Ezt az illeszkedést a 9.1.2. fejezetben már használtuk.)

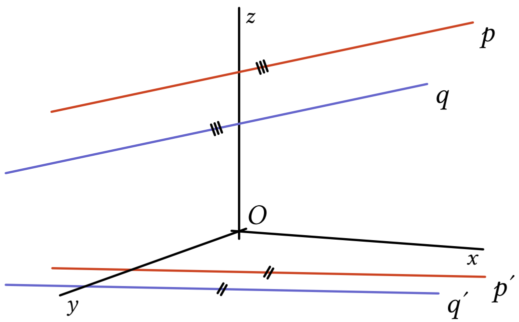


9.21. ábra. Egyenes és arra illeszkedő pont

Két egyenes kölcsönös helyzetei

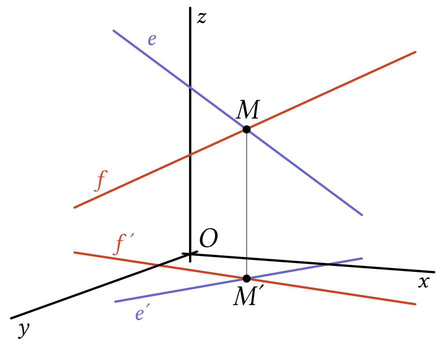
Ábrázoljunk két-két egyenest szabad axonometriában, melyek helyzete (a) párhuzamos (9.22. ábra), (b) metsző (9.23. ábra) és (c) kitérő (9.24. ábra)!

Két egyenes párhuzamos, ha a megfelelő képeik párhuzamosak egymással: a 9.22. ábrán $p \parallel q$.



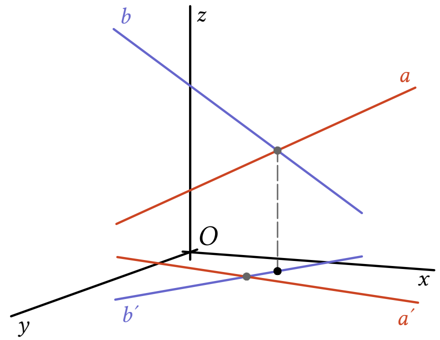
9.22. ábra. Párhuzamos egyenespár

Két egyenes metsző, ha a megfelelő képeik metszéspontjai egy pont (a metszéspont) képeit adják: a 9.23. ábrán e és f metszéspontja M.



9.23. ábra. Metsző egyenespárok

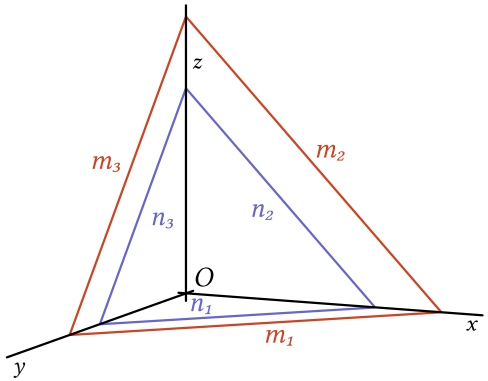
Két egyenes kitérő, ha nem egybeeső, párhuzamos vagy metsző helyzetűek: 9.24. ábrán a és b kitérő egyenesek.



9.24. ábra. Kitérő egyenesek

Két sík párhuzamossága

Ábrázoljunk két, egymással párhuzamos síkot szabad axonometriában! (9.25. ábra)



9.25. ábra. Párhuzamos síkok

Két sík párhuzamos, ha megfelelő nyomvonalaik párhuzamosak egymással.

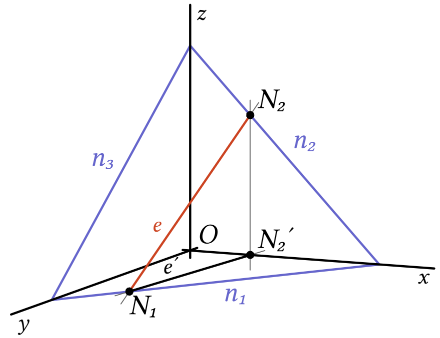
Egyenes illeszkedése síkra

Adott egy sík nyomháromszögével szabad axonometriában. Ábrázoljunk egy egyenest ebben a síkban! (9.26. ábra)

A szerkesztés lépései

Ha az egyenes illeszkedik a síkra, akkor nyompontjai a megfelelő nyomvonalakon vannak (például N_1 első nyompont az n_1 első nyomvonalon).

1. Az egyenes egyik képét (például e' első képét) szabadon felvehetjük.
2. Az e' az első nyomvonalat az N_1-ben, az x tengelyt az N_2'-ben metszi.



9.26. ábra. Síkra illeszkedő egyenes

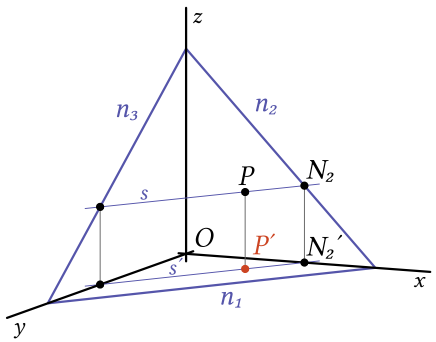
3. A z-vel párhuzamost húzva N_2'-ből, a párhuzamos az n_2 nyomvonalat az N_2 nyompontban metszi. (A nyompont illeszkedik a nyomvonalra.)
4. Két pont egyértelműen meghatároz egy egyenest, így az e két nyompontjának axonometrikus képe az e axonometrikus képét adja: $\overleftrightarrow{N_1 N_2} = e$

Pont illeszkedése síkra

Adott egy sík nyomháromszögével szabad axonometriában. Ábrázoljunk egy pontot ebben a síkban! (9.27. ábra)

A szerkesztés lépései

A megoldáshoz a ponton keresztül egy segédegyenest veszünk fel. A segédegyenest illesztjük a síkra, így a pontot elegendő a segédegyenesre illeszteni.



9.27. ábra. Síkra illeszkedő pont

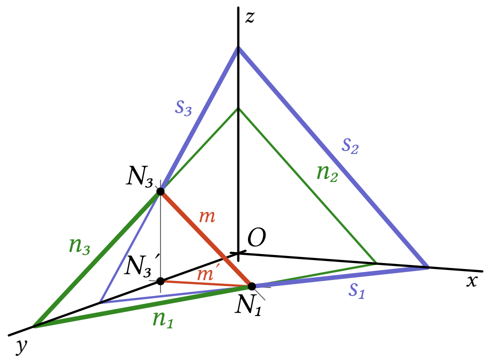
1. Induljunk ki a P pont egyik képéből, amely tetszőlegesen felvehető, például a P axonometrikus képből.
2. A síkbeli segédegyenes legyen most párhuzamos az n_1 első nyomvonallal (és így az $[x, y]$-nal is). Az axonometrikus képe: s.
3. A síkban fekvő s egyenes második nyompontját az axonometrikus képek metszése adja: s és n_2. metszéspontja N_2.
4. Az N_2 első képe az x tengelyen nyugszik; innen kell párhuzamost húznunk az axonometrikus képével. Az eredmény az s' első kép.
5. A P pont első képe illeszkedik s'-re, így kapjuk P' hiányzó képet.

9.2.2. Térelemek metszése

A következő három alapfeladatnál erősen támaszkodunk arra, hogy az előző fejezetben már megtanultuk egy egyenes síkra illesztését.

Két sík metszésvonala

Adott két sík nyomháromszögeikkel szabad axonometriában. Szerkesztendő a két sík metszésvonala. (9.28. ábra)



9.28. ábra. Két sík metszésvonala

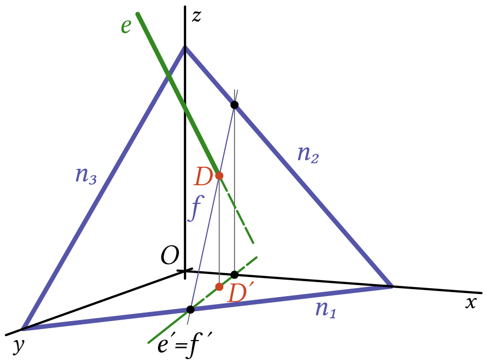
A szerkesztés lépései

Legyen a két sík 3-3 nyomvonala n_1, n_2, n_3 és s_1, s_2, s_3.

1. A két sík első nyomvonalai metszik egymást az N_1 pontban. Ez a pont a keresett metszésvonal első nyompontja, hiszen a metszésvonal mindkét síknak eleme, így első nyompontja mindkét nyomvonalon rajta van.
2. Hasonlóan kapjuk a harmadik nyomvonalak N_3 metszéspontját, amely a metszésvonal harmadik nyompontja.
3. A két nyompont egyenese a metszésvonal axonometrikus képe: $\overleftrightarrow{N_1 N_3} = m$.
4. Az N_3 első képét felhasználva kapjuk a metszésvonal m' első képét.

Sík és egyenes döféspontja 1.

Adott egy sík nyomháromszögével és egy egyenes két képével szabad axonometriában. Szerkesszük meg a sík és az egyenes közös pontját, azaz a döféspontot! (9.29. ábra)



9.29. ábra. Nyomháromszögével adott sík döféspontja

A szerkesztés lépései

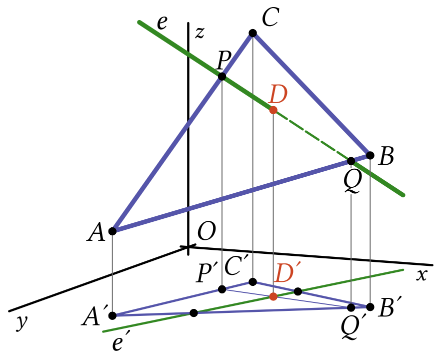
Mind a sík, mind az egyenes tetszőlegesen felvehető; az egyenest e axonometrikus és e' első képével adjuk meg. A feladatot visszavezetjük két egyenes metszésére; az e egyenes ugyanis a sík végtelen sok egyenesét metszi.

1. Tekintsük az egyenes e' első képét. Legyen ez egyúttal egy síkbeli f egyenes első képe is: f'.
2. Határozzuk meg az f axonometrikus képét, a 9.2.1. fejezetben látottaknak megfelelően: f.
3. Az e és az f egyenesek közös (vetítő)síkban vannak. Ezért a metszéspontjuk létezik: D pont. A D egyúttal az e és a sík közös pontja is.
4. Végül, határozzuk meg a döféspont hiányzó képeinek egyikét, itt a D' első kép a logikus választás.

Fontos megjegyzés: A most bemutatott szerkesztési eljárás ugyanaz a *fedőegyenespár-módszer*, mint amit a Monge-projekció esetében is láthattunk. (Lásd a 4.2.1. fejezetet.) A példában az e és f egyenesek „fedésben” vannak, ha az első képeiket vizsgáljuk.

Sík és egyenes döféspontja 2.

Adott egy sík három pontjával (A, B és C), valamint egy egyenes szabad axonometriában. Szerkesztendő a sík és az egyenes döféspontja. (9.30. ábra)



9.30. ábra. Három pontjával adott sík döféspontja

A szerkesztés lépései

Adjuk meg a sík és az egyenes képeit; legyenek ezek az axonometrikus és első képek: A, B, C, A', B', C', továbbá e és e'.

A feladatot az előző példa mintájára oldjuk meg, ismét egy síkbeli segédegyenest (itt csak szakaszt) használunk.

1. Az e egyenes és a háromszög *látszólagos* metszéspontjai: P és Q. – Legyen a $\overline{PQ}$ szakasz olyan síkbeli szakasz, amelynek axonometrikus képe egybeesik az e axonometrikus képével.
2. A P pont az $\overline{AC}$, a Q pont az $\overline{AB}$ oldalon nyugszik, ezért az első képeik is a megfelelő oldalak első képeire illeszkednek: P' és Q'.
3. Mivel az e-nek és a $\overline{PQ}$-nak ugyanaz az axonometrikus képe, ezért van közös síkjuk. (Ez a sík egy axonometrikus vetítősík.)
4. Az e' és $\overline{P'Q'}$ képek metszéspontja a közös pontjuk első képe: D'.
5. A szokott módon meghatározhatjuk a D axonometrikus képet is; a kapott pont a háromszög és az egyenes döféspontja.

Megjegyzés: Mindhárom példában az eredményeket láthatóság szerint ábrázoltuk. Ilyen esetekben az x, y és z tengelyek pozitív részei által határolt térnyolcadot tekintjük látható résznek, a síkokat pedig átlátszatlannak tételezzük fel.

9.2.3. Gyakorló feladatok

A feladotok mindegyikét szabad axonometriában oldja meg!

1. Adott egy

   (a) $[x, z]$-vel párhuzamos

   (b) $[y, z]$-vel párhuzamos

   (c) $[x, y]$-ra merőleges

   (d) $[x, z]$-re merőleges

   egyenes. Ábrázoljon az egyenesen egy tetszőleges pontot! (Figyeljen arra, hogy egy pontot egyértelműen két képe határozza meg!)

2. Adott egy

   (a) $[x, y]$-ra merőleges

   (b) $[y, z]$-re merőleges

   (c) $[x, y]$-nal párhuzamos

   sík. Adjon meg ebben a síkban egy tetszőleges pontot!

3. Adott egy $ABC\triangle$ axonometrikus és első képeivel. Határozzon meg a háromszög belsejében egy tetszőleges pontot! (Segítség: Először illesszen egy segédszakaszt a háromszögre.)

4. Adott egy $ABC\triangle$ háromszög axonometrikus és első képeivel. Szerkessze meg a háromszög síkjának nyomvonalait! (Segítség: A háromszög két egyenesének nyompontjait kell megszerkeszteni. A megfelelő nyompontokat összekötve kapjuk a nyomvonalakat.)

5. Szerkessze meg két sík metszésvonalát, ha az egyik sík

   (a) $[x, y]$-nal párhuzamos;

   (b) $[x, z]$-vel párhuzamos;

   (c) $[x, y]$-ra merőleges;

   (d) $[y, z]$-re merőleges!

6. Szerkessze meg egy nyomháromszögével adott sík és egy e egyenes döféspontját, ha az egyenes

   (a) axonometrikus és második képeivel adott;

   (b) merőleges $[x, y]$-ra;

   (c) párhuzamos $[x, y]$-nal!

7. Adott egy $ABC\triangle$ háromszög és egy e egyenes axonometrikus és harmadik képeikkel. Szerkesztendő a döféspontjuk.

9.3. Speciális axonometriák

Az eddigi feladatokban nem foglalkoztunk speciális vetítési iránnyal, speciális állású tengelykereszttel, illetve speciális rövidülésekkel. Azonban a műszaki gyakorlatban sokszor ilyen axonometriákkal dolgozunk. (Emlékeztető: a rövidülés definícióját lásd a 9.1. fejezet elején.)
Az axonometrikus rendszer megválasztásakor mérlegelendő szempont egyfelől a szemléletes ábrázolásmód, illetve az, hogy metrikus feladatokat speciális axonometriákban tudunk könnyen megoldani – lásd a 9.3.2. fejezetet és a 9.3.3. fejezetet.

9.3.1. Legfontosabb speciális axonometriák

Merőleges és ferde axonometriák

Ha egy axonometria vetítési iránya merőleges a képsíkra, úgy *merőleges* (vagy ortogonális) axonometriáról beszélünk. Minden más esetben az axonometria *ferde* (vagy klinogonális).

Merőleges axonometria esetén mindig szép, szemléletes képet kapunk. Ferde axonometriáknál – a tengelykereszt és a rövidülések megválasztásától függően – előfordulhat, hogy torznak látszik az objektum képe.

A következő fejezetekben bemutatott *speciális* ferde axonometriák akkor hasznosak, ha fontos a könnyű mérhetőség: akár mert manuálisan szerkesztjük a képet, akár mert arra szánjuk az ábrát, hogy a méretek valódi nagyságban gyorsan olvashatók legyenek.

Fontos megjegyzés: A műszaki gyakorlatban a valódi nagyság alatt az objektum *adott léptékű* (azaz általában kicsinyített) képét értjük.

A leggyakrabban előforduló axonometriákat a tengelyek egységéből képezhető egységkocka segítségével mutatjuk be.

Frontális axonometria

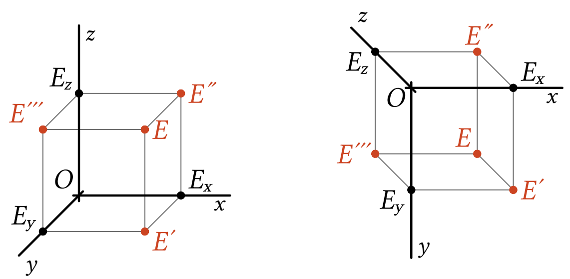
Ebben a ferde axonometriában a képsík az $[x, z]$ koordinátasík (9.31. ábra). Az x és z tengelyeket valódi nagyságban látjuk, így a rövidülésük: $q_x = 1$ és $q_z = 1$. Az y tengely rövidülése tetszőleges, általában $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{2}{3}$. Ha $q_y = 1$, akkor kavalier-axonometriáról beszélünk.

Ez az axonometria könnyen alkalmazható, ugyanis az $[x, z]$ sík valódi nagyságban látszik, és igen könnyen elérhető, hogy az $[x, y]$ koordinátasíkon is valódi nagyságban szerkeszthessünk. (Lásd a 9.3.2. fejezetet.)

Madárvetület

A frontális axonometriához igen hasonló ferde axonometria, csak itt az $[x, y]$ koordinátasík a képsík (9.31. ábra). A z tengely rövidülése tetszőleges. Ha $q_z = 1$, akkor a madárvetületet katonai vetületnek is nevezzük.

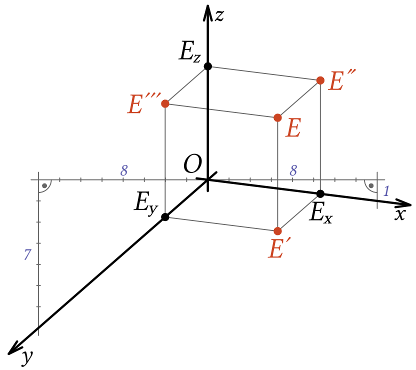
Ez az axonometria nagyon hasznos, ha például egy épület alaprajzát valódi nagyságban szeretnénk látni.



9.31. ábra. Frontális axonometria és madárvetület

Műszaki tengelykereszt

Ez a ferde axonometria olyan tengelykereszttel és rövidülésekkel bír, hogy axonometrikus képe egy merőleges axonometria képéhez hasonlít (azaz szemléletes), de egyszerűbben mérhető (9.32. ábra).



9.32. ábra. Műszaki tengelykereszt

A tengelykereszt felvételének lépései:

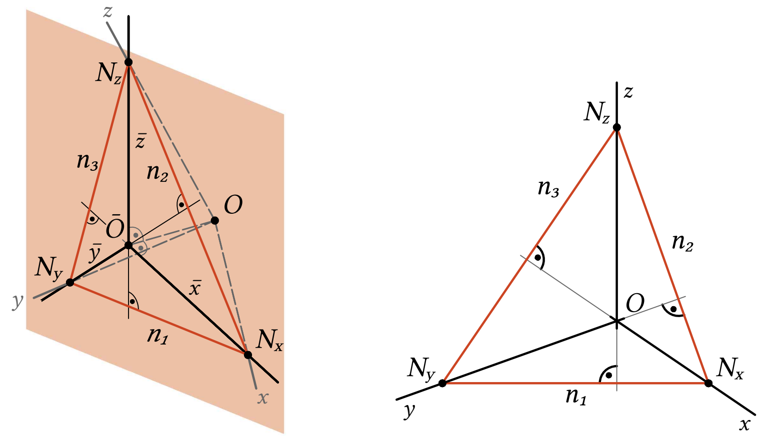
1. Vegyük fel az O origót és a z tengelyt.
2. Állítsunk merőlegest O-ból a z-re, majd mindkét irányba mérjünk fel 8-8 egységet (például cm-t).
3. A kapott végpontokból, az előző egyenesre merőlegesen mérjünk lefelé ($-z$ irányban) a bal oldalon 7, a jobb oldalon 1 egységet.
4. Az utolsó lépésben kapott két végpontot kössük össze az O-val, így kapjuk az y és az x tengelyeket.
5. A rövidülések: $q_x = 1$, $q_y = \frac{1}{2}$, $q_z = 1$. (Az ábrán a rövidülések segítségével vettük fel az egységkocka éleit.)

Merőleges axonometria

Mint a 9.3.1. fejezetbeli definícióban is láttuk, merőleges axonometria esetén a vetítés iránya merőleges a képsíkra. Egy test axonometrikus képének előállításához tehát elegendő ezen vetítési irány megadása: a képsík erre nyilván merőleges, konkrét pozíciója pedig nem befolyásolja a képet.
A képsík rögzítéséhez és a további szerkesztésekhez szükségünk van *a képsík és a koordinátasíkok metszésvonalaiból álló nyomháromszögre.* A képsík és a koordinátatengelyek metszéspontjait általában rendre N_x, N_y és N_z jelölik.

Egy merőleges axonometria meghatározása

Merőleges axonometriában a képsík $N_xN_yN_z\triangle$ nyomháromszöge mindig hegyesszögű. A nyomháromszög magasságvonalai a koordinátatengelyek axonometrikus képei, így a nyomháromszög magasságpontja az origó axonometrikus képe.



9.33. ábra. Merőleges axonometria

Egy merőleges axonometria nyomháromszögének megadása (9.33. ábra):

1. Vegyünk fel egy tetszőleges tengelykeresztet, figyelve arra, hogy később ez a három egyenes egy hegyesszögű háromszög három magasságvonala lesz.

2. A nyomháromszög egyik csúcspontja (például N_x) tetszőlegesen kijelölhető. (A tengelykereszt felvételével a képsík állását már rögzítettük, egyetlen csúcspont kijelölésével pedig ennek pontos helye is meghatározásra kerül.)

3. Állítsunk merőlegest az N_x-ből a z tengelyre – ez az N_y pontban metszi az y tengelyt.

4. Állítsunk merőlegest az N_y-ból az x-re – ez az N_z-ben metszi a z tengelyt.

5. Az előállt $N_xN_yN_z\triangle$ háromszög a képsík nyomháromszöge.

A szerkesztés során kiindulhatnánk a nyomháromszögből is, hiszen a magasságvonalak megszerkesztésével a tengelyekhez jutunk.

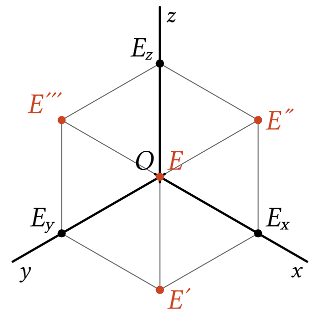
Megjegyzések:

- Merőleges axonometriában lehetőség van a koordinátasíkokat valódi nagyságban látni, leforgatás segítségével. (Lásd a 9.3.3. fejezetet.) Így lehetővé válik összetett objektumok szerkesztése, továbbá utólag elkészíthetjük a tengelyek rövidülését is, ha szükséges.

- A számítógépes programok legtöbbször merőleges axonometriát alkalmaznak. Az adott program a vetítési irány és az objektum háromdimenziós adatai alapján kiszámítja az axonometrikus képet, így a megjelenítéshez nincs szükség a nyomháromszögre és a koordinátasíkokra eső vetületekre.

Izometrikus axonometria

Az izometrikus axonometria olyan merőleges axonometria, ahol mindhárom tengely rövidülése ugyanakkora, és a tengelyek képei 120°-ot zárnak be egymással (9.34. ábra). A nyomháromszög így értelemszerűen egy szabályos háromszög.



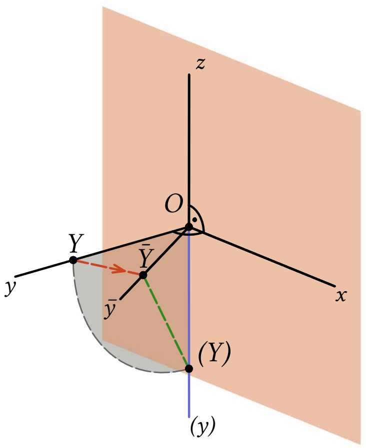
9.34. ábra. Izometrikus axonometria

Ezen axonometria előnye nyilván a könnyű szerkeszthetőség – az azonos szögeknek és rövidüléseknek azonban az az „ára”, hogy egy általános vetítési irányhoz képest a kép olykor nehezebben értelmezhető, és több véletlenszerű egybeesést tartalmaz (lásd O és E pontok). Nem véletlen, hogy optikai illúziók esetében is gyakran alkalmazzák.

9.3.2. Koordinátasík leforgatása frontális axonometriában

Frontális axonometriában az $[x,z]$ sík maga a képsík, ott minden objektum valódi méreteiben látható. A cél az, hogy az $[x,y]$ (vagy az $[y,z]$) koordinátasíkokat is valódi nagyságban lássuk, hiszen így tudunk ott szerkeszteni. A megoldás igen egyszerű: *az $[x,y]$ koordinátasíkot leforgatjuk a képsíkba.* (A 9.35. ábrán az axonometrikus képeket ideiglenesen újra felülvonással jelöltük.)

Az x tengely (és minden pontja) a forgatás során a helyén marad, azaz $x = (x)$. Az y tengely leforgatottja pedig merőleges az x-re: $(x)\perp(y)$. A rövidülést felhasználva, ha (például) $q_y = \frac{2}{3}$, és az y-on lévő Y pont távolsága O-tól 2 egység, akkor az (O) és (Y) közötti távolság 3 egység. Ezzel az $[x,y]$ koordinátasíkot leforgattuk, a forgatott képeken minden valódi nagyságban szerkeszthető.

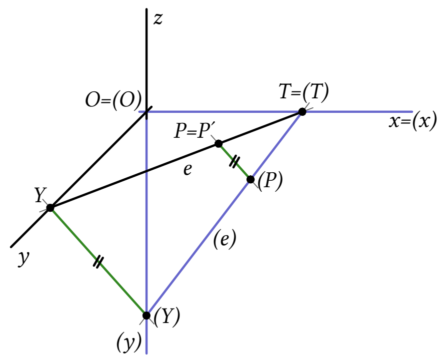


9.35. ábra. Koordinátasík leforgatása frontális axonometriában

Tegyük fel, hogy adott egy P pont az $[x, y]$-ban. Keressük a leforgatott képét. (9.36. ábra)

1. Kössük össze a P-t az Y-nal; a kapott e egyenes az x tengelyt egy $T = (T)$ fixen maradó pontban metszi.
2. Az e forgatott képét bármely két pontjának leforgatott képe meghatározza, ezért $(e) = \overleftrightarrow{(Y)(T)}$.
3. Mivel az axonometria aránytartó, ezért az $\overline{YP}$ és $\overline{PT}$ szakaszok arányát kell átmásolni a leforgatottra. A párhuzamos szelők tételét felhasználva, P-ből párhuzamost húzunk az $\overline{Y(Y)}$ szakasszal, így a (P) ponthoz jutunk.

Vegyük észre, hogy az $[x, y]$ és leforgatottja között egy olyan síkbeli transzformáció van, amely aránytartó, párhuzamosságtartó, van egy fixen maradó egyenese (x), valamint a megfelelő pontokat ugyanaz a párhuzamos irány köti össze (a $\overleftrightarrow{Y(Y)}$ egyenes). Ez a transzformáció a már jól ismert tengelyes affinitás. (Lásd a 2.2.1. fejezetet.)



9.36. ábra. Pont leforgatott képének szerkesztése frontális axonometriában

Kimondhatjuk, hogy *a koordinátasík axonometrikus és leforgatott képe tengelyes affinitással egymásnak megfeleltethető.*

Megjegyzés: Ugyanilyen módon a képsíkba forgatható az $[y, z]$ koordinátasík is.

A leforgatás alkalmazására tekintsünk egy klasszikus példát:

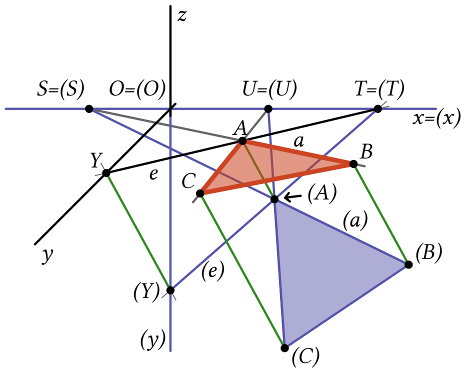
$[x, y]$-beli szabályos síkidom szerkesztése

Adott egy frontális axonometria, ahol $q_y = \frac{1}{2}$, továbbá egy, az $[x, y]$-ban fekvő $\overline{AB} = a$ szakasz. Szerkesztendő olyan szabályos háromszög az $[x, y]$ koordinátasíkban, amelynek egyik oldala az $\overline{AB}$. (9.37. ábra)

A szerkesztés lépései

Adott a tengelykereszt, y tengely rövidülése és $\overline{AB}$ axonometrikus képe.

1. Forgassuk le az $[x, y]$ koordinátasíkot és abban az $\overline{AB}$ szakaszt.
   (a) Jelöljünk ki az y tengelyen egy tetszőleges Y pontot.



9.37. ábra. Szabályos háromszög szerkesztése frontális axonometriában

(b) Az x forgatott képe önmaga, az (y) pedig merőleges erre. Az (Y) pont meghatározásához a rövidülést kell használni. (Ha 1 egység volt az $\overline{OY}$ axonometrikus képe, akkor $\overline{(O)(Y)}$ hossza 2 egység.)

(c) Forgassuk le a szakasz egyik végpontját, az Y pont segítségével. Legyen az az A pont (és az (A) leforgatott képe). (Lásd a feladat előtti elméleti részt; a fixen maradó pont a T pont.)

(d) Szintén a tengelyes affinitást felhasználva, például A (és az S) segítségével határozzuk meg a B pont forgatott képét is: (B)

2. Szerkesszünk szabályos háromszöget, amelynek egyik oldala $\overline{(A)(B)}$.

3. Forgassuk „vissza” a hiányzó (C) csúcsot.

   (a) Kössük össze a (C)-t egy olyan leforgatott ponttal, amelynek az axonometikus képe is ismert, például az (A)-tal.

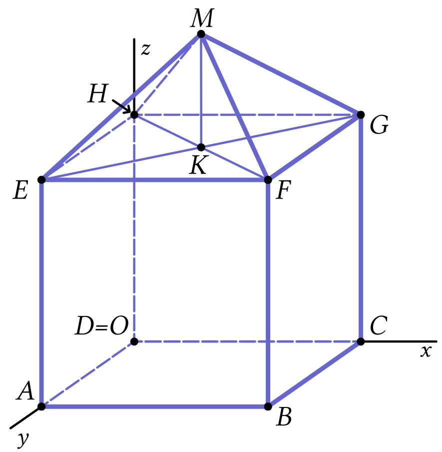
   (b) Tengelyes affinitással adódik a C axonometrikus kép. (Az $\overleftrightarrow{(A)(C)}$ egyenes a tengelyt az $U = (U)$ fixpontban metszi.)

Az affinitás miatt természetes, hogy a szabályos háromszög képe egy általános háromszög.

A következő feladat egy egyszerű, sematizált épületet ábrázol, melynek képe gyorsan (leforgatás nélkül) megszerkeszthető, a helyzetének köszönhetően. Ez a példa jól szemlélteti, miért kedvelt ábrázolási eljárás a frontális axonometria a műszaki életben.

Egyszerű épület axonometrikus képe

Adott egy frontális axonometria, ahol $q_y = \frac{1}{2}$. Ábrázoljunk olyan 3 cm oldalhosszúságú kockát, amelynek egyik csúcsa az O, élei a koordinátatengelyekre illeszkednek! A kocka fedőlapjára illesszünk egy négyzet alapú egyenes gúlát, amelynek alapélei 3 cm hosszúak, és a magassága 1,5 cm! (9.38. ábra)



9.38. ábra. Sematizált épület képe frontális axonometriában

A szerkesztés lépései

A kocka meghatározása:

1. Ha az y tengely rövidülése $\frac{1}{2}$, akkor a kocka alapjának axonometrikus képe egy olyan paralelogramma, amelynek oldalhosszai 3 és 1,5 cm. Ezért az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ képek hossza 1,5 cm, míg $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ képek hossza 3 cm.

2. A z tengely rövidülése 1, azaz „nem rövidül", így az azzal párhuzamos egyenesekre minden valódi nagyságban mérhető fel. Az $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ és $\overline{DH}$ függőleges élek egyaránt 3 cm hosszúságúak.

A fedőlapra illesztett gúla megszerkesztése:

1. Jelöljük ki a fedőlap K középpontját, az átlók segítségével.

2. A gúla magassága z-vel párhuzamos, ezért elegendő K-ból a z tengellyel párhuzamos egyenesre 1,5 cm-t felmérni. A szakasz végpontja a gúla csúcspontja: M

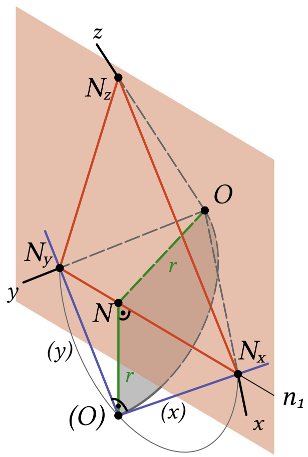
3. A gúla oldalélei az $\overline{EM}$, $\overline{FM}$, $\overline{GM}$ és $\overline{HM}$ szakaszok.

Jelöljük a láthatóságot is a kész ábrán.

9.3.3. Koordinátasík leforgatása merőleges axonometriában

A frontális axonometriához hasonlóan, merőleges axonometriában is lehetséges a koordinátasíkok képsíkba forgatása. A leforgatás segítségével a koordinátasíkokon minden síkbeli szerkesztés elvégezhető. (9.39. ábra)

Válasszunk ki egy koordinátasíkot, például az $[x, y]$-t. A célunk az, hogy a képsík nyomháromszögének n_1 oldalegyenese körül az $[x, y]$-t a képsíkba forgassuk. Az n_1 a leforgatás során fixen marad, így N_x és N_y fixpontok. Az O origó a forgatás során egy körön mozog, amelynek középpontja N, a kör síkja merőleges az n_1-re.



9.39. ábra. Koordinátasík leforgatása merőleges axonometriában

Az O pont, valamint az N_x és N_y fixpontok segítségével az x és az y tengelyek a képsíkba forgathatók.

Térjünk át az axonometrikus vetületekre, ahol a tengelykereszt és a képsík nyomháromszögét már felvettük (9.40. ábra). Azt is tudjuk, hogy $n_1 = (n_1)$.

Az a körív, amelyet az O pont ír le a forgatás során, szakaszként látszik ezen a merőleges vetületen. Állítsunk ezért merőleges egyenest O-ból az n_1-re, ezen az egyenesen van a keresett (O) pont.

Az x és y tengelyek N_x és N_y pontjai fixen maradnak, ezért az (x) és (y) forgatott képeknek is pontjai. Az x és y tengelyek merőlegesek egymásra, amelyet a leforgatott képen látnunk kell. Ezért az $\overline{N_xN_y}$ szakasz fölé írt Thalész-körre illeszkedik az (O).

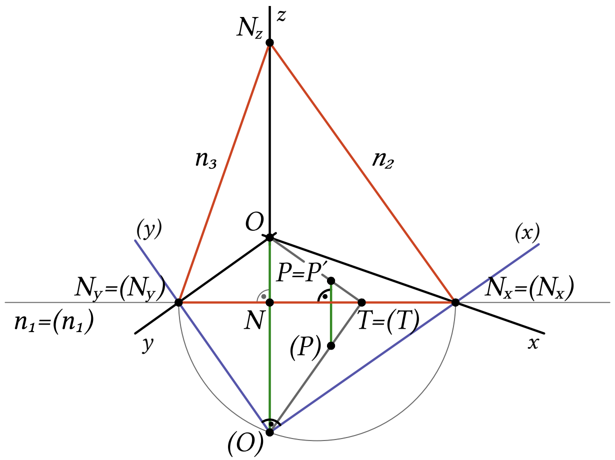
A két megállapításból következik, hogy az előbbi Thalész-kör és az O-ból állított merőleges metszéspontja az (O) pont. (A körnek és az egyenesnek két közös pontja van, általában az O-tól távolabbi metszéspontot választjuk leforgatott képnek.) Innen már evidens, hogy a tengelyek leforgatottjai: $(x) = \overleftrightarrow{ON_x}$ és $(y) = \overleftrightarrow{ON_y}$. Ezzel a két egyenesével forgattuk le a teljes $[x, y]$ koordinátasíkot.

Legyen a P az $[x, y]$ tetszőleges pontja. Szeretnénk ezt a pontot is leforgatni, az $(O, (O))$ pontpár segítségével. (9.40. ábra)

1. Az $\overleftrightarrow{OP}$ egyenes az n_1 nyomvonalat a $T = (T)$ fixpontban metszi.

2. Két pontja segítségével az előbbi egyenes forgatott képe az $\overleftrightarrow{(O)(T)}$.

3. Az axonometria megtartja az egyes egyeneseken fellépő arányokat, ezért az $\overline{OP}$ és $\overline{PT}$ szakaszok arányát kell a leforgatott képre átmásolni. Párhuzamos szelők tételével megszerkeszthető a (P) pont. ($\overleftrightarrow{O(O)}$ és $\overleftrightarrow{P(P)}$ párhuzamos egyenesek.)



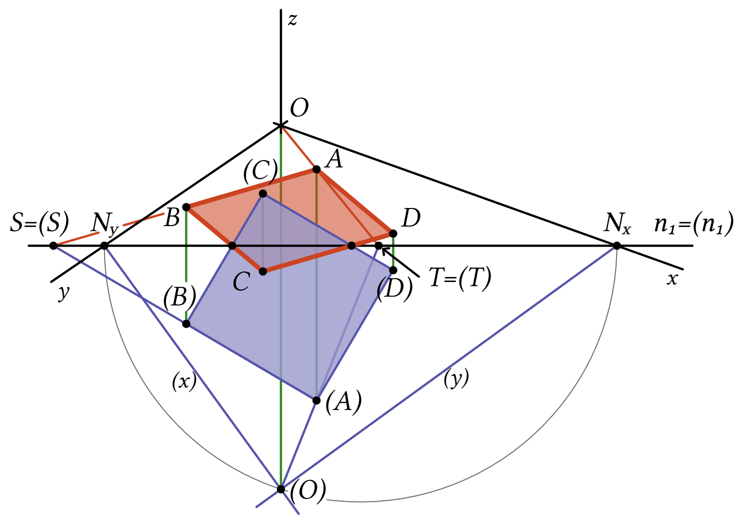
9.40. ábra. Koordinátasík leforgatása merőleges axonometriában

Látható, hogy ez a leforgatás egy fixen maradó egyenessel ($n_1 = (n_1)$) rendelkező párhuzamosság- és aránytartó transzformáció, amelyben az O képe (O). Ebből következik, hogy *az $[x, y]$ koordinátasík axonometrikus és forgatott képe merőleges(!) affinitással egymásnak megfeleltethető.* (Lásd a 2.2.1. fejezetet.)

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a frontális és a merőleges axonometria esetén a koordinátasík leforgatásának technikája igen hasonló. (Lásd a 9.3.2. fejezetet.)

$[x, y]$-beli szabályos síkidom szerkesztése

Adott egy merőleges axonometria, valamint egy, az $[x, y]$-ban fekvő $\overline{AB} = a$ szakasz. Szerkesztendő olyan négyzet az $[x, y]$ koordinátasíkban, amelynek egyik oldala az $\overline{AB}$. (9.41. ábra)



9.41. ábra. Négyzet szerkesztése merőleges axonometriában

A szerkesztés lépései

Kiindulásként vegyük fel a merőleges axonometria tengelykeresztjét tetszőlegesen, és határozzunk meg ahhoz a képsík nyomháromszögét. Jelöljük ki az $\overline{AB}$ axonometrikus képét is.

1. Forgassuk le az $[x, y]$ koordinátasíkot, és az $\overline{AB}$ szakaszt.
   (a) Az $n_1 = (n_1)$ nyomvonal és minden pontja fixen marad. A korábban ismertetett módon forgassuk le az O pontot: (O).
   (b) Forgassuk le például az A végpontot. Alkalmazzuk az n_1 tengelyű, $(O, (O))$ pontpárral bíró merőleges affinitást. (Lásd a 9.40. ábrát.)
   (c) A merőleges affinitást ismét felhasználva, határozzuk meg a B pont forgatott képét is: (B). (Az ábrán az A pont segítségével szerkesztettük meg.)
2. Szerkesszünk négyzetet, amelynek az $\overline{(A)(B)}$ szakasz az egyik oldala: $(A)(B)(C)(D)$.
3. Forgassuk „vissza” a (C) és (D) csúcsokat.
   (a) A $(B, (B))$ pontpár felhasználásával (C)-ból a C axonometrikus kép könnyen szerkeszthető. A $\overline{(B)(C)}$ oldal elmetszi az affinitás tengelyét, amely így az axonometrikus képnek is eleme. A B-ből ezen a ponton át egy félegyenest rajzolunk, majd a (C)-ból húzott, n_1-re merőleges egyenes (azaz az affinitás iránya) kimetszi a keresett C pontot.
   (b) A D pont esetén kihasználhatjuk, hogy a párhuzamosságtartás miatt a négyzet képe egy paralelogramma.

A fejezet utolsó példájában egy adott élhosszúságú kocka képét szerkesztjük meg. A frontális axonometriával ellentétben, itt a z tengelyen *nem* mérhetjük fel valódi nagyságban a magasságot.

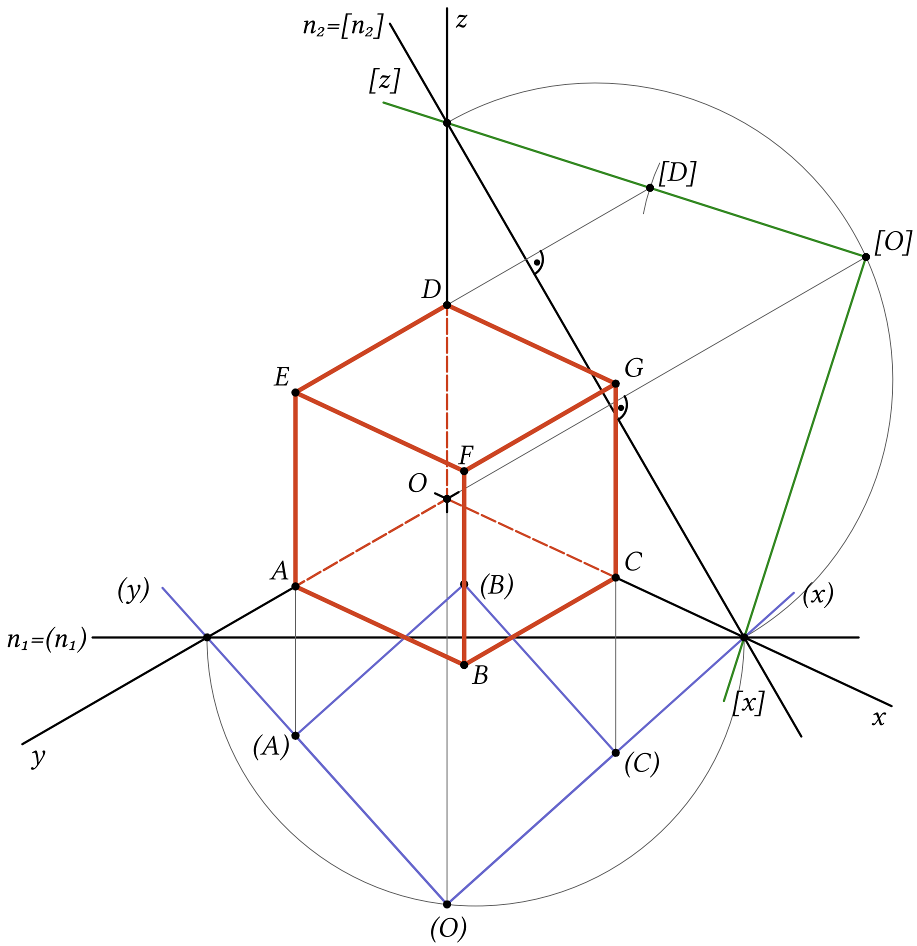
Speciális helyzetű kocka szerkesztése

Ábrázoljunk merőleges axonometriában egy olyan 3 cm élhosszúságú kockát, amelynek egyik csúcsa az origó, és oldalélei a koordinátatengelyekre illeszkednek. (9.42. ábra)

A szerkesztés lépései

Adott a merőleges axonometria tengelykeresztje és a képsík nyomháromszöge. A feladat megoldásához minden eszköz a rendelkezésünkre áll.

1. Az $[x, y]$-beli négyzet megszerkesztése
   (a) Forgassuk le az $[x, y]$ koordinátasíkot.
   (b) A (x) és (y) tengelyekre (az (O)-tól) mérjünk fel a 3-3 cm-t: (A) és (C). Szerkesszük meg a (B) csúcspontot is.
   (c) A merőleges affinitás irányával adjuk meg az A és C axonometrikus képeket. A B pontot a képnek mint paralelogrammának a hiányzó csúcsaként kapjuk.
2. Magasság felmérése a z tengelyre
   (a) Forgassuk le az $[x, z]$ koordinátasíkot. A leforgatás technikája teljesen megegyezik az $[x, y]$ koordinátasíknál látottakkal: a nyomháromszög megfelelő oldalára Thalész-kört írunk, majd O-ból erre az oldalra állított merőleges egyenes adja az O forgatott képét. Ezt a leforgatott képet $[O]$-val jelöltük, a koordinátatengelyek forgatott képei: $[x]$ és $[z]$.
   (b) Mérjük fel $[z]$-ra az $[O]$-ból a kocka magasságát, így kapjuk a $[D]$ pontot.
   (c) Merőleges iránnyal adódik $[D]$-ból a D axonometrikus kép.
3. Toljuk el az $\overline{OD}$ függőleges élt a kocka alapjának többi csúcsába: $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ és $\overline{CG}$. A kocka fedőlapja a $DEFG$ négyzet.



9.42. ábra. Speciális helyzetű kocka szerkesztése

9.3.4. Gyakorló feladatok

A feladatokban az adott axonometria tengelykeresztjét és esetleges rövidüléseit tetszőlegesen felveheti.

1. Szerkesszen 2 cm alapélű, 3 cm magasságú, $[x, y]$-on álló, négyzet alapú egyenes gúlát
   (a) madárvetületben;
   (b) katonai vetületben;
   (c) izometrikus axonometriában;
   (d) műszaki tengelykereszt felhasználásával!

2. Szerkesztendő
   (a) frontális axonometriában
   (b) merőleges axonometriában

   olyan szabályos háromszög alapú egyenes hasáb, amelynek alaplapja $[x, y]$-beli, alapélei 3 cm hosszúak, magassága 4 cm. (Segítség: A feladatnak végtelen sok megoldása van, ugyanis a szabályos háromszög tetszőlegesen elhelyezhető a koordinátasíkban.)

3. Szerkesztendő
   (a) frontális axonometriában
   (b) merőleges axonometriában

   egy négyzet alapú egyenes gúla, amelynek alaplapja az $[x, z]$ síkban van, az alaplap egyik csúcsa az y tengelyen van, alapélének hossza tetszőleges, a magassága az alapél hosszának kétszerese. (A négyzet alaplap a koordinátasíkban bárhol elhelyezhető.)

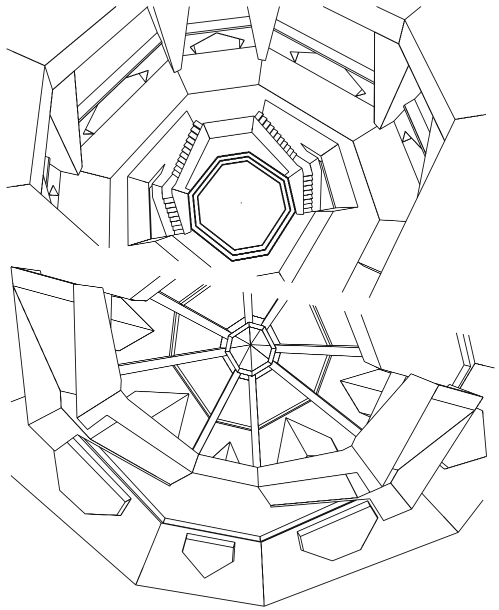
10. fejezet

Perspektíva

10.1. A perspektíva alapjai

A **perspektíva** egyetlen képsíkra történő középpontos vetítés. E vetítési mód igen hasonló ahhoz, amit például a fényképek révén ismerünk – a műszaki gyakorlatban ennek megfelelően perspektív képek segítségével szokás szemléletes és közérthető módon bemutatni a terveket. Érdemes ugyanakkor tudatosítani, hogy bár a perspektív kép számunkra „természetesnek” tűnik, ez az ábrázolási mód is konszenzuson alapuló szabályrendszer alkalmazásán alapul. (Európában már a fényképezőgép megjelenése előtt is készültek szabatos perspektív képek, festmények – ám a távol-keleti vagy bizánci festészet például nem (nem így) élt ezzel az eszközzel.)

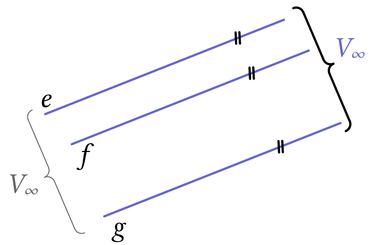
Mint a 10.1. ábrán is megfigyelhető, a perspektív képen a párhuzamos élek (például a falak függőleges élei) összetartanak, és a nézőponttól távolabbi élek (például a falak vízszintes élei esetén) rövidebbnek látszanak, mint a közelebbiek. A párhuzamos vetítéssel szemben tehát itt komoly jelentőséget kap a nézőpont helye, távolsága is – ahogy a valóságban sem ugyanazt a képet kapjuk, ha fényképezéskor közelebb megyünk a témához, mint ha a zoommal ráközelítünk. Természetesen most is fontos a nézet (vetítés) iránya – a következőkben az úgynevezett *álló képsíkú* perspektíva szabályait vizsgáljuk, amikor (nevéhez méltóan) a függőleges a képsík (10.1.2).



10.1. ábra. Kecskeméti játszóház perspektív belső képe
egy tetőn betekintő madár, illetve egy vakond szemszögéből (tervező: Kerényi Imre)

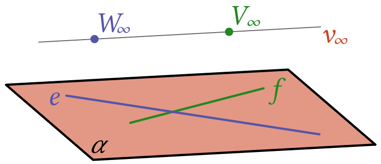
10.1.1. Végtelen távoli elemek

A **végtelen távoli pont**okról a 2.2.2. fejezetben már említést tettünk: minden egyeneshez „hozzáadhatunk” még egy pontot, az egyenes végtelen távoli pontját. Ha két egyenes párhuzamos, akkor a végtelen távoli pontjuk azonos. (10.2. ábra)



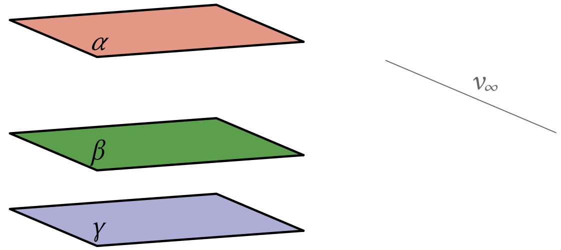
10.2. ábra. Párhuzamos egyenesek végtelen távoli pontja

Ezt a gondolatot általánosíthatjuk. A tér bármely síkját kiegészíthetjük egy egyenessel, a sík **végtelen távoli (ideális) egyenes**ével. Ezen a végtelen távoli egyenesen rajta van a sík összes egyenesének összes végtelen távoli pontja. (10.3. ábra)



10.3. ábra. Sík végtelen távoli egyenese

Ha két sík párhuzamos, akkor a végtelen távoli egyenesük azonos. (10.4. ábra)



10.4. ábra. Párhuzamos síkok végtelen távoli egyenese

10.1.2. A perspektív leképezés rendszere

Adott egy sík és egy arra nem illeszkedő pont. Ha a tér pontjait a ponton mint centrumon keresztül a síkra mint képsíkra vetítjük, egy **centrális vetítés**t kapunk – lásd a 2.1. fejezetet. Az így kapott leképezés nem(!) párhuzamosságtartó és nem(!) aránytartó. Erre szép példát láthatunk a 10.3.1. fejezetben.

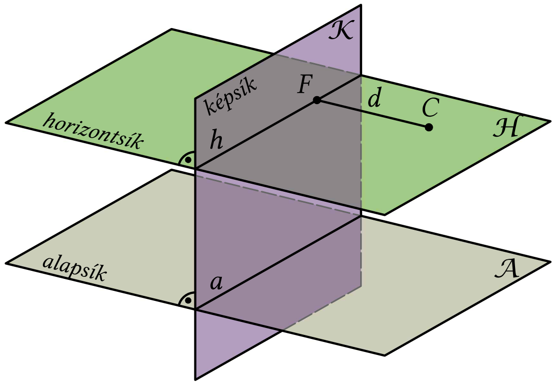
(Álló képsíkú) perspektíva

Legyen adott egy centrális vetítési rendszer $\mathcal{K}$ képsíkkal és C centrummal a végtelen távoli elemekkel kibővített térben. Vegyünk fel egy, a képsíkra merőleges $\mathcal{A}$ síkot, az ún. *alapsík*ot, továbbá egy ezzel párhuzamos, a centrumot tartalmazó $\mathcal{H}$ síkot, amelyet *horizontsík*nak nevezünk. Az ilyen módon megadott centrális vetítést **álló képsíkú perspektívá**nak, röviden *perspektívá*nak nevezzük.

A centrum képsíkra eső merőleges vetülete az F *főpont.* A centrum és a képsík távolsága a d-vel jelölt *distancia.* Az alapsík és a képsík metszésvonala az *alapvonal*, a horizontsík és a képsík metszésvonala pedig a *horizontvonal.* Az ábrázolandó objektumok általában az alapsíkon és a képsík mögött vannak, a kapott képet *perspektív kép*nek nevezzük.

Az alapsíkot általában vízszintesnek, a képsíkot függőlegesnek tekintjük.

A perspektíva rendszere egyértelműen adott, ha ismerjük a képsíkot, az alapsíkot és a centrumot. Ezzel egyenértékű, ha ismert a képsíkon az alapvonal, a horizontvonal, a főpont és a distancia. (Ez utóbbi két adatot megadja a centrum forgatott képe, amelyről később lesz szó.)

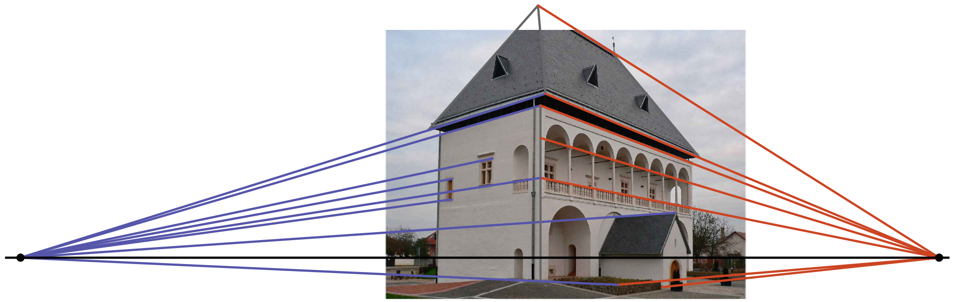


10.5. ábra. A perspektív rendszer alapelemei

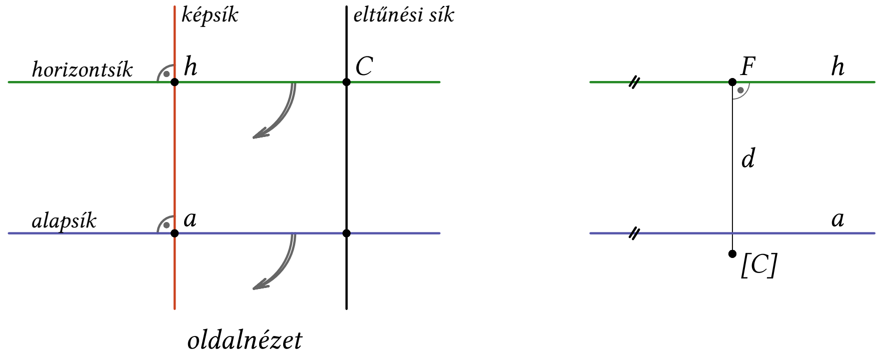
Megjegyzés: Ha a képsík és az alapsík nem 90°-ot zár be egymással, dőlt képsíkú perspektíváról beszélünk.

A horizontvonal elnevezése nem véletlen. Ha centrumnak egy fényképezőgépet képzelünk el, akkor a horizontvonal esetében a hétköznapi életben is használatos horizontra lehet gondolni: a talajjal párhuzamos (vízszintes) egyenesek képei a horizonton találkoznak (10.6. ábra). (Az alapvonallal most nem foglalkozunk.)

Perspektív képek szerkesztéséhez szükség van még egy lépésre: **az alap- és horizontsíkot a képsíkba forgatjuk (90°-kal)**. Ekkor a centrum forgatott képe a képsíkba kerül, ezt $[C]$-tal jelöljük.



10.6. ábra. A nyírbátori kastély, a horizontvonal feltüntetésével



10.7. ábra. Az alap- és horizontsík képsíkba forgatása

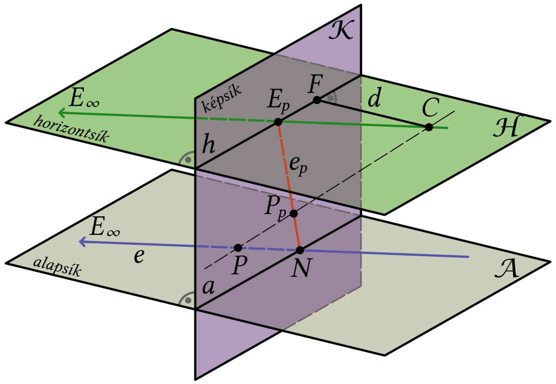
A 10.7. ábra bal oldalán egy oldalnézeti képet láthatunk a síkok „összehajtásáról”. Az ábra jobb oldalán a képsíkot látjuk – később minden szerkesztést itt végzünk el. A képsíkon lévő adatokból leolvasható minden, a perspektív rendszer rekonstruálásához szükséges információ: a d *distancia*, amely $[C]$ és h távolsága; a centrum alapsíktól való távolsága pedig az a és h közötti távolság (mivel C a horizontsíkba esik).

Megjegyzések:

- Az alapsík 90°-os leforgatását (az alapvonal körül) csak később, a 10.4.2. fejezetben tárgyaljuk részletesen.
- Az oldalnézeti ábrán látható egy olyan sík, amely áthalad C-n, és párhuzamos a képsíkkal. Erre az ún. *eltűnési sík*ra most nem lesz szükségünk, de igen szép geometriai tulajdonsága van: a pontjainak perspektív képei „eltűnnek”, pontosabban a perspektív képek végtelen távoli pontok.

10.2. Pont, egyenes és sík ábrázolása

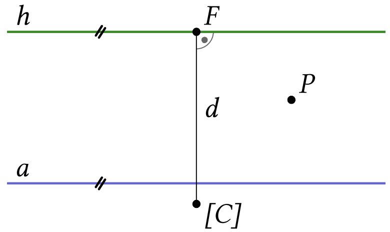
Bevezetésként vizsgáljuk meg a 10.8. ábrát, amely egy alapsíkban lévő pont perspektív képének szerkesztését szemlélteti:



10.8. ábra. Alapsíkban lévő pont perspektív képének szerkesztése

Megjegyzés: A szemléltető ábrákon a perspektív képeket p indexszel láttuk el, a végleges perspektív képeken azonban ezt a plusz jelölést elhagyjuk.

Észrevehetjük, hogy a P pont ábrázolásához egy alapsíkban fekvő e egyenest használtunk fel. Ennek az az oka, hogy nem lehet egy pontot pusztán a perspektív képével meghatározni – nem tudjuk csak a perspektív kép segítségével rekonstruálni a pont eredeti helyét – figyeljük meg a 10.9. ábrát.



10.9. ábra. Pont – hiányos – perspektív képe

Ezt a problémát könnyedén feloldhatjuk. A perspektív szerkesztések alapja a pont ábrázolása helyett az *egyenes ábrázolása.*

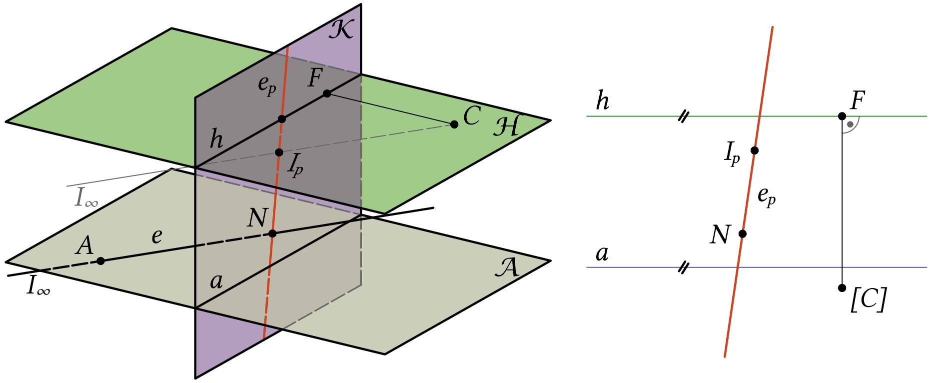
10.2.1. Egyenes ábrázolása

Perspektívában egy egyenes képe szintén egyenes – azonban nem elég csupán az egyenes perspektív képét megadni. Az egyenest két speciális pontja segítségével viszont már egyértelműen megadhatjuk.

Egyenes nyompontja és iránypontja

Adott egy perspektív rendszer és egy tetszőleges egyenes. Azt a pontot, ahol az egyenes metszi a képsíkot, az egyenes *nyompontjá*nak nevezzük.
Az egyenes végtelen távoli pontjának a képe az egyenes *iránypontja.*
Egy egyenes perspektív képét egyértelműen meghatározza a nyom- és iránypontja, ha azok léteznek. (10.10. ábra)

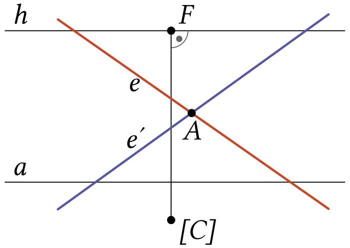
Az egyenes nyompontja már ismert lehet a korábbi leképezési rendszerekből. Az iránypont azonban csak centrális vetítések esetében fordul elő. Érdekes és alapvető kérdés, hogyan kaphatjuk meg ezt a pontot.
Minden pontot és a képét egy centrumon áthaladó vetítőegyenes köti össze.



10.10. ábra. Egyenes nyompontja és iránypontja

(Lásd a 10.8. ábrát.) Az egyenes I_∞ végtelen távoli pontját is összeköthetjük a C centrummal: az I_∞ „eléréséhez” húzzunk párhuzamost az e egyenessel a C-n keresztül. Ez a vetítőegyenes a képsíkot az I_p pontban metszi, amely az egyenes iránypontja.

A műszaki gyakorlatban sokszor előfordul, hogy egy egyenesnek a perspektív képe és az alapsíkra eső merőleges vetületének perspektív képe adott (10.11. ábra). Az A pont az egyenes alapsíkkal közös pontja.



10.11. ábra. Egyenes és alapsíkra eső merőleges vetületének perspektív képe

Ebből a szemléletes megadási módból meghatározható az egyenes nyom- és iránypontja is, ezért *az egyenes ebből a két képből is rekonstruálható.*

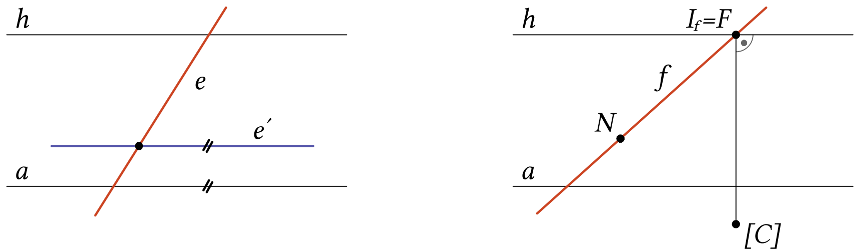
Speciális egyenesek

Tekintsünk néhány speciális állású egyenest. (A térbeli ábráktól eltekintünk. Javasoljuk a Kedves Olvasónak, hogy gyakorlásképpen próbáljon meg szemléltető ábrát készíteni az egyenesekről, például a 10.5. ábra felhasználásával.)

Képsíkkal párhuzamos és képsíkra merőleges egyenesek

- Ha egy e egyenes *párhuzamos a képsíkkal*, akkor az alapsíkra eső merőleges vetülete párhuzamos az alapvonallal, míg a perspektív képe tetszőleges. Az egyenesnek ekkor nincs nyom- és iránypontja.

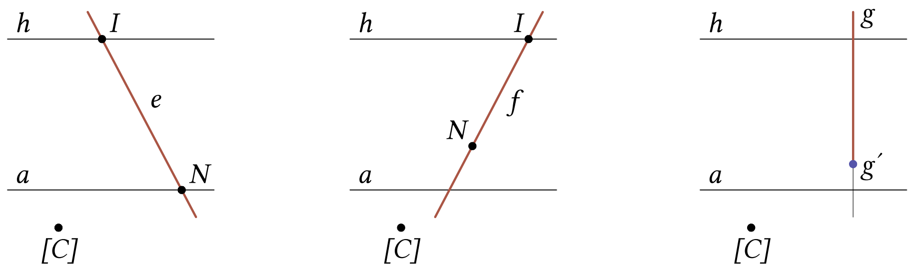
- Ha egy f egyenes *merőleges a képsíkra*, akkor iránypontja éppen a főpont. Ennek az az oka, hogy az iránypont meghatározásához az f-fel kell párhuzamost húzni a C-n keresztül. Ez az egyenes így szintén merőleges a képsíkra, azaz az F főpontot adja.



10.12. ábra. Képsíkkal párhuzamos és képsíkra merőleges egyenesek perspektív képe

Alapsíkkal párhuzamos és alapsíkra merőleges egyenesek

- A 10.13. ábrán látható e egyenes *benne van az alapsíkban*, ezért nyompontja az alapvonalra, iránypontja a horizontvonalra esik. Az e mint alapsíkbeli egyenes az alapvonal egy pontjában metszi a képsíkot – ez a nyompontja. Az iránypont esetén elegendő arra gondolni, hogy ha egy egyenes illeszkedik egy síkra, akkor a végtelen távoli pontja illeszkedik a sík végtelen távoli egyenesére (lásd a 10.1.1. fejezetet). Ez azt jelenti, hogy az e iránypontja illeszkedik az alapsík irányvonalára (azaz a horizontvonalra). (Lásd a 10.8. ábrát.)
- A 10.13. ábrán látható f egyenes *párhuzamos az alapsíkkal*, emiatt a nyompontja tetszőleges, de az iránypontja a horizontvonalon van. Az iránypontjának meghatározásakor, a C-ből a végtelen távoli pontjához húzott vetítőegyenes párhuzamos az alapsíkkal, azaz a horizontsíkban van.
- A 10.13. ábrán látható g egyenes *merőleges az alapsíkra* (azaz függőleges egyenes), ezért az alapsíkra eső merőleges vetülete egyetlen pont, és így perspektív képe merőleges az alapvonalra. Röviden: függőleges egyenes képe függőleges marad. A függőleges egyenesek egyúttal párhuzamosak is a képsíkkal, így nem létezik nyom- és iránypontjuk.

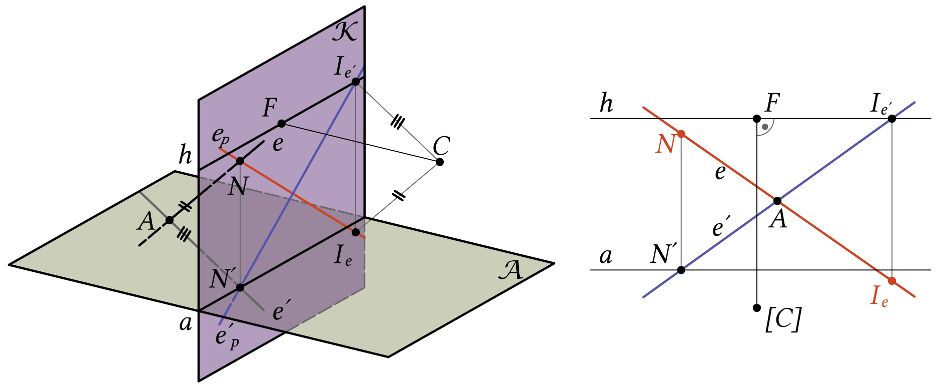


10.13. ábra. Alapsíkban lévő, azzal párhuzamos, valamint arra merőleges egyenesek perspektív képe

Térjünk vissza egy tetszőleges egyenes megadási módjaihoz.

Egyenes nyom- és iránypontjának meghatározása

Adott egy perspektív rendszer, továbbá egy e egyenes perspektív képe és az alapsíkra eső merőleges vetületének e' perspektív képe. Szerkesszük meg az egyenes nyompontját és iránypontját! (10.14. ábra)



10.14. ábra. Egyenes nyom- és iránypontjának szerkesztése

A szerkesztés lépései

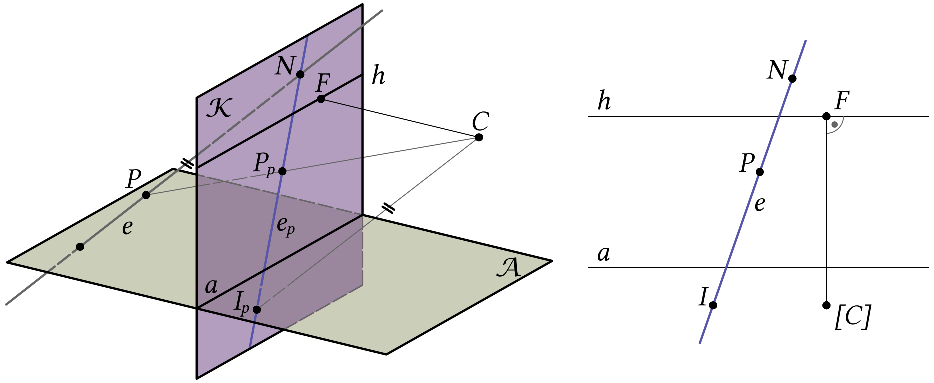
Induljunk ki egy perspektív rendszerből, azaz adjuk meg az alap- és horziontvonalat, továbbá a centrum forgatott képét: a, h és $[C]$.

Használjuk ki, hogy az e' az egyenes alapsíkra eső merőleges vetülete, továbbá minden pontot és a merőleges vetületét egy függőleges egyenes köt össze.
Az e' az a alapvonalat az N' pontban metszi. Az N' éppen az N nyompont merőleges vetülete – hiszen mindkettő a képsíkban van –, ezért N'-ből az a-ra állított merőleges kimetszi e-ből a keresett N pontot.
Az e' benne van az alapsíkban, ezért iránypontja a horizontvonalon van: $I_{e'}$. Azt is tudjuk, hogy az egyenes minden pontját egy függőleges egyenes

segítségével vetítjük az alapsíkra. Igaz ez az iránypontra is, ezért az $I_{e'}$-ből, az alapvonalra állított merőleges kimetszi e perspektív képéből az egyenes I_e iránypontját.

10.2.2. Pont ábrázolása

Perspektívában egy pontot kétféleképpen ábrázolhatunk. Geometriai megközelítéssel a pontot egy olyan egyenesre illesztjük, amely nyom- és iránypontjával van megadva. (10.15. ábra)

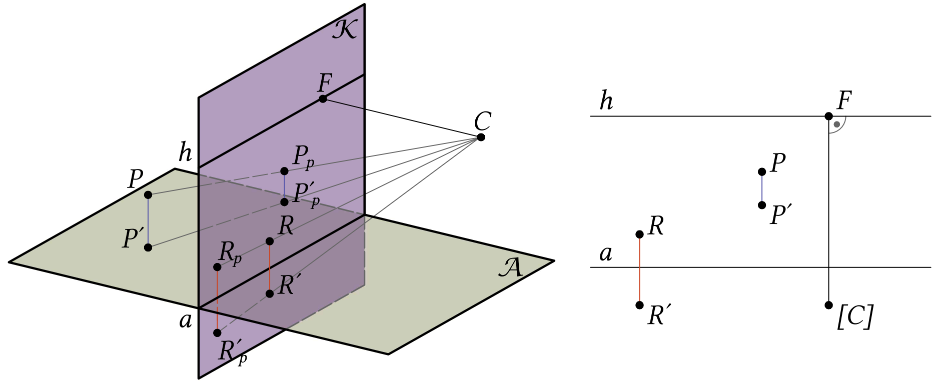


10.15. ábra. Pont megadása segédegyenessel perspektívában

A gyakorlati életben legtöbbször a pont perspektív képét és az alapsíkra eső merőleges vetületének perspektív képét adjuk meg, felhasználva, hogy a képet és a merőleges vetületet összekötő függőleges egyenes képe függőleges marad. A 10.16. ábrán a P pont a képsík mögött, míg az R a képsík előtt helyezkedik el.

Megjegyzések:

- Ha a szövegkörnyezet egyértelmű, az alapsíkban fekvő pontok esetében nem tüntetjük fel a vetületet. (Például $P = P'$ helyett csak P-t írunk.)



10.16. ábra. Pont megadása az alapsíkra eső vetületével perspektívában

- Bár a gyakorlatban igen ritkán fordul elő, a centrum mögötti pontokat is lehet ábrázolni.

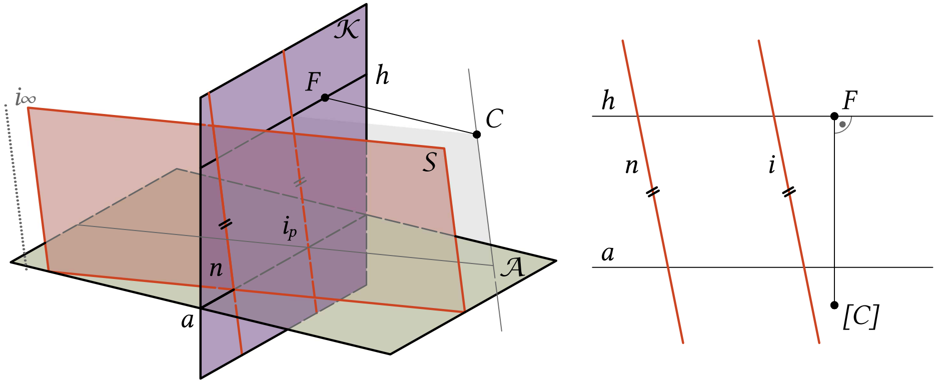
10.2.3. Sík ábrázolása

A perspektíva célja látványos ábrák készítése, ezért teljes síkot nem gyakran ábrázolunk. Amennyiben mégis szükséges, úgy – az egyenes ábrázolásának általánosításával – egy síkot két speciális egyenesével adhatunk meg.

Sík nyomvonala és irányvonala

Adott egy perspektív rendszer és egy tetszőleges sík. A sík és a képsík metszésvonalát a sík *nyomvonalá*nak nevezzük. A sík végtelen távoli egyenesének képe a sík *irányvonala*. Egy síkot egyértelműen meghatároz a nyom- és irányvonala, amennyiben azok léteznek. (10.17. ábra)

A sík irányvonalát megkapjuk, ha a C centrumon keresztül az eredeti síkkal párhuzamos síkot veszünk fel, majd meghatározzuk ezen sík metszésvonalát a képsíkkal.



10.17. ábra. Sík megadása perspektívában

Megjegyzés: Az alapsík nyomvonala az alapvonal, irányvonala a horizontvonal.

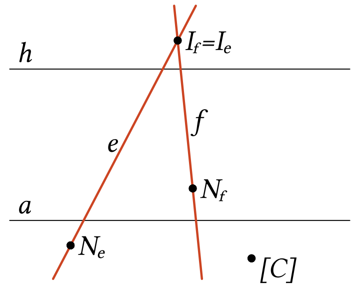
10.3. Illeszkedési és metszési alapfeladatok

Ebben a fejezetben csak az alkalmazások szempontjából érdekes eseteket vizsgáljuk meg. Mivel a perspektíva mint centrális vetítés megőrzi az illeszkedést, ezért a legtöbb esetben könnyű a feladatok megoldása.

10.3.1. Párhuzamosság perspektívában

Két egyenes párhuzamossága

Azt már jól tudjuk, hogy párhuzamos egyeneseknek azonos a végtelen távoli pontja, és azt is, hogy egy egyenes végtelen távoli pontjának perspektív képe az egyenes iránypontja. Ebből a két információból azonnal következik, hogy *párhuzamos egyenesek perspektív képeinek azonos az iránypontja.*
Ez azt is jelenti, hogy a párhuzamos egyenesek képei metszőek, ami csak centrális vetítéseknél fordul elő.

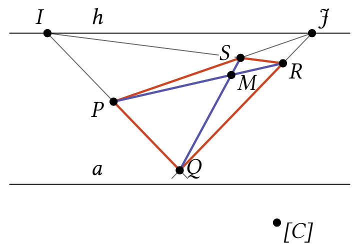


10.18. ábra. Párhuzamos egyenesek

Ezzel az ismerettel már megoldható a következő feladat.

Alapsíkban fekvő paralelogramma képe

Ábrázoljunk perspektívában egy alapsíkban fekvő $PQRS$ paralelogrammát!



10.19. ábra. Alapsíkban fekvő paralelogramma

A szerkesztés lépései

Kiindulásként, adjunk meg egy perspektív rendszert. Nyilvánvaló, hogy a paralelogrammának három pontja tetszőlegesen felvehető, csupán az utolsó pont szerkesztése kérdés.

1. Vegyünk fel egy tetszőleges $\overline{PQ}$ szakaszt. Ha benne van az alapsíkban, akkor az egyenesének iránypontja a horizontvonalon van. Így kapjuk az I iránypontot.
2. Tetszőlegesen felvehető egy R pont is. A $\overline{QR}$ szakasz egyenese is alapsíkbeli, ezért iránypontja szintén a h-ra illeszkedik: J.
3. Párhuzamos egyenesek képeinek ugyanaz az iránypontja, ezért a negyedik csúcspont rajta van a $\overleftrightarrow{PJ}$ és $\overleftrightarrow{RI}$ egyeneseken. A két egyenes metszéspontja az S pont.

Az ábrán – mivel a feladat egyértelműen fogalmaz – nem jelöltük, hogy a pontok az alapsíkban vannak. A precíz jelölés a $P = P'$, ..., $S = S'$ lenne.

Fontos megjegyzés: A kapott eredmény jól mutatja, hogy a perspektíva nem párhuzamosságtartó. Ha berajzoljuk a paralelogramma átlóit, az is szépen látszik, hogy az átlók M metszéspontjának perspektív képe nem felezi az átlók perspektív képeit; röviden: a perspektíva nem aránytartó.

Egyéb esetek

- Két egyenes párhuzamosságát általánosítva, *két sík párhuzamos, ha az irányvonalaik azonosak.*
- *Egy sík és egy egyenes párhuzamos, ha az egyenes iránypontja a sík irányvonalára illeszkedik.* Ez a feltétel nyilvánvaló, ugyanis sík és egyenes párhuzamossága esetén a végtelen távoli elemek illeszkednek egymásra, és a perspektíva illeszkedéstartó. Erre már láttuk példát a 10.2.1. fejezetben, az alapsíkkal párhuzamos egyenesek esetén.

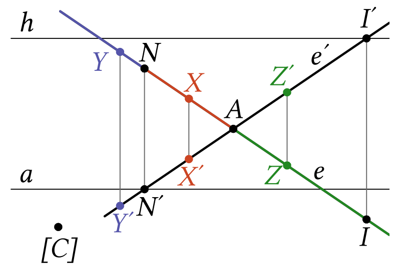
10.3.2. Illeszkedés és metszés perspektívában

Az illeszkedési alapfeladatok egy részét az előző fejezetekben már megismertük. Emiatt a következőkben csak három, gyakran előforduló illeszkedési/metszési feladatot oldunk meg.

Egyenesre illeszkedő különböző helyzetű pontok

Perspektívában adott egy egyenes képével és az alapsíkra eső merőleges vetületének képével. Vegyünk fel három pontot az egyenesen az alábbi módon:

1. egy X pontot, amely a képsík mögött és az alapsík fölött,
2. egy Y pontot, amely a képsík előtt és az alapsík fölött,
3. egy Z pontot, amely a képsík mögött és az alapsík alatt van.



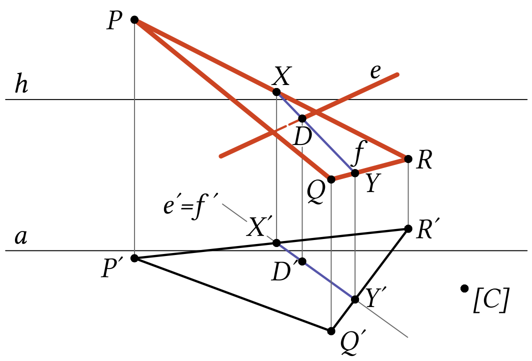
10.20. ábra. Egyenesre eső pontok

A szerkesztés a 10.2.2. fejezet alapján evidens. Ha az egyenes az A pontban metszi az alapsíkot, akkor az alapsík alatti pontok képe is egyértelmű.

A következő példa minden ábrázolási eljárásban alapvető – a két korábban ismertetett vetítési rendszerben a 4.2.1. fejezetben és a 9.2.2. fejezetben található.

Háromszög és egyenes döféspontja

Adott egy háromszög és egy egyenes perspektívában. (Mindkét alakzatot képével és az alapsíkra eső merőleges vetületének képével vegyük fel.) Szerkesszük meg a háromszög és az egyenes döféspontját! (10.21. ábra)



10.21. ábra. Háromszög és egyenes döféspontja

A szerkesztés lépései

A megoldáshoz csak a térelemek illeszkedését használjuk fel. Az ötlet fedésben lévő egyeneseket használ ugyanúgy, mint Monge-projekcióban és axonometriában.

1. Tegyük fel, hogy az e' egyúttal egy, a *háromszög síkjában lévő* f egyenes merőleges vetülete is: $e' = f'$.
2. Az f egyenes háromszögbe eső szakasza az $\overline{XY}$ szakasz, ennek vetülete az $\overline{X'Y'}$.
3. Tudjuk, hogy ha egy szakasz illeszkedik egy háromszögre, akkor a megfelelő képeiknek is illeszkedniük kell.

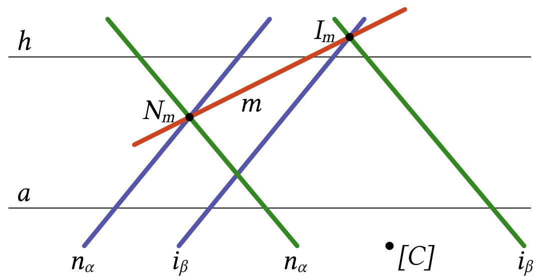
   Húzzunk függőleges egyeneseket az X' és Y' pontokból, és vetítsük „vissza” a háromszög perspektív képére a két pontot: X (a $\overline{PR}$-en) és Y (a $\overline{QR}$-en).
4. A kapott $\overline{XY}$ háromszögbeli szakaszt elmetszi az e egyenes, mivel közös a függőleges síkjuk. A metszéspontjuk a D pont.
5. A D a keresett döféspont, vetülete a D' pont.

A láthatóság ábrázolásánál az az objektum látszik, amelyik közelebb van a centrumhoz. (Ennél az ábránál azt figyelhetjük meg, hogy a pontok a képsík előtt vagy mögött vannak, illetve mennyire vannak magasan az alapsíkhoz képest.)

Végül érdekességként szerkesszük meg két sík metszésvonalát.

Két sík metszésvonala

Perspektívában adott két sík (α és β) nyomvonalaikkal és irányvonalaikkal. Szerkesztendő a két sík metszésvonala. (10.22. ábra)



10.22. ábra. Két sík metszésvonala

A szerkesztés lépései – útmutató

A szerkesztés bár nem látványos, de igen egyszerű. A két nyomvonal metszéspontja a metszésvonal nyompontja, hiszen mindkét nyomvonal benne van a képsíkban. Hasonlóan, a két sík végtelen távoli egyenesei is metszik egymást. Ez a metszéspont a metszésvonal végtelen távoli pontja. Ezt perspektívában az irányvonalak segítségével szerkeszthetjük meg. A két irányvonal metszéspontja a metszésvonal iránypontja.

10.3.3. Gyakorló feladatok

1. Perspektívában adott egy pont (perspektív) képével és az alapsíkra eső merőleges vetületének (perspektív) képe. Ábrázolja azt a képsíkra merőleges egyenest (szintén két képével), amely átmegy ezen a ponton!

2. Ábrázoljon perspektívában egy olyan egyenest, amely párhuzamos a képsíkkal és az alapsíkkal $60°$-os szöget zár be! (Segítség: Az egyenes speciális helyzete miatt a kért szög valódi nagyságban mérhető.)

3. Adott egy egyenes nyompontjával és iránypontjával. Szerkesztendő az egyenes alapsíkra eső merőleges vetületének perspektív képe.

4. Legyen adott egy egyenes nyompontjával és iránypontjával perspektívában. Ábrázoljon egy pontot ezen az egyenesen, majd szerkessze meg a pont alapsíkra eső merőleges vetületének perspektív képét! (Segítség: A feladat megoldásához szükség van az egyenes alapsíkra eső merőleges vetületére.)

5. Perspektívában adott egy sík nyomvonalával és irányvonalával. Vegyen fel ebben a síkban egy tetszőleges egyenest!

6. Ábrázoljon perspektívában két párhuzamos síkot!

7. Adott egy sík nyomvonalával és irányvonalával perspektívában. Szerkessze meg a sík alapsíkkal való metszésvonalát. (Segítség: A feladatban két „tetszőleges” sík metszésvonalát kell meghatározni.)

8. Adjon meg perspektívában egy háromszöget képével és az alapsíkra eső merőleges vetületének képével, továbbá egy P pont perspektív képét úgy, hogy az a háromszög perspektív képének belsejében legyen. Szerkessze meg a P' vetület (perspektív) képét oly módon, hogy a pont a háromszög síkjában legyen! (Segítség: Használjon egy segédszakaszt a háromszögben!)

9. Perspektívában adott egy háromszög képe és az alapsíkra eső merőleges vetületének képe. Vegyen fel egy,

   (a) a képsíkra merőleges

   (b) a képsíkkal párhuzamos

   (c) az alapsíkra merőleges

   egyenest, majd határozza meg a háromszög és az egyenes döféspontját!

10. Adott egy háromszög képe és az alapsíkra eső merőleges vetületének képe úgy, hogy a háromszög egyik csúcspontja a képsík előtt van. Határozza meg a képsíkkal való metszésvonalát, azaz a háromszög síkjának nyomvonalát! (Segítség: A háromszög két egyenesének nyompontjait kell meghatározni. A két nyompont adja a háromszög síkjának nyomvonalát.)

10.4. Metrikus alapfeladatok

Mint minden ábrázolási eljárásban, úgy perspektívában is az a cél, hogy megadott méretekkel rendelkező objektumok képeit is meg tudjuk szerkeszteni. Mivel a perspektívát főként épületek (épületegyüttesek) ábrázolására használjuk, a talán legfontosabb szerkesztések a következők:

1. az alapsíkot valódi nagyságban lássuk, illetve

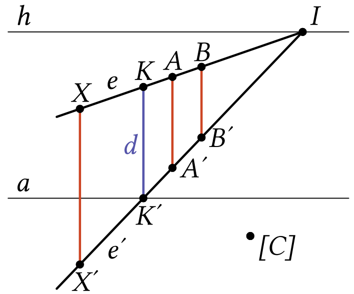
2. függőleges egyenesekre adott hosszúságot fel tudjunk mérni.

Ezzel a két alapszerkesztéssel egy épületet már ábrázolhatunk, ha ismerjük az alaprajzát (1) és tudjuk az egyes részeinek a magasságait (2).

10.4.1. Magasság felmérése függőleges egyenesre

Képzeljünk el például egy kerítést függőleges rácsokkal, amely végtelen hosszan tart. Az egyes rácsok egyre kisebbnek látszanak, de mindig függőlegesek. Ezt a jelenséget szeretnénk geometriai úton leírni.

Adott egy e egyenes perspektívában képével, és az alapsíkra eső merőleges vetületének képével. Az egyenes legyen párhuzamos az alapsíkkal; ekkor két képének iránypontja ugyanaz az I pont. (10.23. ábra)



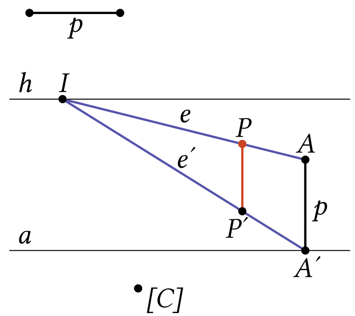
10.23. ábra. Azonos magasságú, függőleges szakaszok („kerítés")

Vegyünk fel függőleges szakaszokat az egyenes és a vetülete között, a képsík mögött és előtt egyaránt, továbbá a képsíkon(!) is. Az $\overline{AA'}$ és $\overline{BB'}$ szakaszok a képsík mögött, az $\overline{XX'}$ a képsík előtt helyezkedik el, míg a $\overline{KK'}$ szakasz éppen a képsíkban van. Ezek a szakaszok a valóságban ugyanakkora hosszúságúak, perspektív képeik azonban kisebbek és nagyobbak is lehetnek, mint az eredeti hossz. Egyetlen esetben egyezik meg a hosszúság az eredetivel: amikor a függőleges szakaszt a képsíkban vesszük fel. Az e és e' közötti távolság – azaz az e magassága – a $\overline{KK'}$ szakasz hosszával egyezik meg. A képsík mögött a valódi hosszt kisebbnek, a képsík előtt nagyobbnak látjuk.

Ezt az egyszerű gondolatmenetet felhasználva, egy függőleges szakasz hosszát mindig meg tudjuk határozni.

Magasság felmérése függőleges egyenesre

Adott egy P' pont, amely egy P pont alapsíkra eső merőleges vetületének képe, illetve egy p szakaszhossz. Határozzuk meg a P pont perspektív képét úgy, hogy a pont az alapsík felett p magasságban legyen! (10.24. ábra)



10.24. ábra. Magasság felmérése függőleges egyenesre

A szerkesztés lépései

Elsőként vegyük fel a perspektíva rendszerét, a P' vetület perspektív képét, és adjunk meg egy p hosszúságot.

1. Adjunk meg a képsíkban(!) egy függőleges $\overline{AA'}$ szakaszt, amelynek hossza p úgy, hogy A' az alapvonalon legyen.

2. Az $\overleftrightarrow{A'P'} = e'$ egyenes az alapsíkban van, ezért iránypontja a horizontvonalra kerül: I.

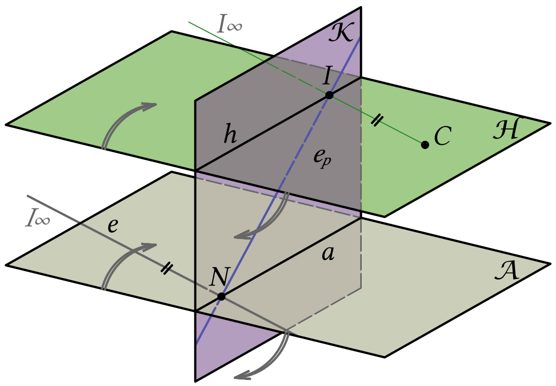
3. Ezzel az egyenessel a térben párhuzamost húzunk az A ponton keresztül, így kapjuk az $e = \overleftrightarrow{AI}$ egyenest.

4. A P'-ből függőleges egyenest állítva, az e-ből a keresett P pontot metszhetjük ki.

10.4.2. Az alapsík leforgatása

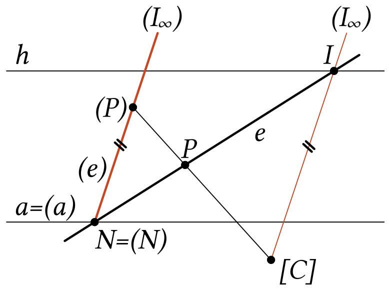
Ha az alapsíkot a képsíkba forgathatjuk, minden elemét valódi nagyságban láthatjuk. A kérdés az, hogyan lehet ezt a forgatást kétdimenziós szerkesztésként megvalósítani, továbbá találunk-e összefüggést a perspektív és leforgatott képek között.

Tekintsünk a perspektív rendszert. Forgassuk le *egyszerre* az alapvonal körül az alapsíkot és a horizontvonal körül a horizontsíkot. (10.25. ábra) Ezt a 90°-os forgatást már ismerjük, hiszen így jutottunk el a $[C]$ forgatott centrumhoz is.



10.25. ábra. Az alapsík leforgatása 1.

Ekkor egy, az alapsíkban fekvő e egyenes leforgatott képét meg tudjuk szerkeszteni. Az egyenes N nyompontja a forgatás során fixen maradó a alapvonalon marad. Az I iránypontját a C-n át, e-vel húzott párhuzamos adja. Ez az egyenes a forgatás során párhuzamos marad az e-vel, ugyanis mindkettő „ugyanolyan” forgatással keletkezik. (A $\overleftrightarrow{CI}$ egyenes mutatja meg az egyenes „irányát”.) Az alapsík leforgatott elemeit kerek zárójellel jelölve, a 10.26. ábrát kapjuk.



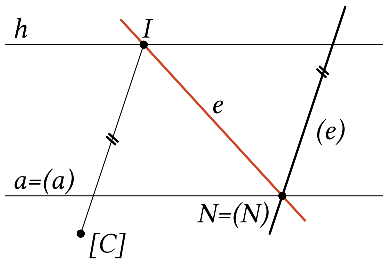
10.26. ábra. Az alapsík leforgatása 2.

Bebizonyítható, hogy ennél a forgatásnál egy alapsíkbeli pont perspektív és leforgatott képét összekötő egyenes áthalad a $[C]$ ponton. (Érdeklődők a vázlatos bizonyítást a fejezet végén olvashatják el.) Vegyük észre, hogy egy olyan leképezést kaptunk, amelynek van egy fixen maradó $a = (a)$ egyenese, a pontok perspektív és forgatott képeit a $[C]$ segítségével kapjuk.
Ez azt jelenti, hogy **az alapsík leforgatottja és perspektív képe centrális kollineációval egymásnak megfeleltethető.** A kollineáció centruma a perspektíva centrumának $[C]$ forgatott képe, tengelye az $a = (a)$ alapvonal. Megfelelő pontpárt egy egyenes végtelen távoli pontjának forgatott képe és perspektív képének iránypontja adják. (A centrális kollineációt lásd a 2.2.2. fejezetben.)

Az alapsík leforgatásánál kiindulhatunk a forgatott képből is.

Alapsíkbeli egyenes perspektív képe

Perspektívában adott egy alapsíkbeli e egyenes (e) képe. Határozzuk meg az egyenes perspektív képét! (10.27. ábra)



10.27. ábra. Alapsíkbeli egyenes perspektív képe

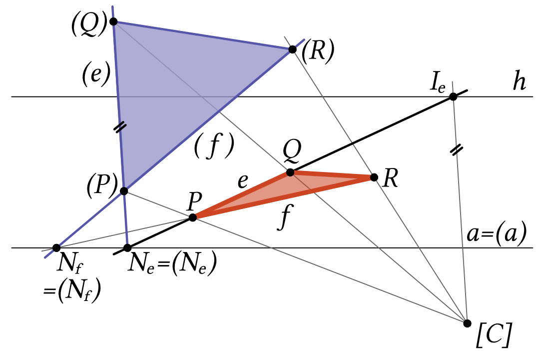
A szerkesztés lépései

1. Az előző elméleti meggondolást felhasználva, húzzunk párhuzamost (e)-tal a $[C]$-n keresztül.
2. Az így kapott egyenes elmetszi a h horizontvonalat az egyenes I iránypontjában.
3. Az egyenes alapvonalon lévő $N = (N)$ nyompontja fix; a keresett perspektív kép az $\overleftrightarrow{NI}$ egyenes.

A következő példában bemutatjuk, hogy tetszőleges, az alapsíkban fekvő síkidom képe meghatározható centrális kollineációval.

Alapsíkbeli szabályos háromszög szerkesztése

Adott perspektívában egy alapsíkban fekvő $\overline{PQ}$ szakasz. Szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, amely az alapsíkban van, és egyik oldala az adott szakasz! (10.28. ábra)



10.28. ábra. Alapsíkbeli szabályos háromszög szerkesztése

A szerkesztés lépései

Vegyük fel a perspektíva rendszerét, és a $\overline{PQ}$ szakaszt.

1. Forgassuk le az $e = \overleftrightarrow{PQ}$ egyenest, az N nyompontja és az I_e iránypontja segítségével.
   (a) A $\overleftrightarrow{[C]I_e}$ egyenes megadja a forgatott egyenes állását.
   (b) Ezzel húzunk párhuzamost a fixen maradó N_e ponton keresztül: (e).
   (c) A $[C]$ centrumon, valamint a P és Q pontokon keresztül vett egyenesek kimetszik a leforgatott egyenesből a (P) és (Q) leforgatott pontokat.
2. Szerkesszük meg a $(P)(Q)(R)$ szabályos háromszöget. (A két lehetséges megoldás közül tetszőlegesen választhatunk.)
3. Forgassuk „vissza” az R pontot, centrális kollineáció segítségével. (Itt csak az illeszkedéstartást használjuk ki.)

(a) Válasszuk ki például az $f = \overleftrightarrow{PR}$ egyenest. Ennek a leforgatott képe (az (f)) az alapvonalat mint tengelyt az (N_f) pontban metszi. Ez a pont fixpont, azaz $N_f = (N_f)$.

(b) Az f perspektív képét meghatározza két pontja: $\overleftrightarrow{N_f P} = f$.

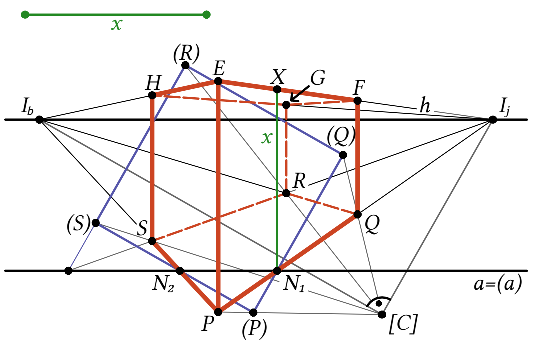
(c) A $[C]$-ból húzott, (R)-on átmenő egyenes kimetszi az f képéből a hiányzó csúcspontot: R.

(Az R pontot valamely oldalegyenes iránypontjának segítségével is megkaphattuk volna.)

Az előbb bemutatott két alapszerkesztéssel tetszőleges objektum (geometriai test, épület stb.) megszerkeszthető.

Kocka ábrázolása perspektívában

Ábrázoljunk perspektívában egy x oldalhosszúságú, az alapsíkon álló kockát! A kocka egyik függőleges éle legyen a képsík előtt! (10.29. ábra)



10.29. ábra. Alapsíkon álló kocka perspektív képe

A szerkesztés lépései – részletes útmutató

1. Az alapnégyzet meghatározása (az alapsík leforgatásával)

   (a) Induljunk ki a leforgatott képből. Az alapsíkon lévő $PQRS$ négyzet forgatott képét úgy szerkesztjük meg, hogy az egyik csúcsa – például a (P) – az alapvonal alatt legyen: $(P)(Q)(R)(S)$.

   (b) Az alapélek iránypontjait a $[C]$-on át húzott, az oldalakkal párhuzamos egyenesek jelölik ki: I_b és I_j.

   (c) Az alapnégyzet helyzete miatt a kocka két alapélének adott a nyompontja: N_1 és N_2 (Ettől kezdve az alapnégyzet pontjainak meghatározási sorrendje tetszőleges.)

   (d) Az N_1 nyompont és I_j iránypont segítségével a kocka $\overline{PQ}$ élének perspektív képe megszerkeszthető.

   (e) A Q perspektív képet az I_b-vel összekötve azt az egyenest kapjuk, amelyen rajta van az R pont. A $[C]$ felhasználásával adódik (R)-ból az R perspektív kép.

   (f) Az S pontot csupán az iránypontokkal is megkaphatjuk: az S perspektív kép a $\overleftrightarrow{PI_b}$ és az $\overleftrightarrow{RI_j}$ egyenesek metszéspontja. (Másik szerkesztési mód az lehet, ha meghosszabbítjuk például az $\overline{(S)(R)}$ szakaszt, hogy az alapvonalon a nyompontját megkapjuk. Innen a szokásos módon határozhatjuk meg az S pontot.)

2. A magasság felmérése valamelyik csúcsból/csúcsokból

   (a) Tekintsük például a $\overline{PQ}$ alapél egyenesét, amely az I_j iránypontba tart.

   (b) Mérjük fel a képsíkban lévő N_1 pontjából függőlegesen az x szakaszhosszt. A szakasz végpontja az X pont.

   (c) Az $\overleftrightarrow{XI_j}$ egyenest felhasználva adódnak az E és F végpontok.

3. A hiányzó G és H csúcspontokat pusztán az iránypontok felhasználásával kapjuk. (A 10.3.1. fejezetben látott paralelogrammához hasonlóan.) Ha pontosan szerkesztettünk, akkor az R-ből induló függőleges egyenes, az $\overleftrightarrow{FI_b}$ és a $\overleftrightarrow{HI_j}$ egyenesek a G-ben találkoznak.

Végül, rajzoljuk meg a kocka látható és nem látható éleit is.

Megjegyzés: Az iránypontok jelölései a szabadkézi rajzban használatos „baloldali” és „jobboldali” iránypont elnevezésekre utalnak. Látható, hogy a kocka éleinek merőlegessége miatt az $\overleftrightarrow{[C]I_b}$ és $\overleftrightarrow{[C]I_j}$ egyenesek merőlegesek egymásra.

10.4.3. Gyakorló feladatok

A feladatokban a perspektív rendszer minden adata (alapvonal helyzete, centrum magassága = alap- és horizontvonal távolsága, distancia) tetszőlegesen felvehető.

1. Adott perspektívában egy $\overline{PP'}$ függőleges szakasz a képsík mögött úgy, hogy a P' pont az alapsíkban van. Határozza meg a valódi hosszát!

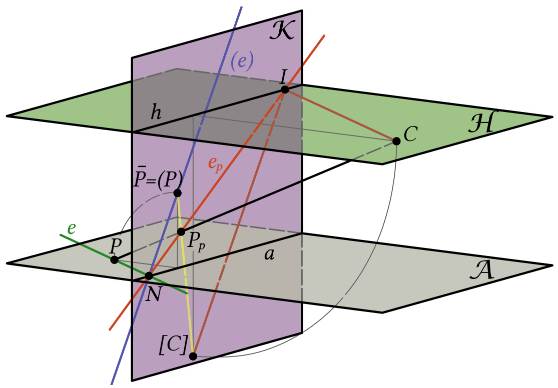
2. Adott egy olyan függőleges $\overline{PQ}$ szakasz perspektívában, amely a képsík mögött és az alapsík felett helyezkedik el. Ábrázolja a szakaszt és határozza meg a valódi hosszát!
(Segítség: A szakasz pontjainak alapsíkra eső merőleges vetületeit érdemes felhasználni.)

3. Perspektívában ábrázoljon egy olyan szabályos hatszöget, amelynek oldalélei 3 cm hosszúságúak, és az egyik oldaléle az alapvonalon van!

4. Ábrázoljon perspektívában egy olyan szabályos háromszög alapú egyenes hasábot, amely a képsík mögött helyezkedik el, az alapélei 4 cm hosszúságúak, a magassága 8 cm!

5. Egyszerű épület ábrázolása: Adott egy négyzet alapú hasáb, amelynek alapéle 5 cm hosszú, magassága 4 cm, valamint egy olyan egyenes gúla, amelynek alaplapja a hasáb fedőlapja, magassága 3 cm. Ábrázolja perspektívában ezt a két testből álló objektumot!
(Segítség: A gúla magasságegyeneséhez szükség van az alaplap középpontjából állított merőlegesre is.)

Kiegészítés a 10.4.2. fejezethez: Az alapsík leforgatottja és perspektív képe centrális kollineációval egymásnak megfeleltethető. A kollineáció centruma a perspektíva centrumának $[C]$ forgatott képe, tengelye az $a = (a)$ alapvonal. Megfelelő pontpárt egy egyenes végtelen távoli pontjának forgatott képe és perspektív képének iránypontja adják. (10.30. ábra)



10.30. ábra. Az alapsík leforgatása – bizonyítás

Az érthetőség kedvéért a P pont perspektív képénél feltüntetjük a p indexet.

Vázlatos bizonyítás:

A 10.4.2. fejezetben már beláttuk, hogy az alapvonal fixen maradó egyenes, az illeszkedéstartás nyilvánvaló. Az is evidens, hogy a horizontvonal a centrális kollineáció egyik ellentengelye, hiszen végtelen távoli pont kollineációs „párja" véges helyzetű. A kérdés az, hogy a $[C]$ valóban centruma-e az általunk felvázolt centrális kollineációnak. Ehhez be kell látni, hogy nem csupán az (I_∞, I) pontpár egyenesére illeszkedik a centrum, hanem az egyenes bármely P pontja esetén igaz, hogy P_p, (P) és $[C]$ kollineáris (azaz egy egyenesre illeszkednek).

Tegyük fel, hogy adott egy tetszőleges P pont az egyenesen, ismerjük a P_p perspektív képét, és adott a leforgatott (e) egyenes is. A leforgatott rendszerben a $\overleftrightarrow{[C]P_p}$ egyenes az (e) forgatott képet a $\bar{P}$-ben metszi. Belátjuk, hogy $d(N,P) = d(N,\bar{P})$, azaz a $\bar{P}$ pont éppen a P pont forgatott képe.

A $P_pPN\triangle \sim P_pCI\triangle$, ezért $\frac{PP_p}{CP_p} = \frac{NP_p}{IP_p}$. A $P_p\bar{P}N\triangle \sim P_p[C]I\triangle$, így $\frac{\bar{P}P_p}{[C]P_p} = \frac{NP_p}{IP_p}$. – Ebből következik, hogy $\frac{PP_p}{CP_p} = \frac{\bar{P}P_p}{[C]P_p}$. Az előző arány miatt $PP_p\bar{P}\triangle \sim CP_p[C]\triangle$, amiből következik, hogy $\overleftrightarrow{P\bar{P}} \parallel \overleftrightarrow{C[C]}$.
Ezen párhuzamosság miatt $IC[C]\triangle \sim NP\bar{P}\triangle$. Azt is tudjuk, hogy $d(I,C) = d(I,[C])$; ami azt jelenti, hogy $d(N,P) = d(N,\bar{P})$.

Felhasználva a $d(N,P) = d(N,(P))$ egyenlőséget beláttuk, hogy $\bar{P} = (P)$, azaz egy pont perspektív és leforgatott képei által meghatározott egyenes áthalad a $[C]$ centrumon, így valóban a fent leírt centrális kollineációt kaptuk.

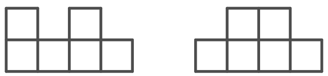
11. fejezet

Kiegészítő feladatgyűjtemény

A feladatgyűjtemény három részből áll. Az első bevezető feladatokat tartalmaz, a második néhány klasszikus tételt és azok alkalmazásait, a harmadik versenyfeladatokat. Mindhárom részre jellemző a változatosság. Van ahol az egyszerű illeszkedés, van ahol szerkesztés, van ahol nehezebb problémák, bizonyítások hozzák elő az ábrázoló geometriai gondolkodást. A sík és térmértani kapcsolatok és analógiák, vetületek, síkmetszetek sokoldalú feldolgozásával ismerkedhetünk meg.

Bevezető feladatok

1. feladat Kockacukrokat tettünk az asztalra, az így kapott „épület” elöl- és oldalnézetét megadjuk. Legalább és legfeljebb hány kockacukor van az asztalon?

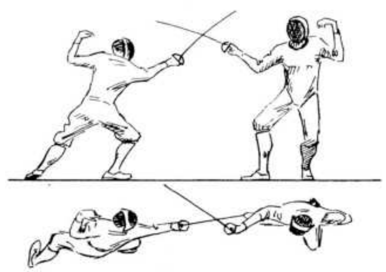


2. feladat Kockacukrok segítségével építettünk egy testet, a kockák lapjaik mentén pontosan illeszkednek egymáshoz. Megadjuk a test felülnézeti hálóján, hogy az aktuális négyzet felett hány kockacukor van. Készítsük el a test elöl- és oldalnézetét.

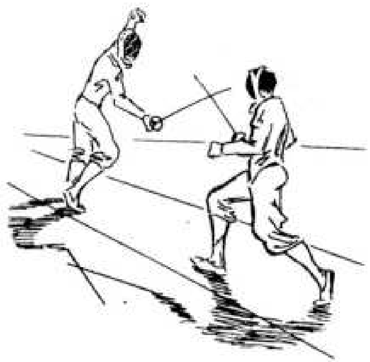
1	0	2	1
3	1	0	0
0	1	1	3
1	0	0	1

3. feladat Egy kockacukrokból készített test elöl- és oldalnézetén is egyaránt 6 kocka látszik. Az első feladat mintájára jelölje a felhasznált kockacukrok lehető legkisebb, és legnagyobb értékét rendre k és N. Hogy nézzen ki az elöl és oldalnézet ahhoz, hogy a k és N különbsége a lehető legkisebb illetve a lehető legnagyobb legyen?

4. feladat (a) A képen két vívót látunk, mégpedig a kép felső részén elölről, alsó részén felülről nézve. Állapítsuk meg, érintkezik-e egymással a két penge.



(b) A képen látható két kardvívó a szabadban csap össze egymással. Erősen süt a nap, innen a rajzon látható árnyék. Érintkezik-e a két penge egymással?



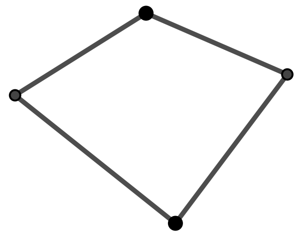
5. feladat Egy 1×1 méteres négyzet alakú ketrecben egy tízméteres anakonda van. Münchausen báró azt állítja, hogy egyetlen lövéssel legalább hat helyen át tudja lőni az anakondát. Nem túloz egy kicsit a báró? (Az anakondát egy tíz méter hosszú töröttvonalnak lehet tekinteni, amely a négyzet belsejében van.)

6. feladat Adjunk meg néhány piros és néhány zöld pontot a síkon úgy, hogy ne legyen olyan egyenes, melyen csak egy piros és egy zöld pont van, a pontok pedig nincsenek mind egy egyenesesen. Igazoljuk, hogy ilyen konstrukció mindig létezik, ha legalább két piros pont van és a zöldek száma kétszer annyi, mint a pirosak száma.

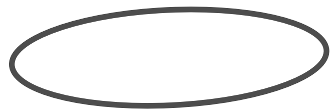
7. feladat Legyen S és T egy-egy sokszög. Azt mondjuk, hogy az S a T sokszögbe van írva, ha S minden csúcsa rajta van T valamelyik oldalának egyenesén (azaz az oldalon vagy annak a meghosszabbításán), ugyanekkor T-ről azt mondjuk, hogy az S köré van írva. Léteznek-e olyan sokszögpárok, amelyek egyszerre egymásba és egymás köré is vannak írva?

8. feladat Az ABC háromszög belsejében felvettünk egy P pontot, majd az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ oldalakon kijelöltük kemény ceruzával rendre a C', A' és B' pontokat és meghúztuk a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ egyeneseket. A rajzot félretettük, majd egy év múlva újra előkerült. Hogyan lehetne rekonstruálni az ABC háromszöget, ha a lapon csak a kemény ceruzával rajzolt $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ egyenesek és az A', B' és C' pontok láthatók?

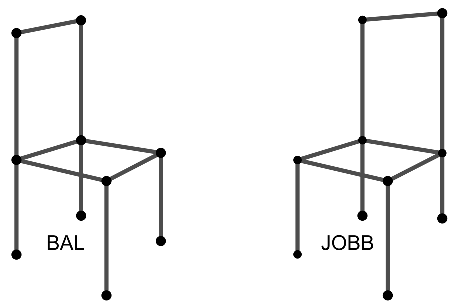
9. feladat Az ábrán egy négyzet fényképét látjuk. (a) Hogyan húzhatjuk meg a négyzet egyik felezővonalát? (b) Hogyan húzhatnánk meg az egyik harmadolóvonalát? (Mindkét osztóvonal az eredeti négyzet egyik oldalával párhuzamosan fut és osztja a területet a megfelelő arányban.)



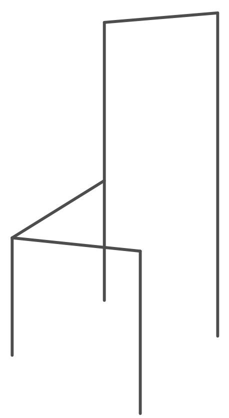
10. feladat Egy kör alakú tócsa fényképét látjuk az ábrán. Hogyan rajzolhatnánk meg egy olyan vonal képét, amely az eredeti kör középpontján áthaladt?



11. feladat Rajzoljunk széket! – mondta a rajztanár. Az ábrákon két diák munkáját látod. Miért nem jó a rajz? Hogyan javítható a hiba?



12. feladat A 11-es feladatban látott szék újabb változatával foglalkozunk. Egy tréfás kedvű asztalos az ülőlapot nem vízszintesre készítette. Az ülőlap három csúcsát ismerjük egy-egy széklábon. Keressük meg a hiányzó csúcsot a negyedik széklábon.



Klasszikus problémák

13. feladat Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át.

14. feladat Desargues tétel: Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyeneseknek van egy közös P pontjuk. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesek M metszéspontja, a $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ egyenesek N metszéspontja, valamint a $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{C'A'}$ egyenesek L metszéspontja egy egyenesre illeszkedik. (Most tegyük fel, hogy a megfelelő oldalpárok nem párhuzamosak.)

15. feladat Tekintsünk három különböző sugarú kört, melyek között nincs két koncentrikus. Vegyük páronként a külső hasonlósági pontjukat. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy egyenesen van.

16. feladat (OKTV 2002–2003, II. kategória, első forduló, 5. feladat) Adott a k kör és annak egy $\overline{AB}$ átmérője. A k_1 és k_2 körök az $\overline{AB}$ által meghatározott egyik félkör belsejében helyezkednek el; k_1 a k kört a P pontban, $\overline{AB}$-t a Q pontban érinti; ugyanígy k_2 a k kört az S, az $\overline{AB}$-t pedig az R pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

17. feladat Brianchon tétel: Egy kör köré írt hatszögben (ahol az oldalak a kör érintői) a nagyátlók egy pontban metszik egymást. (Nagyátló azon pontok között fut, amelyek – mindkét irányban tekintve – harmadszomszédosak.)

18. feladat Az $ABCD$ érintőnégyszög két szemközti oldalán a beírt kör érintési pontjai legyenek P és Q. Igazoljuk, hogy az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ átlók metszéspontja rajta van a $\overline{PQ}$ szakaszon.

19. feladat Adva van egy kör és egy ellipszis a tengelyeivel úgy, hogy a középpontjuk egybeesik. Szerkesszük meg az ellipszis és a kör metszéspontjait.

20. feladat Adva van egy ellipszis a tengelyeivel és egy kör úgy, hogy a kör középpontja rajta legyen az ellipszis kistengelyén. Szerkesszük meg az ellipszis és a kör metszéspontjait.

Versenyfeladatok

21. feladat Hány gömbbel lehet eltakarni egy pontszerű fényforrást?

22. feladat Van két egybevágó fakockánk. Fúrhatunk-e az egyikre olyan lyukat, amin a másik átdugható?

23. feladat (OKTV 1998–1999, II. kategória, második forduló, 3. feladat) Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)

24. feladat (OKTV 2014–2015, II. kategória, harmadik forduló, 2. feladat) Tekintsük egy kocka három olyan lapátlójának egyenesét, amelyek páronként kitérőek. Az e egyenes az iménti három egyenes mindegyikével ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?

25. feladat (OKTV 2004–2005, III. kategória, első forduló, 5. feladat) Tekintsünk egy négyoldalú gúlát, amelynek az alapja húrnégyszög. Vetítsük a gúla magasságának talppontját merőlegesen a gúla négy oldalélére. Bizonyítsuk be, hogy a négy vetület egy körön van.

26. feladat (Városok Viadala 1998) Egy téglatest egy csúcsból induló három élének összege legyen a téglatest summája. Tartalmazhat-e egy téglatest nála nagyobb summájú másik téglatestet?

27. feladat Egy kocka alakú terem falain mozog három vadászpók. Hálójuk az általuk alkotott háromszögben feszül ki. A teremben röpköd egy légy. A pókok és a légy sebessége azonos. Elkaphatják-e a pókok a legyet?

28. feladat A P csúcsú hegyesszögű szögtartomány belsejében adott a Q pont. Sajnos ragasztó cseppent a lapra, éppen a P pontot takarja a ragacsos folt. Hogyan szerkeszthetnénk meg a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes Q-n áthaladó darabját csak vonalzó segítségével?

MEGOLDÁSOK

1. feladat Kockacukrokat tettünk az asztalra, az így kapott „épület” elöl- és oldalnézetét megadjuk. Legalább és legfeljebb hány kockacukor van az asztalon?

Megoldás: Gondoljuk meg először a minimális értéket. Ha egy irányból nézve látunk hat kockát, akkor hatnál kevesebb kockacukor nem lehetett az épületben. Ennyivel viszont meg is tudjuk oldani a feladatot, ehhez megadjuk a felülnézetet, mégpedig oly módon, hogy a felülnézeti hálóba beírjuk, hogy az adott négyzet felett hány kocka van.

0	1	0	0
2	0	0	0
0	0	2	0
0	0	0	1

Azt is észrevehetjük, hogy hat kockacukorból többféleképpen is elkészíthetjük az épületet, ezek megszámolására itt nem térünk ki.

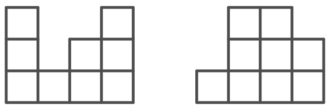
Most térjünk rá a maximális értékre. Az alsó sorban mindkét nézetben négy kockát látunk, ezért az alsó szinten maximum $4 \cdot 4 = 16$ kocka lehet, ugyanilyen érveléssel az épület első emeletén pedig $2 \cdot 2 = 4$. Összesen legfeljebb 20 kockából állhat az épület. Ezt egyetlen módon valósíthatjuk meg, mégpedig az imént látott felülnézeti háló segítségével a következő módon:

1	1	1	1
2	1	2	1
2	1	2	1
1	1	1	1

2. feladat Kockacukrok segítségével építettünk egy testet, a kockák lapjaik mentén pontosan illeszkednek egymáshoz. Megadjuk a test felülnézeti hálóján, hogy az aktuális négyzet felett hány kockacukor van. Készítsük el a test elöl- és oldalnézetét.

1	0	2	1
3	1	0	0
0	1	1	3
1	0	0	1

Megoldás: Az alábbiakban láthatjuk az elölnézeti és oldalnézeti ábrát. Amennyiben meg szeretnénk fogalmazni, hogyan kell készíteni, megállapíthatjuk, hogy például az elölnézet létrehozásához balról jobbra haladva a felülnézeti ábra oszlopaiban álló számok közül mindig a legnagyobbnak az értéke lesz az épület magasságát meghatározó szám. Ugyanez az oldalnézetnél is igaz, ott a sorok mentén kell haladni. Az oldalnézet természetesen függ attól, hogy az elölnézethez képest bal, vagy jobb oldalról tekintjük az épületet. Az alábbi megoldásban a jobb oldalit látjuk, a bal oldali nézet ennek megfelelő tükörképe.



3. feladat Egy kockacukrokból készített test elöl- és oldalnézetén is egyaránt 6 kocka látszik. Az első feladat mintájára jelölje a felhasznált kockacukrok lehető legkisebb, és legnagyobb értékét rendre k és N. Hogy nézzen ki az elöl és oldalnézet ahhoz, hogy a k és N különbsége a lehető legkisebb illetve a lehető legnagyobb legyen?

Megoldás: Jelölje az n-edik szinten az elölnézetben és oldalnézetben látható kockák számát rendre e_n és o_n. Az n-edik szinten található kockák legkisebb lehetséges értéke $\max(e_n, o_n)$, a legnagyobb lehetséges értéke $e_n \cdot o_n$. A feladat szövegében szereplő k és N értékét a minimális és maximális lehetőségek szintenkénti összegzéséből kapjuk.

A lehető legkisebb $N - k$ értéket így könnyen megkapjuk, hiszen ez nem lehet nullánál kisebb, ez pedig elérhető, ha az elöl és az oldalnézet is 1 széles, 6 magas. Ekkor az épület megalkotására egyetlen lehetőség maradt, hat kockát szépen egymás tetejére tenni. Ez a négyzetes oszlop alakú toronyház lesz a megoldás.

A lehető legnagyobb $N - k$ értéket mohó algoritmussal kapjuk. Ehhez nézzük meg N lehetséges legnagyobb és k lehetséges legkisebb értékét, jelölje a szintek számát s. A Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség miatt

$$N = \sum_{i=1}^{s}(e_i \cdot o_i) \leq \sqrt{(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_s^2)(o_1^2 + o_2^2 + \ldots + o_s^2)}$$

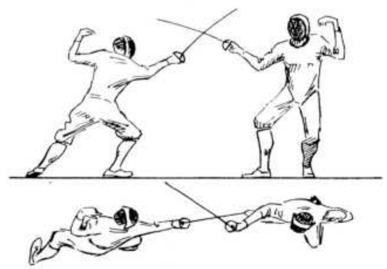
Ezt tovább becsülhetjük:

$$\sqrt{(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_s^2)(o_1^2 + o_2^2 + \ldots + o_s^2)} \leq \sqrt{(e_1 + e_2 + \ldots + e_s)^2(o_1 + o_2 + \ldots + o_s)^2} = 36$$

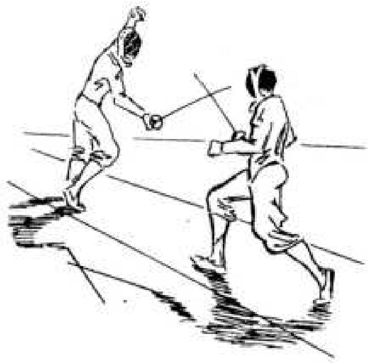
Az egyenlőtlenségeknél éppen akkor lesz egyenlőség, azaz úgy érhetjük el N maximumát, ha egyetlen szint van, $s = 1$ és $e_1 = 6$, $o_1 = 6$. Ekkor épületünk egy 6×6 alaprajzú tömör négyzetes oszlop.

Most k legkisebb értékét tekintsük, ez nyilván nem lehet 6-nál kisebb. Az iménti $s = 1$ és $e_1 = 6$, $o_1 = 6$ példánál viszont k lehet 6. Ez elérhető például oly módon, hogy a 6×6-os alaprajzú rács átlója mentén veszünk hat kockát. Észrevehető, hogy a minimális k értéket adó épületek száma most könnyen megszámolható, hiszen ez azon népszerű feladattal ekvivalens, hogy hányféleképpen tehetünk egy 6×6-os sakktáblára hat bástyát úgy, hogy ne üssék egymást, ennek pedig 6!=720 a megoldása.

4. feladat (Bizám György, Herczeg János: Logar Miska feladatai, 61. és 62. feladat) (a) A képen két vívót látunk, mégpedig a kép felső részén elölről, alsó részén felülről nézve. Állapítsuk meg, érintkezik-e egymással a két penge.



(b) A képen látható két kardvívó a szabadban csap össze egymással. Erősen süt a nap, innen a rajzon látható árnyék. Érintkezik-e a két penge egymással?



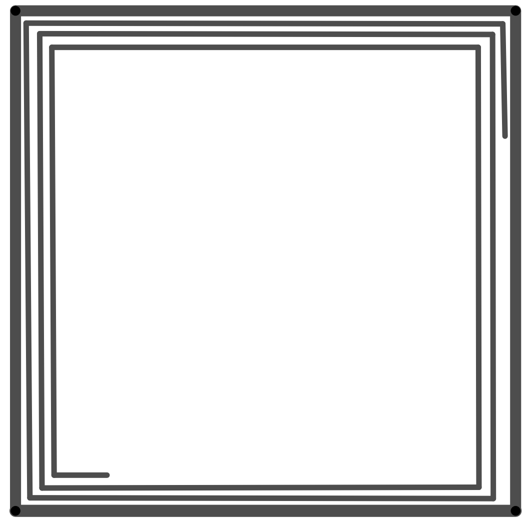
Megoldás: (a) A kardozók ábrázolása a szokásos módon történt. A két képet pontosan egymás alá tettük oly módon, hogy ugyanannak a tárgypontnak a képe (az előlnézete és a felülnézete) mindig egymás alá esik. Ez a Monge féle ábrázolás két képsíkkal, a két képpont összekötő egyenese merőleges a két kép határát alkotó tengelyre.

Amennyiben a két penge érintkezik egymással, van közös pontjuk. Ennek a közös pontnak a képe az elölnézetben és a felülnézetben is csak ott lehet, ahol a pengék képei metszik egymást. Érintkezés esetén tehát a pengék metszéspontjainak a két képen pontosan egymás alá kellene esnie. Mivel ez nincs így, ezért megállapíthatjuk, hogy a pengék nem érintkeznek, s mind a két képen csupán látszólag fedi egymást egy-egy pontjuk.

(b) A Nap olyan messze van, hogy sugarai gyakorlatilag párhuzamosaknak vehetők. Bármilyen tárgypontot a képével egy napsugár köt össze; ezek szerint ha a tárgy (jelen eseben a vívók) bármely pontját összekötjük a saját árnyékával, az így kapott összes egyenesek párhuzamosak egymással. A mi rajzunk a valóság perspektivikus képe. Perspektívában pedig ezek a valóságban párhuzamos egyenenesek a rajzon egy pontban találkoznak. Ezt ellenőrizhetjük is a feladatban közölt rajzon: ha a kardok kezdő és végpontjait összekötjük a megfelelő árnyékpontokkal, akkor az így kapott négy egyenes egy közös pontban fut össze. Ez a közös pont a fénysugarak iránypontja. Ha a kardok metszik egymást, akkor a rajzbeli metszéspontukat az árnyékaik metszéspontjával összekötő egyenesnek is ebbe a pontba kell tartania. Mivel ez nincs így, a kardpengék a valóságban nem érintkeznek.

5. feladat Egy 1×1 méteres négyzet alakú ketrecben egy tízméteres anakonda van. Münchausen báró azt állítja, hogy egyetlen lövéssel legalább hat helyen át tudja lőni az anakondát. Nem túloz egy kicsit a báró? (Az anakondát egy tíz méter hosszú töröttvonalnak lehet tekinteni, amely a négyzet belsejében van.)

Megoldás: Nyilván egy tetszőleges szakasz hossza nem nagyobb, mint két merőleges egyenesen levő vetületeinek összege, hiszen derékszögű háromszög átfogója nem nagyobb a két befogó összegénél. Így az anakondát a ketrec két merőleges oldalára vetítve a vetület hossza legalább 10 méter, azaz valamelyik oldalra legalább 5 méter jut. Viszont egy 1 méteres szakasz belsejében elhelyezkedő 5 méter összhoszúságú szakaszrendszernek van olyan P pontja, melyet legalább 6 szakasz fed le. Itt kihasználtuk, hogy az anakonda a ketrec belsejében van, ezért a vetülete is az egységnyi szakasz belsejében van. Ha ezen a P ponton át az oldalra merőlegesen lő a báró, akkor legalább 6 helyen lövi át az anakondát. Az alábbi ábra mutatja, hogy 7-szeres átlyukasztás már nem mindig biztosítható. Például ha az anakonda az ábra szerint szorosan a ketrec fala mentén van feltekeredve.



6. feladat Adjunk meg néhány piros és néhány zöld pontot a síkon úgy, hogy ne legyen olyan egyenes, melyen csak egy piros és egy zöld pont van, a pontok pedig nincsenek mind egy egyenesesen. Igazoljuk, hogy ilyen konstrukció mindig létezik, ha legalább két piros pont van és a zöldek száma kétszer annyi, mint a pirosak száma.

Megoldás: Ez a feladat szakkörön, vagy táborban feldolgozva a kutatómunka mini kóstolóját jelentheti a diákoknak. Barátkozzunk meg először a feladat szövegével, nézzük meg, hogyan is indul ez a kutatómunka. Belemelegedve több kérdés is felvetődik, ezek közül emeltünk ki egyet a feladat szövegében, amely meglepő módon az egyszerű kombinatorikus színezési problémából átvezet minket a perspektívába. (A problémát Reiman Istvántól hallottam a TIT által szervezett nyári egyetemen Vácon.) A feladat szövegében szereplő feltétel szerint úgy kell elhelyeznünk a pontokat, hogy ha egy egyenest fektetek egy piros és egy zöld ponton át, akkor azon minden esetben van még legalább egy az adott pontok közül. Érdemes hagyni a diákokat rajzolgatni, hamarosan születnek megoldások. Legyen a piros pontok száma p, a zöldek száma z, kicsi $(p;z)$ párokra könnyű konstrukciót találni, pl (1;4); (2:4); (3;4). Az önálló próbálgatások, rajzolgatások után elkezdhetjük gyűjteni a különböző példákat. Kisvártatva betelik a tábla, így felmerül, rendet kellene teremteni.

Mivel bármely ábra átfesthető úgy, hogy minden pont másik színre vált, ezért feltehető, hogy $p \leq z$. Vizsgáljuk p szerint növekvő rendben a lehetőségeket. A p=1, z=1 párhoz nincs megfelelő elrendezés. Ezt rövidítve így fogjuk jelölni (diákok javaslata nyomán a kezdőbetűkből): (1;1) NME. Továbblépve megállapíthatjuk, hogy (1;2) NME szintén, hiszen 1 piros és két zöld pont csak úgy adna jó elrendezést, ha mind egy egyenesen lennének, azt viszont most nem engedjük meg. A következő három lépést feladatként is kitűzhetjük:

(i) Bizonyítsuk be, hogy (1;3) NME.

(ii) Igazoljuk, hogy ha z legalább 4, akkor az $(1;z)$ párhoz létezik megfelelő elrendezés, azaz $(1;z)$ LME. Hogy tudnánk jellemezni ezeket?

(iii) Mutassuk meg, hogy (2;2) NME, továbbá (2;3) NME.

Most megmutatjuk, hogy a (2;4) párhoz lényegében az egyetlen megfelelő elrendezés tartozik. Tekintsük ugyanis a két piros pont e egyenesét. Mivel a pontok nincsenek mind egy egyenesen van olyan zöld pont, amely nincs rajta e-n. Kössük össze ezt a pontot a két piros ponttal. Ezen egyenesek mindegyikén kell lennie további zöld pontnak. Most már azonnal adódik a negyedik zöld pont egyetlen lehetséges helye.

Az imént leírtak sokféle rajza, „lényegében” mind ugyanolyan. De miért is mondhatjuk ezt? Nézzük meg ábráinkat a zöld pontok szemszögéből! Nyugodtan tehetünk piros pontot olyan egyenesre, amelyen legalább két zöld pont van. A 4 zöld pontot osszuk két párra. A párok meghatározta egyenesek metszéspontjaira kerülhetnek a piros pontok. Az ilyen pontokat a a 4 zöld pont átlós pontjainak nevezhetjük. Egy általános négyszögnek 3 átlós pontja van, közben tehát ölünkbe pottyant, hogy (3;4) LME. Ha az általános négyszögnek csúcsai zöldek és két átlós pontja piros, akkor a két piros pont egyenesére tetszőleges számú további zöld pont tehető, azaz $z \geq 4$ esetén $(2;z)$ LME. További lehetséges apró feladatok:

(iv) Igazoljuk, hogy $(3;3)$ NME.

(v) Bizonyítsuk be, hogy ha $z \geq 4$, akkor $(3;z)$ LME.

Talán ennyi apró lépéssel sikerült elindítani a kutatómunkát. Általában a diákok ritkán találkoznak a matematikában ilyen helyzettel. Egyetlen feladattal indultunk, de általános megoldása reménytelennek tűnt. Ezért lebontottuk a feladatot és egyszerű eseteit kezdtük el vizsgálni. Mint láthatjuk, még csak a munka kezdetén vagyunk. Azokat az eseteket térképeztük fel, amikor p legfeljebb 3. Most következnek a nehezebb feladatok, a (4;4) és a (4;5). Található ilyen elrendezés, vagy nem?

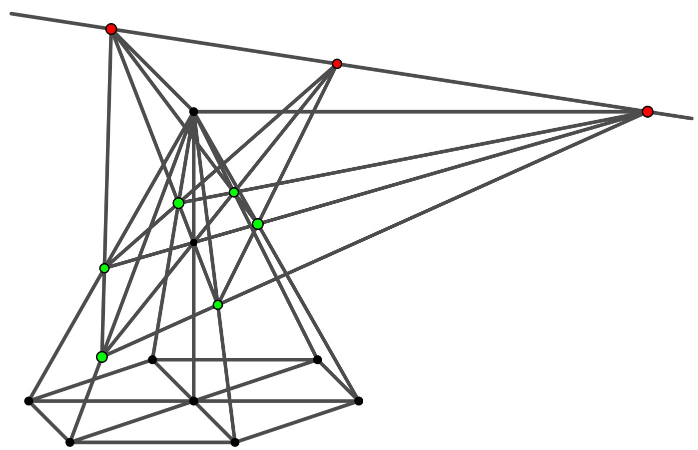
Az igazi kutatómunkához bizony hozzátartozik az eredmények rendszerezése, a nyitva maradt kérdések számon tartása is. Azért szeretem ezt a problémát, mert a diákokat ösztönzi ezeken a területeken is. Akár szentelhetünk az osztály faliújságján is egy rovatot a témának, ahol mindenki közölheti új eredményeit. Nem árt, ha a diákok már az iskolában találkoznak olyan helyzetekkel, ahol ők maguk fogalmazhatnak meg kérdéseket és nem csupán a nekik feltett kérdésekre kell válaszolniuk. Nagy örömömre a feladat kapcsán gyakran diákjaim jönnek elő új folytatási lehetőségekkel: próbáljunk meg olyan általános konstrukciót keresni, ami különböző p értékeknél egyaránt jó. Megérkeztünk az eredeti feladatban szereplő kérdés tárgylásához.

Megmutatjuk, hogy ha $p \geq 2$, és $z \geq 2p$, akkor $(p; z)$ LME. Vigyázat, ez az állítás egyszerűnek tűnik, de megoldása már jóval nehezebb! A megoldást megértheti egy kisdiák is, viszont egy középiskolást, vagy egyetemistát is próbára tehet a kitalálása. Mint a perspektíva tanából ismeretes, ha egy síkra párhuzamos egyeneseket rajzolunk, majd ezeket egy pontból levetítjük egy síkra, mely az eredetivel nem volt párhuzamos, akkor a párhuzamosok egy ponton áthaladó egyenesekké válnak. Ezt a tényt a gyerekek sok esetben már tudják a rajzóráról. Ott készítenek perspektív ábrákat, ahol a párhuzamosok mind a horizont vonalán találkoznak. (Későbbi tanulmányaink alapján azt mondhatjuk, hogy az eredeti sík párhuzamos egyeneseinek közös pontjai az ideális egyenesen vannak, a vetítés során az ideális egyenes képe lesz a perspektív ábrán a horizont vonala.)

Következzen ennyi bevezető után a beígért konstrukció! Tekintsünk egy szabályos $2n$-szöget, legyenek ennek csúcsai zöldek. A sokszög oldalai és átlói n irányt határoznak meg. Vetítsük az említett módon sokszögünket és minden iránynak megfelelő pont a horizontvonalon legyen piros. Így egy megfelelő elrendezést kaptunk az $(n; 2n)$ pároshoz. A piros pontok egyenesére tetszőleges számú további zöld pontot tehetünk, így a feladat állítását beláttuk. Ábránkon $n = 6$ esetén ábrázoltuk a konstrukciót. Egy szabályos hatszög alapú gúlát metsz egy S sík, amely az alappal nem párhuzamos. A horizontvonal az S síknak a metszete a gúla csúcsán átmenő, az alappal párhuzamos síkkal. A szabályos hatszöget a gúla csúcsából vetítjük S-re. *(Lásd az ábrát a következő oldalon.)*

Van még valami, amit átélhetnek a diákok ennek a kutatómunkának a során. Úgy intünk búcsút a problémának, hogy nem sikerült minden szálat elvarrni, maradtak megoldatlan kérdések. Ilyen például az a sejtés, hogy ha $n \geq 4$, akkor $(n; n)$ LME.

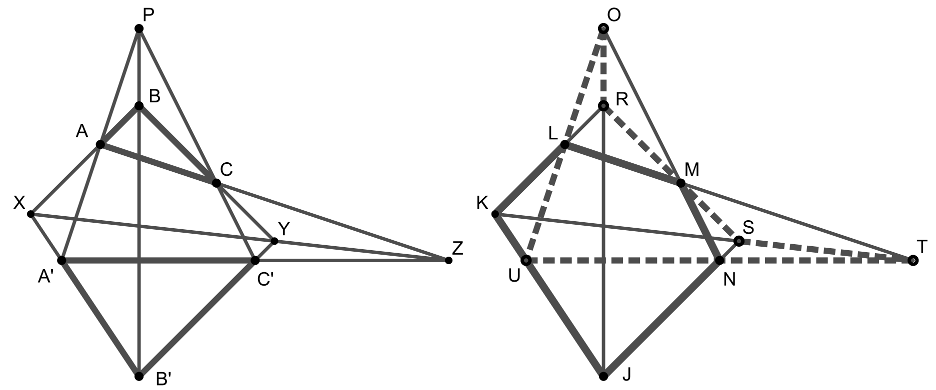
A tanulók egyike más irányba mutató megjegyzést tett: jó lenne, ha sikerülne néhány pontot elhelyezni, hogy egyáltalán ne legyen olyan egyenes, melyen csak 2 pont van. Ezek után bárhogy színezhetnénk a pontokat; minden egyenesen legalább három pont van és két szín lévén, ezek közül legalább kettő egyforma színű.



A figyelmes olvasó észreveheti, hogy a bevezetőben éppen ezzel a feladattal kezdtünk. Ez az úgynevezett Sylvester probléma, több mint 100 éves. Sok szép megoldást adtak már rá. Mindegyik azt mutatja meg, hogy ilyen konstrukció nincs azon kívül, ha a pontok mind egy egyenesen vannak. Zárjuk a kissé hosszúra nyúlt tárgyalást egy máig megoldatlan problémával, melyet Pach Jánostól hallottam. Ezt egy japán matematikus, Komei Fukuda vetette fel: Adott egy egyenes, egyik oldalán n piros, a másik oldalon n zöld pont. Igaz-e, hogy ha nincsenek mind egy egyenesen, akkor létezik olyan egyenes, amelyen 1 piros és 1 zöld pont van?

7. feladat (Reiman István: Kétdimenziós térszemlélet, Matematika Módszertani Lapok 1999. március) Legyen S és T egy-egy sokszög. Azt mondjuk, hogy az S a T sokszögbe van írva, ha S minden csúcsa rajta van T valamelyik oldalának egyenesén (azaz az oldalon vagy annak a meghosszabbításán), ugyanekkor T-ről azt mondjuk, hogy az S köré van írva. Léteznek-e olyan sokszögpárok, amelyek egyszerre egymásba és egymás köré is vannak írva?

Megoldás: Némi próbálgatás után rájöhetünk, hogy egymásba és egymás köré írt háromszögek és négyszögek nincsenek, ennek teljes bizonyítására itt nem térünk ki. Annál inkább meglepő az a tény, hogy ötszögek esetén megvalósítható a kívánt elrendezés. Felhasználjuk a második részben szereplő klasszikus tételt, a Desargues tételt (17-es feladat).

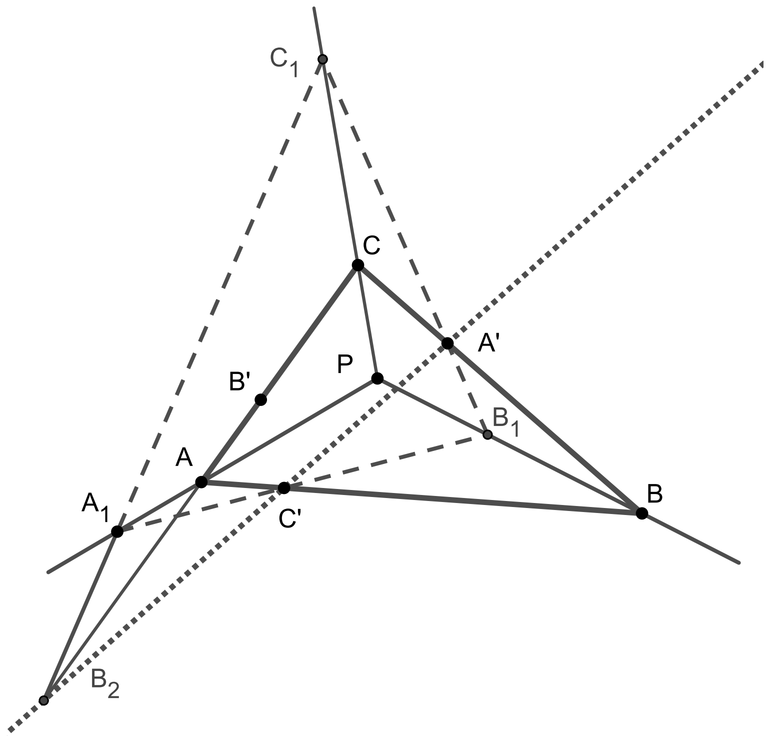


Ha az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyenesek egy közös P ponton mennek át, akkor az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesek X metszéspontja, a $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ egyenesek Y metszéspontja, valamint a $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{C'A'}$ egyenesek Z metszéspontja egy egyenesre illeszkedik. Az alábbi ábrán kétszer látjuk ugyanazt az elrendezést. Az elsőn a Desargues tételnek megfelelő a pontok elnevezése, és a két háromszög oldalainak kiemelése, a másodikon pedig az egyszerre egymásba és egymás köré írható $JKLMN$ és $ORSTU$ ötszögek figyelhetők meg.

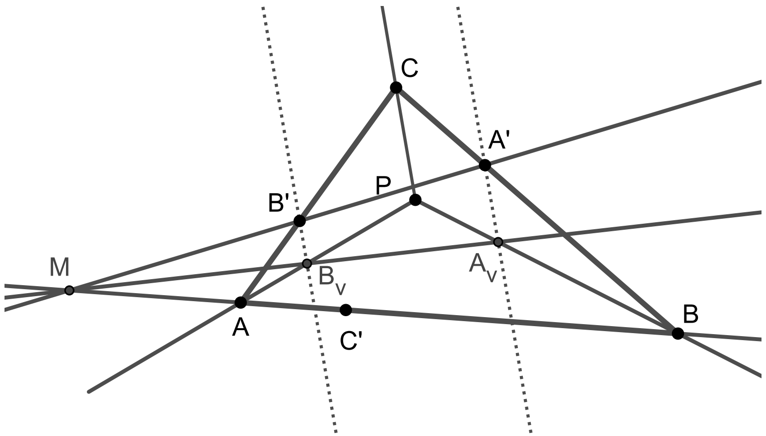
8. feladat Az ABC háromszög belsejében felvettünk egy P pontot, majd az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{CA}$ oldalakon kijelöltük kemény ceruzával rendre a C', A' és B' pontokat és meghúztuk a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ egyeneseket. A rajzot félretettük, majd egy év múlva újra előkerült. Hogyan lehetne rekonstruálni az ABC háromszöget, ha a lapon csak a kemény ceruzával rajzolt $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ egyenesek és az A', B' és C' pontok láthatók?

Megoldás: Ez a feladat a kedvcsináló első részbe került, mivel kitűzése során egy ártatlan szerkesztős feladatnak tűnhet. Megoldást találni rá elég nehéz. Az alábbiakban közölt megoldás a Desargues tételt használja, melyet részletesebben a klasszikus problémák között tárgyalunk.

Vegyünk fel a $\overleftrightarrow{PA}$ egyenesen egy A_1, pontot. Az $\overleftrightarrow{A_1C'}$ és $\overleftrightarrow{PB}$ egyenesek metszéspontja legyen B_1, a $\overleftrightarrow{B_1A'}$ és $\overleftrightarrow{PC}$ egyenesek metszéspontja C_1. Ekkor ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek a P pontra nézve perspektívek, ezért a Desargues tétel értelmében megfelelő oldalegyeneseik metszéspontjai egy egyenesre esnek. Ez az egyenes két megfelelő oldalpár metszéspontjaként adódóan éppen az $\overleftrightarrow{A'C'}$. Legyen az $\overleftrightarrow{A'C'}$ és $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ metszéspontja B_2. Ekkor a $\overleftrightarrow{B''B'}$ egyenes megegyezik a keresett $\overleftrightarrow{AC}$ egyenessel. Így $\overleftrightarrow{B_2B'}$ egyenes kimetszi a $\overleftrightarrow{PA}$ és $\overleftrightarrow{PC}$ egyenesekből az A és C pontokat. Majd például $\overleftrightarrow{AC'}$ és $\overleftrightarrow{PB}$ metszéspontjaként kaphatjuk B-t.

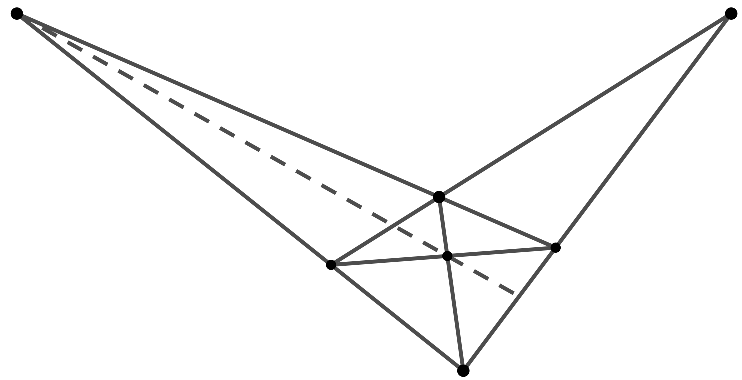


2. megoldás: A Pohlke-tétel miatt a $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ egyenesek egy axonometria tengelykeresztjének tekinthetőek; az A', B', C' pontok pedig egy sík nyomvonalaira eső egy-egy pont axonometrikus képeinek. A feladat ekkor a sík nyomvonalainak megszerkesztése. Ehhez az A' és B' axonometrikus képpel rendelkező, megfelelő koordinátasíkbeli pontok első képeit kell megszerkeszteni: a pontokat $\overleftrightarrow{PC}$-vel párhuzamos rendezővel a $\overleftrightarrow{PA}$ illetve $\overleftrightarrow{PB}$ koordinátatengelyekre vetítve kapjuk az első képeket, ezek A_v és B_v; ezek összekötő egyenese kimetszi $\overleftrightarrow{A'B'}$-ből az egyenes M nyompontját. Ez rajta van a keresett sík első nyomvonalán, így ezt C'-vel összekötve a keresett háromszög egy oldalegyenesét kapjuk.

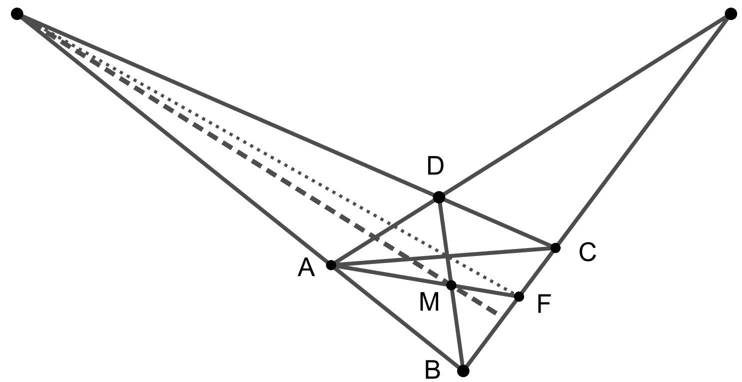


9. feladat Az ábrán egy négyzet fényképét látjuk. (a) Hogyan húzhatjuk meg a négyzet egyik felezővonalát? (b) Hogyan húzhatnánk meg az egyik harmadolóvonalát? (Mindkét osztóvonal az eredeti négyzet egyik oldalával párhuzamosan fut és osztja a területet a megfelelő arányban.)

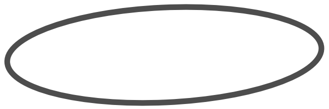
Megoldás: (a) Húzzuk meg a négyzet oldalainak egyeneseit. A párhuzamos oldalak találkozási pontja a horizont vonalon lesz. Ezek közül tekintsük az egyiket és használjuk ki, hogy a megfelelő oldalakkal párhuzamos felezővonal áthalad ezen a ponton is, továbbá áthalad az átlók metszéspontján is.



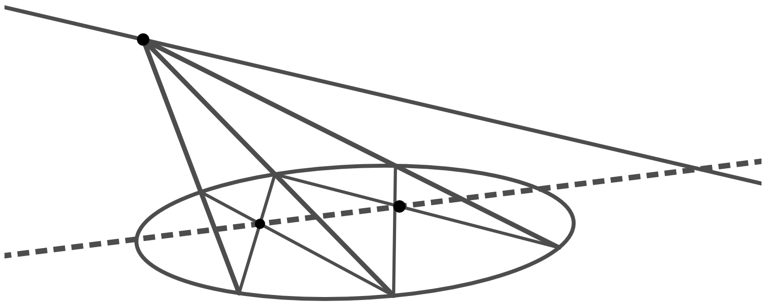
(b) Használjuk az előző megoldást és az alábbi ábra betűzését. A $\overline{BC}$ oldal Ffelezőpontját az (a) részben megkaptuk. Az $\overline{AF}$ és $\overline{BD}$ szakaszok M metszéspontját tekintve észrevehetjük, hogy AMD és BMF hasonló háromszögek, a hasonlóság aránya $AD : BF = 2 : 1$, tehát M harmadolja a $\overline{BD}$ átlót. Az M pontot összekötve a megfelelő párhuzamos oldalak metszéspontjával megkapjuk a harmadolóvonalat. (A megoldásban használtuk az euklideszi sík tulajdonságait pl. hasonlóság, továbbá a perspektív kép tulajdonságait: a párhuzamos egyenesek projektív geometriából ismert közös pontjának – a végtelen távoli pontnak – képe a horizontvonalon megjelenik.)



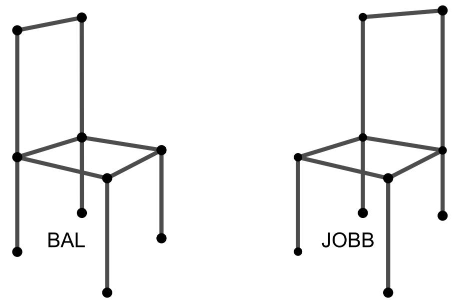
10. feladat Egy kör alakú tócsa fényképét látjuk az ábrán. Hogyan rajzolhatnánk meg egy olyan vonal képét, amely az eredeti kör középpontján áthaladt?



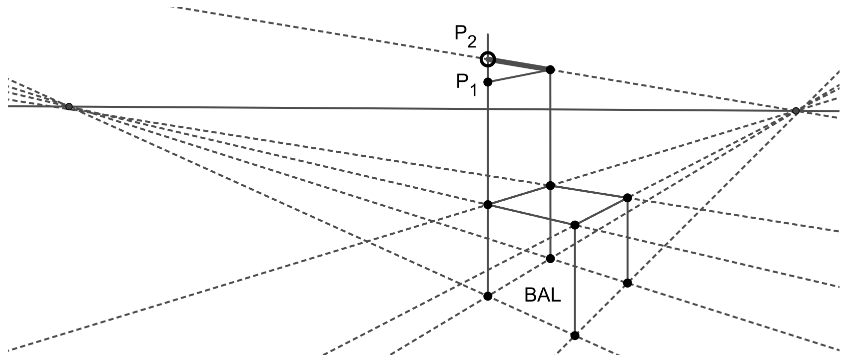
Megoldás: Ez egy becsapós feladat. Amennyiben a síkon van egy kör és egy tőle diszjunkt egyenes, az átvetíthető egy másik körbe és attól diszjunkt tetszőleges másik egyenesbe. Ezért erre a kérdésre így nem lehet egyértelmű megoldást adni. Ha a tócsa képe mellett megkapjuk a horizontvonalat is, akkor viszont már adható megoldás. Válasszunk ki a horizontvonalon egy tetszőleges pontot, majd ezen keresztül húzzunk három szelőt. Ezek az eredeti kör alakú tócsának párhuzamos húrjainak egyenesei voltak. Ezen húrok, mint alapok húrtrapézokat határoznak meg. A húrtrapézok átlóinak metszéspontjait összekötő egyenes a kör középpontján áthalad. Ennek a gondolatmenetnek alapján készült az alábbi ábra.



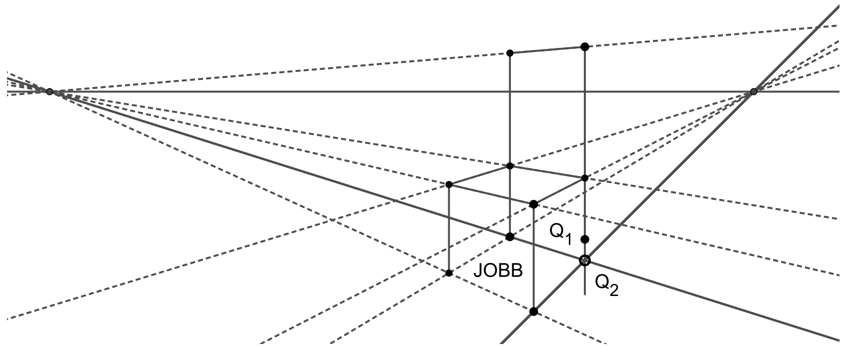
11. feladat Rajzoljunk széket! – mondta a rajztanár. Az ábrákon két diák munkáját látod. Miért nem jó a rajz? Hogyan javítható a hiba?



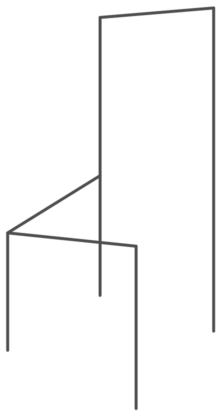
Megoldás: Vegyük először a bal oldali széket. Ha berajzoljuk az ülőlap és a széklábak által meghatározott vonalakat, akkor a megfelelő pontokat összekötő párhuzamos egyenesek a horizontvonalon találkoznak. A csalafinta hiba abban rejlik, hogy a szék háttámlájának tetejét is ennek megfelelően kell rajzolni. Egy lehetséges javítóvonalat berajzoltunk. Az eredeti rajzon szereplő P_1 pont helyett a P_2 esetén lesz a szék háttámlájának felső vonala az ülőlap megfelelő vonalával párhuzamos.



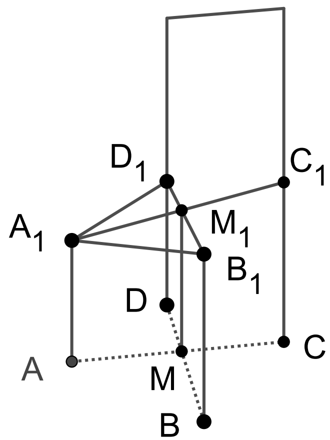
Most tekintsük a jobb oldali széket! Ennek pedig a lábai nem stimmelnek, így billegne a szék. Az ülőlap által meghatározott párhuzamos egyenesek kijelölik a horizontvonalat, ennek segítségével a rajz egy lehetséges javítását megadtuk. A Q_1-el jelölt széképláb "nem ér le a padlóra". A rajznak megfelelően a Q_2-be helyezve már nem fog billegni a szék. (A Q_2-n csak azért lóg túl a vonal, hogy a szerkesztés jobban követhető legyen, természetesen a szék végső rajzánál a Q_2 alá futó részt ki kell radírozni.)



12. feladat A 11-es feladatban látott szék újabb változatával foglalkozunk. Egy tréfás kedvű asztalos az ülőlapot nem vízszintesre készítette. Az ülőlap három csúcsát ismerjük egy-egy széklábon. Keressük meg a hiányzó csúcsot a negyedik széklábon.



Megoldás: A széklábak végpontjai legyenek A, B, C és D. A széklábak mind függőlegesek, az ülőlap megfelelő három csúcsa legyen A_1, B_1 és D_1. Az A és C széklábak síkjának a B és D síkjával vett metszésvonalát meg tudjuk húzni, hiszen ez az $\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{BD} = M$ ponton áthaladó függőleges egyenes. Ennek metszete $\overleftrightarrow{B_1D_1}$-gyel legyen M_1. A keresett C_1 pontot megkapjuk a C-n áthaladó függőleges egyenes és $\overleftrightarrow{A_1M_1}$ metszéspontjaként.

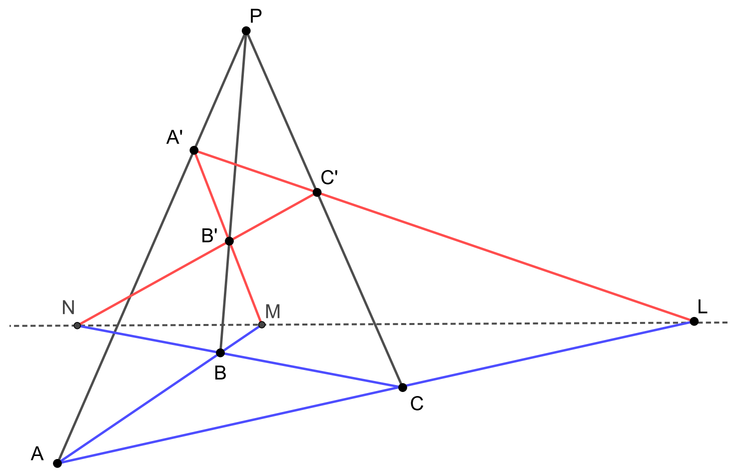


13. feladat Igazoljuk, hogy egy tetszőleges háromszög magasságvonalai egy ponton mennek át.

Megoldás: Némi térgeometriai szemlélettel szép bizonyítást adhatunk a jól ismert tételre. Tekintsük a háromszög S síkját és a háromszög minden oldalára állítsunk Thalész gömböt. Ez alatt azt értjük, hogy például az $\overline{AB}$ oldal esetén tekintsünk olyan gömböt, amelynek középpontja az $\overline{AB}$ felezőpontja, sugara pedig az $\overline{AB}$ szakasz fele. Az $\overline{AB}$ és $\overline{AC}$ átmérőjű gömbökön egyaránt rajta lesz az ABC háromszög A csúcsából induló magasságának A' talppontja. Az említett két gömb metszésvonala egy kör, ennek átmérője $\overline{AA'}$, síkja pedig merőleges S-re. Ugyanez elmondható bármely oldalpárra, illetve bármely magasságra. Ebből következik, hogy a három gömb felszínének közös pontjának merőleges vetülete rajta van a három magasságvonalon, tehát azok egy ponton mennek át.

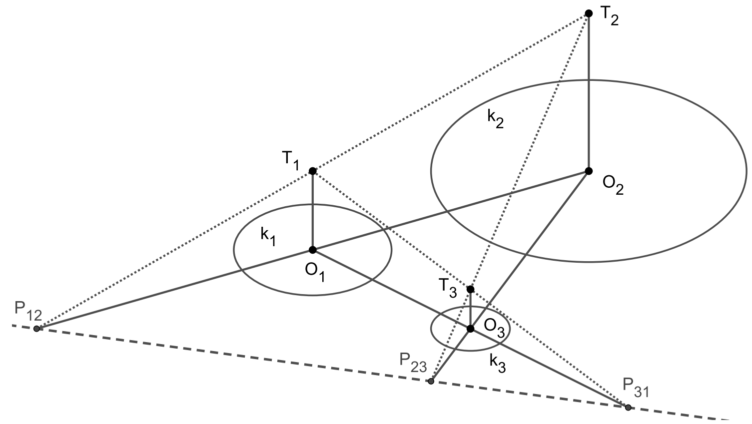
14. feladat Desargues tétel: Tegyük fel, hogy az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek úgy helyezkednek el a síkon, hogy az $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ és $\overleftrightarrow{CC'}$ egyeneseknek van egy közös P pontjuk. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesek M metszéspontja, a $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{B'C'}$ egyenesek N metszéspontja, valamint a $\overleftrightarrow{CA}$ és $\overleftrightarrow{C'A'}$ egyenesek L metszéspontja egy egyenesre illeszkedik. (Most tegyük fel, hogy a megfelelő oldalpárok nem párhuzamosak.)

Megoldás: Gondoljunk az ábrára úgy, mint egy térbeli $ABCP$ tetraéder vetületére. Ekkor az $\overleftrightarrow{AB}$ és $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesek egy síkban vannak, mégpedig a PAB háromszög síkjában, így ez a két egyenes a térben valóban metsző. Az M metszéspont rajta van az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesen, tehát rajta van az ABC háromszög síkján. ugyanígy elmondható, hogy az M pont rajta van az $\overleftrightarrow{A'B'}$ egyenesen, tehát rajta van az $A'B'C'$ háromszög síkján. Ezek szerint M rajta van az ABC és $A'B'C'$ síkok metszésvonalán. Logikai szimmetria miatt igaz ez az N és L pontokra is. A két sík metszésvonala egyenes, ezért a térben M, N és L egy egyenesen vannak, így vetületeik is egy egyenesre esnek.

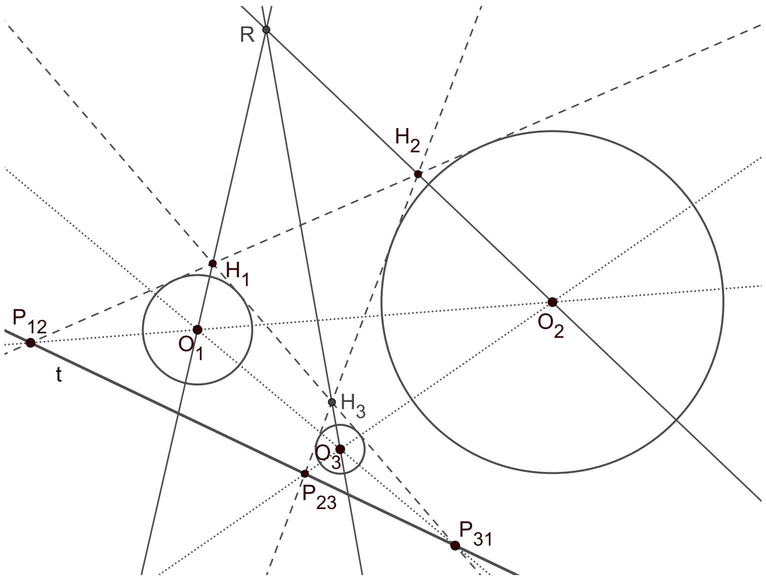


15. feladat Monge tétel: Tekintsünk három különböző sugarú kört, melyek között nincs két koncentrikus. Vegyük páronként a külső hasonlósági pontjukat. Igazoljuk, hogy ez a három pont egy egyenesen van.

Megoldás: Legyen a körök síkja S. Minden kör fölé építsünk olyan egyenes kúpot, amelynek magassága éppen egyenlő az alapjául szolgáló kör sugarával. A kapott kúpok ekkor középpontosan hasonlók és külső hasonlósági pontjaik megegyeznek a körök S-en belül tekintett hasonlósági pontjaival. Legyen például két kör középpontja O_1 és O_2, a föléjük emelt kúpok csúcsa T_1 és T_2, közös hasonlósági pontjuk $P_{12} = \overleftrightarrow{O_1O_2} \cap \overleftrightarrow{T_1T_2}$. A további két pár esetén is hasonló módon alkalmazva a jelölést kapjuk, hogy a P_{12}, P_{23} és P_{31} pontok egyrészt rajta vannak az S síkon, másrészt rajta vannak a kúpcsúcsok által meghatározott T síkon is. A két sík metszete viszont egy egyenes, ezzel a bizonyítást befejeztük. Az ábránkon a kúpok helyett csak azok csúcsát és a belőlük induló magasságokat láthatjuk.

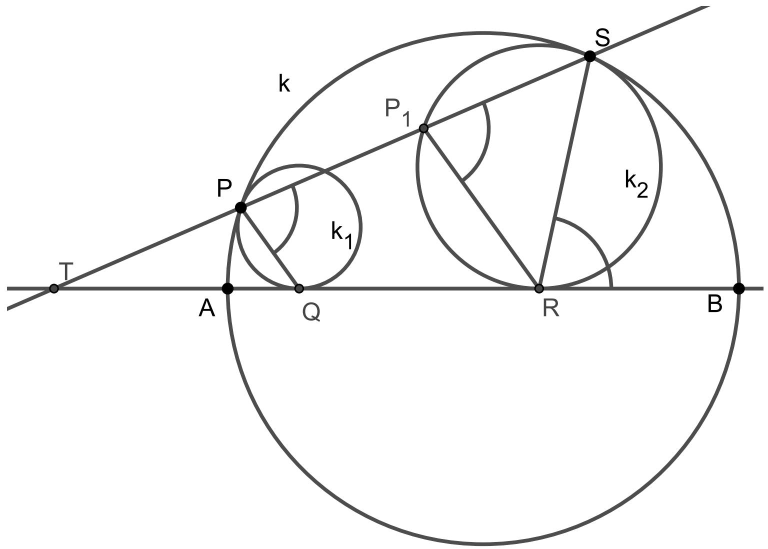


2. megoldás: A körök páronként vett egy-egy közös külső érintőjét megrajzolva kapott $H_1H_2H_3$ háromszög és $O_1O_2O_3$ az R pontra nézve perspektívek (mert a külső háromszög szögfelezői egy ponton mennek át), így a t tengelyre nézve is perspektívek, ami éppen a bizonyítandó állítás.



16. feladat (OKTV 2002–2003, II. kategória, első forduló, 5. feladat) Adott a k kör és annak egy $\overline{AB}$ átmérője. A k_1 és k_2 körök az $\overline{AB}$ által meghatározott egyik félkör belsejében helyezkednek el; k_1 a k kört a P pontban, $\overline{AB}$-t a Q pontban érinti; ugyanígy k_2 a k kört az S, az $\overline{AB}$-t pedig az R pontban érinti. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög.

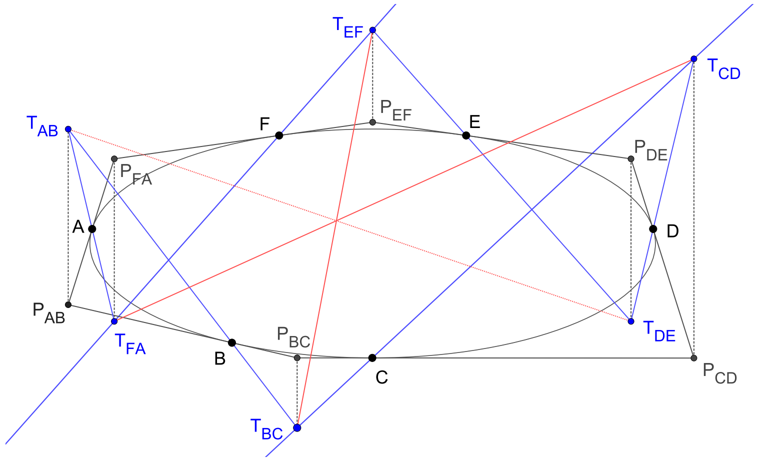
Megoldás: Alkalmazzuk az előző feladatban kapott eredményt. A k és k_1 közös külső hasonlósági pontja P, a k és k_2 közös külső hasonlósági pontja S. Legyen k_1 és k_2 közös külső hasonlósági pontja T. Ekkor T, P, S egy egyenesen vannak, másrészt T rajta van a $\overleftrightarrow{QR}$ közös érintőn is. Legyen $\overleftrightarrow{TS} \cap k_2 = \{P_1, S\}$. Ha T-ből középpontos hasonlósággal k_1-et k_2-be visszük, akkor P képe P_1, így $QPS\angle = RP_1S\angle$. A k_2 körön az RS ívhez tartozó kerületi és érintő szárú kerületi szögek egyenlősége miatt $RP_1S\angle = BRS\angle$. Ezzel a bizonyítást be is fejeztük, hiszen $QPS\angle = BRS\angle$ szerint azt kaptuk, hogy a $PQRS$ négyszög két szemközti szögének összege $180°$.



17. feladat Brianchon tétel: Egy kör köré írt hatszögben (ahol az oldalak a kör érintői) a nagyátlók egy pontban metszik egymást. (Nagyátló azon pontok között fut, amelyek – mindkét irányban tekintve – harmadszomszédosak.)

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. A hatszög csúcsaiban állítsunk a kör síkjára merőleges szakaszokat felváltva fel illetve lefele. A szakaszok hossza legyen mindig akkora, amekkora ebből a pontból a körhöz húzható érintőszakasz hossza; például a P_{BC} csúcsból lefele fut egy $\overline{P_{BC}B} = \overline{P_{BC}C}$ hosszúságú szakasz, ennek másik végpontja T_{BC}.

A megfelelően indexelt, P-vel betűzött hatszög éppen a hasonlóan indexelt T-vel jelölt térbeli hatszög merőleges vetülete. A térbeli hatszöget vizsgálva a $\overline{T_{BC}T_{EF}}$ átló és a $\overline{T_{CD}T_{FA}}$ átló egy síkban vannak, mégpedig a $\overleftrightarrow{T_{BC}T_{CD}}$ és $\overleftrightarrow{T_{EF}T_{FA}}$ egyenesek síkjában. Ez utóbbi két egyenes ugyanakkora szöget zár be a $\overleftrightarrow{CF}$ egyenessel és a kör síkjával, ezért valóban egy síkban vannak. Ezzel a megfontolással lényegében készen is vagyunk, hiszen a térbeli indexes T-vel jelölt hatszög összes csúcsa nincs egy síkban, viszont nagyátlói a logikai szimmetria miatt páronként metszők, ami csak úgy lehet, ha azok egy ponton mennek át. Ennek a közös pontnak a kör síkjára eső merőleges vetülete lesz az érintők hatszögének nagyátlóinak egyetlen közös pontja.

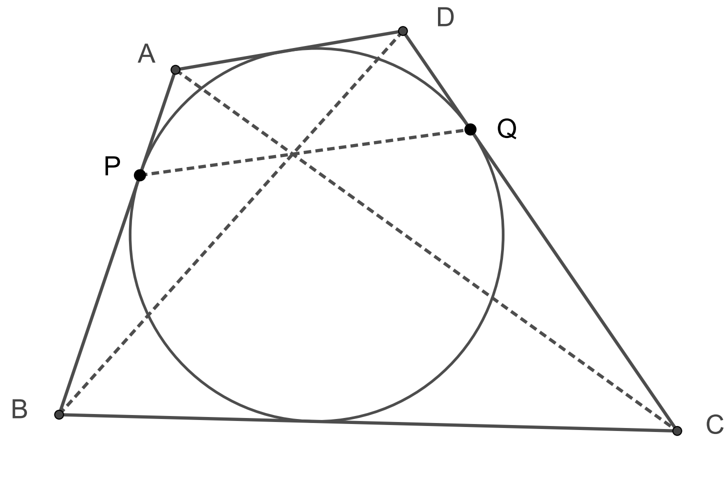


Megjegyzés: A tétel általánosabban igaz, a kör helyett tekinthető parabola, ellipszis vagy hiperbola is. Ezek kúpszeletek, a köre vonatkozó bizonyítás vetítéssel átvihető, hiszen a vetítés illeszkedéstartó transzformáció.

18. feladat Az $ABCD$ érintőnégyszög két szemközti oldalán a beírt kör érintési pontjai legyenek P és Q. Igazoljuk, hogy az $\overline{AC}$ és $\overline{BD}$ átlók metszéspontja rajta van a $\overline{PQ}$ szakaszon.

Megoldás: Ez a feladat a Brianchon tétel alkalmazásával nagyon röviddé válik. Legyenek P és Q rendre az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalakon levő érintési pontok. Alkalmazzuk a Brianchon tételt az $APBCQR$ hatszögre, melynek beírt köre az $ABCD$ beírt köre. A tétel értelmében $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ és $\overleftrightarrow{BD}$ egy ponton mennek át, ezzel a bizonyítást befejeztük.

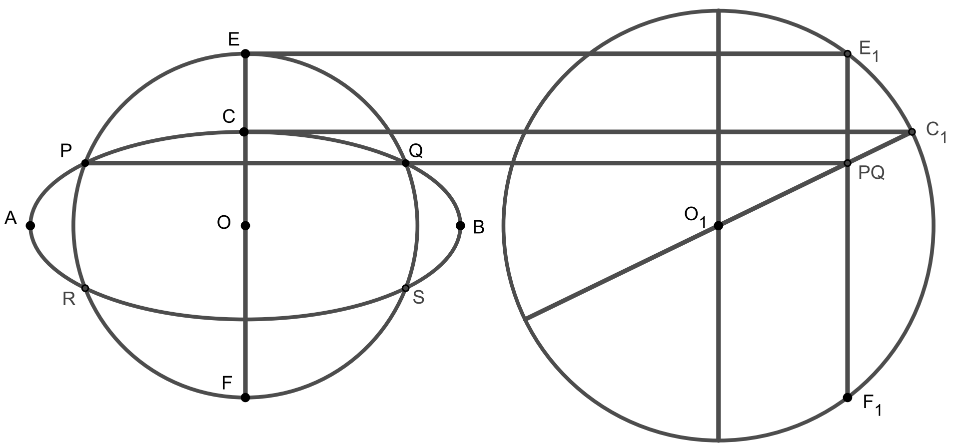
Megjegyzés: A Brianchon tételben szereplő hatszög esetünkben kissé szokatlan, de az ilyen "elfajuló" esetekben is érvényes marad.



19. feladat Adva van egy kör és egy ellipszis a tengelyeivel úgy, hogy a középpontjuk egybeesik. Szerkesszük meg az ellipszis és a kör metszéspontjait.

Megoldás: Tudjuk, hogy a gömbnek minden síkmetszete kör. Ha a kör síkja párhuzamos a rajz síkjával, akkor annak merőleges vetülete is kör. Ha azonban a kör síkja nem párhuzamos a rajz síkjával, akkor annak a vetülete vagy ellipszis, vagy szakasz.

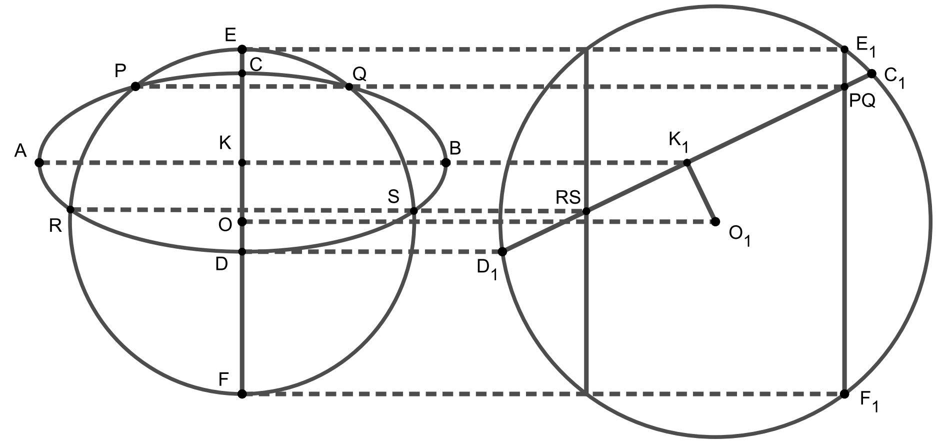
Ezen meggondolásból kiindulva: az adott ellipszist felfoghatjuk úgy, mint egy gömb olyan síkmetszetének vetületét, melynek síkja átmegy a gömb középpontján, az adott kört pedig ezen gömb olyan síkmetszetének tekinthetjük, melynek síkja párhuzamos a rajz síkjával. Helyezzük az ellipszis kistengelyén át a rajz síkjára merőleges síkot és vizsgáljuk az ebben levő metszetet. A fél ellipszisnek ezen metszetben az O_1C_1 felel meg, ahol az O_1C_1 távolság egyenlő az ellipszis nagytengelyének felével, mert a gömbsugár a vetületben valódi hosszat mutat, ugyanis párhuzamos a rajz síkjával. Ez a távolság egyúttal a gömb sugarával egyenlő, így a gömbbel való metszet az O_1C_1 sugarú kör. Az adott kör sugara kisebb a gömb sugaránál, ezért annak síkja nem megy át a gömb középpontján. A metszetben ezen kör egy $\overline{E_1F_1}$ szakasznak látszik. Így a síkbeli feladatból térbeli köröket konstruáltunk, melyek azonos gömbön vannak. Ezeknek a köröknek a metszetei csakis a két sík metszésvonalán lehetnek, vagyis a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenesen. A másik két metszéspontot hasonlóan kaphatjuk meg, ha az ellenkező félkörök metszéspontjait vizsgáljuk. Ezeket egyszerűbben a szimmetriából adódóan is megkaphatjuk.



Az ábrából leolvasható, hogy megoldást csak akkor kapunk, ha az ellipszis nagytengelye nagyobb, vagy egyenlő az adott kör sugaránál.

20. feladat Adva van egy ellipszis a tengelyeivel és egy kör úgy, hogy a kör középpontja rajta legyen az ellipszis kistengelyén. Szerkesszük meg az ellipszis és a kör metszéspontjait.

Megoldás: Mivel az ellipszis középpontja nem esik egybe a kör középpontjával, ezért a kört is meg az ellipszist is felfoghatjuk úgy, mint egy gömb két olyan síkmetszetének vetületeit, amelyek nem mennek át a gömb középpontján. Az adott kör a gömb olyan síkmetszetének a vetülete, amelynek síkja párhuzamos a rajz síkjával, míg az ellipszis a gömb olyan síkmetszetének vetülete, amely a rajz síkjával bizonyos hegyesszöget zár be. A ferde helyzetben levő körnek a rajz síkjával párhuzamos átmérője a vetületben valódi hosszot mutat, míg a többi átmérő rövidül. A legnagyobb rövidülést az említett átmérőre merőleges körátmérő adja, ennek vetülete az ellipszis kistengelye. Ebből következik, hogy a ferde helyzetű körmetsző sík a rajz síkjával olyan szöget alkot, amely a derékszögű háromszög egyik hegyesszöge. A derékszögű háromszög átfogója a nagytengely fele, míg a szög melletti befogója a kistengely fele.



Ha az ellipszis kistengelyén át a rajz síkjára merőleges metszetet vesszük, akkor itt a derékszögű háromszög és a hajlásszög azonnal adódik. Keressük még a gömb középpontját. Ha a két körmetszet középpontjában a körök síkjára egy-egy merőlegest emelünk, akkor ezen merőlegesek metszéspontjában lesz a keresett gömb O középpontja. Ha O körül a metszet síkjában megrajzoljuk a gömb főkörét a C_1 és D_1 pontokon át, akkor e körben megtaláljuk a rajz síkjával párhuzamos körmetsző síkok helyét. A két körmetsző sík egy egyenesben metszi egymást. Ennek metszése a megadott körön adja az P illetve Q pontot, valamint az R és S pontot.

21. feladat Hány gömbbel lehet eltakarni egy pontszerű fényforrást?

Megoldás: A feladat szövege nyilván úgy értendő, hogy a P-vel jelölt pontszerű fényforrás nincs egyik gömb belsejében sem. Nyilván három gömb nem elég, hiszen a gömbök középpontjai által meghatározott S síkra P-ből állított merőleges egyik P-ből induló félegyenesét a fényforrás teljesen bevilágítja.

Négy gömb viszont már elegendő. Legyen P az $ABCD$ szabályos tetraéder középpontja. Tekintsük az ABC köré írt k_D kört és egy olyan P-t nem tartalmazó gömböt, melynek egyik síkmetszete éppen k_D. Ez a gömb a P-ból induló összes olyan fénysugarat eltakarja, amelyek a tetraéderből az ABC lapon lépnének ki. Hasonló módon definiáljuk a másik három gömböt is, ezzel a feladatot megoldottuk.

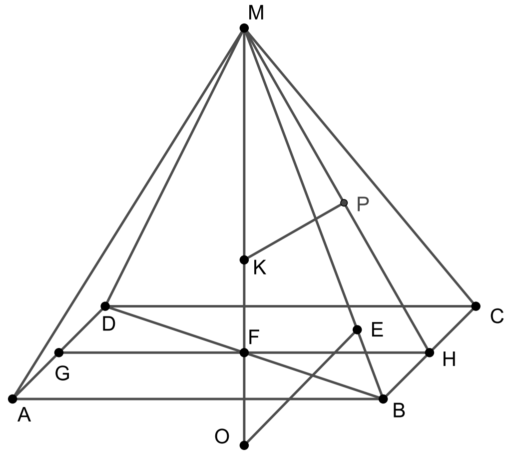
Ha szeretnénk diszjunkt gömbökkel megoldást adni, akkor az iménti négy gömb közül az elsőt rögzítjük, a másodikat P ből nagyítjuk akkorára, hogy diszjunkt legyen az elsőtől. Majd a harmadik és negyedik gömböt is sorra nagyítjuk P-ből úgy, hogy a korábbiakkal ne legyen közös pontjuk.

22. feladat Van két egybevágó fakockánk. Fúrhatunk-e az egyikre olyan lyukat, amin a másik átdugható?

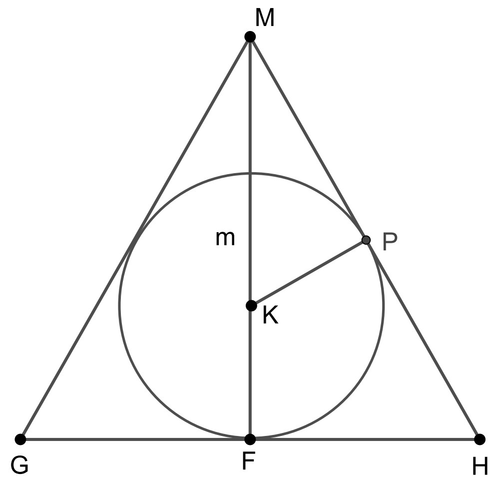
Megoldás: A kérdés elég meglepően hangzik és a válasz is váratlan: IGEN. Legyen mindkét kockánál az élhossz 1. Ha az egyik kockát merőlegesen vetítjük az egyik testátlójára merőleges síkra, akkor a vetület egy olyan szabályos hatszög lesz, amelynek másodszomszédos csúcsainak távolsága, tehát a párhuzamos oldalak távolsága $\sqrt{2}$. Egy ilyen hatszögbe bele lehet rajzolni egy 1 oldalú négyzetet, ezért valóban fúrhatunk olyan lyukat, amelyen a másik kocka átdugható.

23. feladat (OKTV 1998–1999, II. kategória, második forduló, 3. feladat) Egy szabályos négyoldalú gúla beírt gömbjének a középpontja, valamint élérintő gömbjének a középpontja egyenlő távol van a gúla alapsíkjától. Mekkora a gúla térfogata, ha alapélének a hossza 2? (Az élérintő gömb a gúla minden élét az él belső pontjában érinti, a beírt gömb pedig minden lapot belső pontban érint.)

Megoldás: Legyen a beírt gömb középpontja K, az élérintő gömbé O. A gúla szimmetriái miatt ezek rajta vannak a gúla tengelyén, azaz a csúcsából az alaplapra állított merőlegesen. Mivel az alapsíktól egyenlő távol vannak, ezért vagy egybeesnek, vagy tükrösek az alapsíkra.



Megmutatjuk, hogy az első eset nem állhat fenn. Mivel K-tól minden lap síkja egyenlő távol van, ezért egybeesés esetén O-tól is, következésképpen az élérintő gömbből minden lap ugyanakkora kört metszene ki. Viszont a kimetszett körök a lapok beírt körei; ezek azonban nem lehetnek egyenlők, hiszen az alaplap beírt körének átmérője 2, az oldallapoké 2-nél kisebb, mivel a háromszögbe írt kör átmérője kisebb minden háromszögoldalnál.



Legyen a gúla alaplapja az $ABCD$ négyzet, csúcsa M, M-ből az alapra állított merőleges talppontja (a négyzet középpontja) F. A bevezetőben mondottak szerint $MK + MO = 2MF$. Vezessük be az $MF = m$ jelölést, ezek szerint:

$$MK + MO = 2m. \tag{1}$$

Fejezzük most ki az MK és MO távolságokat m segítségével. A gúla MGH szimmetriasíkja a beírt gömbből az MGH háromszög beírt körét metszi ki, ez az MGH egyenlő szárú háromszög $\overline{MH}$ szárát a P pontban érinti. Mivel külső pontból a gömbhöz (körhöz) húzott érintőszakaszok egyenlők, $HF = HP = 1$; az MFH derékszögű háromszögből $MH = \sqrt{m^2+1}$. Az MPK és MFH derékszögű háromszögek hasonlók, ezért

$$\frac{MK}{MP} = \frac{MH}{MF}, \text{ azaz } MK = \frac{MP \cdot MH}{MF} = \frac{(-1+\sqrt{m^2+1})\sqrt{m^2+1}}{m},$$

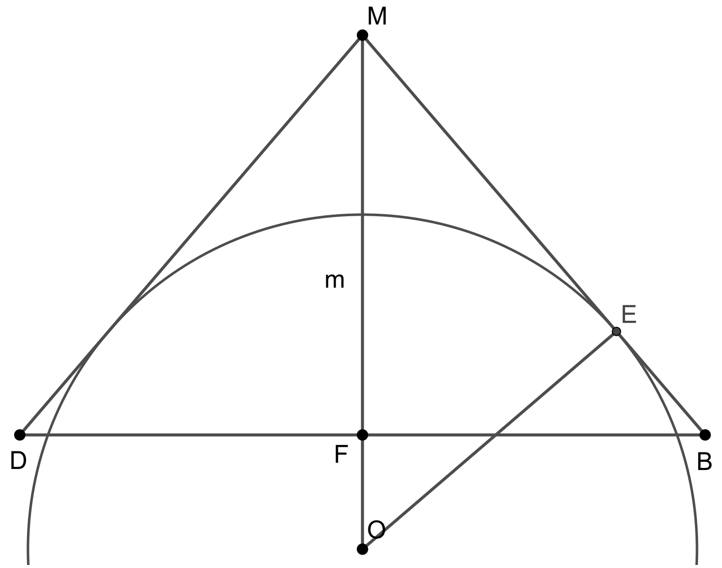
$$MK = \frac{-\sqrt{m^2+1}+m^2+1}{m}. \tag{2}$$

Nézzük most a gúla MBD átlómetszetét, ez a gúlából az MBD egyenlő szárú háromszöget metszi ki, az élérintő gömbből pedig olyan kört, amely az $\overline{MB}$ szárat E-ben érinti és középpontja az $\overline{MF}$ szimmetriatengelyen van. Mivel az élérintő gömb az alapnégyzet oldalait a felezőpontokban érinti, $\overline{BH}$ és $\overline{BE}$ közös pontból induló érintőszakaszok, és ezért $BH = BE = 1$.

Az MFB derékszögű háromszögből $MB = \sqrt{m^2+2}$. Az MFB és MEO hasonló derékszögű háromszögek, ezért

$$\frac{MO}{ME} = \frac{MB}{MF}, \quad MO = \frac{ME \cdot MB}{MF} = \frac{(\sqrt{m^2+2}-1)\sqrt{m^2+2}}{m},$$

$$MO = \frac{m^2+2-\sqrt{m^2+2}}{m}. \tag{3}$$



Helyettesítsük be a (2) és (3) alatti értékeket (1)-be, m-mel mindjárt megszorozzuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$-\sqrt{m^2+1}+m^2+1+m^2+2-\sqrt{m^2+2} = 2m^2;$$

átrendezve

$$\sqrt{m^2+1}+\sqrt{m^2+2} = 3.$$

Mindkét oldalt négyzetre emeljük és ismét átrendezzük:

$$\sqrt{(m^2+1)(m^2+2)} = 3-m^2.$$

Végül még egyszer négyzetre emelve mindkét oldalt, rendezés után a

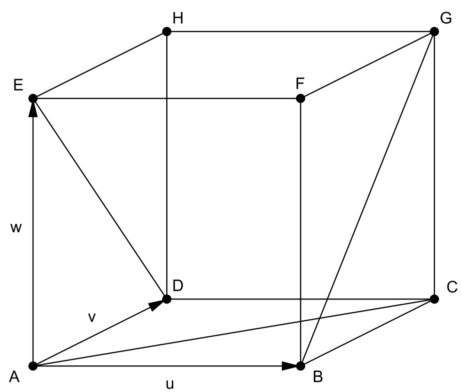
$$9m^2 = 7, \quad m^2 = \frac{7}{9}$$

eredményt kapjuk, ebből m egyetlen lehetséges értéke $m = \frac{\sqrt{7}}{3}$. A gúla térfogata:

$$V = \frac{2^2\sqrt{7}}{3 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{7}}{9} \approx 1,18.$$

24. feladat (OKTV 2014–2015, II. kategória, harmadik forduló, 2. feladat) Tekintsük egy kocka három olyan lapátlójának egyenesét, amelyek páronként kitérőek. Az e egyenes az iménti három egyenes mindegyikével ugyanakkora szöget zár be. Mekkora lehet ez a szög?

Megoldás: Használjuk az ábra jelöléseit. Először megmutatjuk, hogy a feladat szövegének megfelelően csak lényegében egyféle lehetőségünk van kijelölni három lapátlót. Ezek az ábrán a $\overline{BG}$, $\overline{AC}$ és $\overline{DE}$.



Legyen az egyik lapátlót tartalmazó lap az $ABCD$. Még két további lapátló kell, ezek nem lehetnek mindketten a szemben levő lapon, ezért egyikük lapja az $ABCD$-re merőleges, legyen ez a $BCGF$. Ezen két lapon csak úgy tudunk kitérő lapátlókat felvenni, ha a közös $\overline{BC}$ él végpontjaiból egy-egy indul. Tegyük fel, hogy az egyik az $\overline{AC}$, a másik a $\overline{BG}$. A megmaradt lapátlók közül vagy $\overline{DE}$-t, vagy $\overline{FH}$-t választhatjuk, e két eset forgatással egymásba vihető, ezért válasszuk $\overline{ED}$-t. Megkaptuk, hogy lényegében egyetlen módon lehetséges kiválasztani három lapátlót úgy, hogy azok páronként kitérőek legyenek.

Bevezetünk három, páronként egymásra merőleges egységvektort. Legyen $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AE} = \underline{w}$. A keresett e egyenes $\underline{i}$ irányvektora legyen $\underline{i} = \alpha\underline{u} + \beta\underline{v} + \gamma\underline{w}$. A kijelölt lapátlóink irányvektorai $\overrightarrow{BG} = \underline{v} + \underline{w}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$ és $\overrightarrow{DE} = \underline{w} - \underline{v}$. Mivel $|\overrightarrow{BG}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{DE}|$, ezért e akkor zár be mindegyikkel ugyanakkora szöget, ha $\underline{i}$ skalárszorzatának abszolút értéke mindhárommal ugyanakkora.

$$\underline{i} \cdot \overrightarrow{BG} = \beta + \gamma, \quad \underline{i} \cdot \overrightarrow{AC} = \alpha + \beta, \quad \underline{i} \cdot \overrightarrow{DE} = \gamma - \beta.$$

Vizsgáljuk a $|\beta + \gamma| = |\gamma - \beta|$ feltételt. i) Ha $\beta + \gamma = \gamma - \beta$, akkor $\beta = 0$. Két lehetőség maradt: i1) ha $\gamma = \alpha$, ekkor e párhuzamos $\overline{AF}$-fel és az AFC illetve BDG szabályos háromszögek alapján minden kijelölt lapátlóval 60°-os szöget zár be; i2) ha $\gamma = -\alpha$, ekkor e párhuzamos $\overline{BE}$-vel és az EGB illetve DEB szabályos háromszögek alapján minden kijelölt lapátlóval 60°-os szöget zár be.

ii) Ha $\beta + \gamma = \beta - \gamma$, akkor $\gamma = 0$. Most is két lehetőség maradt: ii1) $\beta = \alpha + \beta$, azaz $\alpha = 0$, ekkor e párhuzamos $\overline{AD}$-vel és nyilván minden kijelölt lapátlóval 45°-os szöget zár be; ii2) $-\beta = \alpha + \beta$, ekkor e párhuzamos a D-n és $\overline{BC}$ felezőpontján áthaladó egyenessel. Legyen a $\underline{i}$-vel párhuzamos, a feltételeinknek megfelelő $\underline{j} = 2\underline{u} - \underline{v}$. Ekkor a lapátlók irányvektorainak hossza $\sqrt{2}$, $|\underline{j}| = \sqrt{5}$, $\underline{j}$ skalárszorzatának abszolút értéke minden lapátló vektorral 1. Így a bezárt szög koszinuszának értéke $\frac{1}{\sqrt{10}}$, amiből a bezárt szög nagysága $\approx 71{,}6°$.

Összefoglaljuk a kapott megoldásokat. Négy irányú lehet az e egyenes, ezek közül kettő 60°-ot, egy 45°-ot, egy pedig $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71{,}6°$-ot zár be a feladatban meghatározott három lapátlóval.

25. feladat (OKTV 2004–2005, III. kategória, első forduló, 5. feladat) Tekintsünk egy négyoldalú gúlát, amelynek az alapja húrnégyszög. Vetítsük a gúla magasságának talppontját merőlegesen a gúla négy oldalélére. Bizonyítsuk be, hogy a négy vetület egy körön van.

Megoldás: (A hivatalos megoldókulcs harmadik megoldása következik itt.) Az alap négy csúcsa legyen A, B, C, D, a gúla csúcsa E. Vetítsük az $\overline{ET}$ átmérőjű G

gömböt (pontosabban az E pontjától megfosztott G gömböt) az E pontból középpontos vetítéssel a gúla S alapsíkjára.

Ismeretes (ld. pl. Reiman István: A geometria és határterületei), hogy ez az ún. sztereografikus vetítés a G gömbön fekvő, E-n át nem haladó köröket az S síkban fekvő körökbe viszi át, és megfordítva: bármely S-ben fekvő körnek a sztereografikus vetítés inverzénél származó képe egy G-n fekvő kör. A T pont vetületei az oldaléleken mind G-n vannak. Mivel sztereografikus vetületeik, a gúla csúcsai egy körön helyezkednek el, ezért a vetületek is az imént említett tulajdonság miatt.

26. feladat (Városok Viadala 1998) Egy téglatest egy csúcsból induló három élének összege legyen a téglatest summája. Tartalmazhat-e egy téglatest nála nagyobb summájú másik téglatestet?

1. Megoldás: Tekintsük a belső téglatest három egy csúcsba futó élét. Ezek vetületeinek összege a külső téglatest bármely e élére legfeljebb olyan hosszú, mint e. Ezt mindhárom irányra nézve elmondhatjuk. Így a belső téglatest élei vetületének a külső téglatest éleinek három irányára nézve legfeljebb a külső téglatest summája. Mivel a belső téglatest egy tetszőleges élének hossza legfeljebb annyi, mint ezen él vetületeinek összege a külső téglatest három, páronként merőleges élének irányára nézve, ezért a első téglatest summája legfeljebb a külső summája lehet.

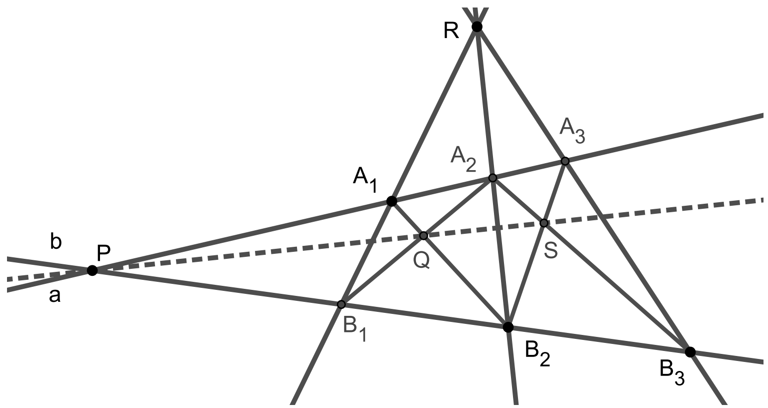
2. Megoldás: Legyenek a belső téglatest egy csúcsból induló élei x,y és z, a külsőé pedig a, b, c. Mivel a belső téglatest felszíne nem lehet nagyobb, mint a külsőé, ezért $2xy + 2yz + 2zx \leq 2ab + 2bc + 2ca$. A belső téglatest testátlója sem lehet nagyobb, mint a külső, így $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2 + b^2 + c^2$. Ebből következik, hogy $(x + y + z)^2 \leq (a + b + c)^2$, amiből kapjuk, hogy $x + y + z \leq a + b + c$.

27. feladat Egy kocka alakú terem falain mozog három vadászpók. Hálójuk az általuk alkotott háromszögben feszül ki. A teremben röpköd egy légy. A pókok és a légy sebessége azonos. Elkaphatják-e a pókok a legyet?

Megoldás: A pókok elkaphatják a legyet. Először helyezkedjenek el az alapnégyzet három csúcsában. Legyenek ezek A, B, C, az üres csúcs ezen a lapon D. A C-nél levő pók fusson el a $\overline{CD}$ élen odáig, hogy a légy helyének ezen élre eső vetületénél legyen. A továbbiakban ez a pók mozogjon ezen az élen úgy, hogy mindig a légy vetületének helyén legyen. A másik két pók egyszerre felmásznak az A és B-ből induló függőleges élek mentén, majd a fedőlapon a $\overline{BC}$-vel párhuzamos élek mentén elsétálnak a C és D feletti csúcsokba.

28. feladat A P csúcsú hegyesszögű szögtartomány belsejében adott a Q pont. Sajnos ragasztó cseppent a lapra, éppen a P pontot takarja a ragacsos folt. Hogyan szerkeszthetnénk meg a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes Q-n áthaladó darabját csak vonalzó segítségével?

Megoldás: Vegyük fel az a egyenesen találomra az A_1, A_2 és A_3 pontokat. Legyen $\overleftrightarrow{A_1Q} \cap b = B_2$, $\overleftrightarrow{A_2Q} \cap b = B_1$, $\overleftrightarrow{A_1B_1} \cap \overleftrightarrow{A_2B_2} = R$, $\overleftrightarrow{A_3R} \cap b = B_3$, $\overleftrightarrow{A_3B_2} \cap \overleftrightarrow{A_2B_3} = S$. Ekkor alkalmazhatjuk a Desargues tételt: az $A_1B_2A_3$ és a $B_1A_2B_3$ háromszögek az R pontra nézve perspektívek, így megfelelő oldalegyeneseiknek metszéspontjai, azaz P, Q és S egy egyenesre esnek. Tehát $\overleftrightarrow{QS}$ a keresett egyenes és szerkesztésünk minden lépéséhez elegendő volt csak vonalzót használni.



Megjegyezzük, hogy a feladat Desargues tétel nélkül is megoldható, ha úgy képzeljük el, mintha az ábrán levő két egyenes két párhuzamos perspektív képe lenne. Ha van két párhuzamos egyenesünk, akkor csak vonalzóval az imént leírt szerkesztés során $\overleftrightarrow{QS}$ ősképe párhuzamos lesz a és b ősképével, ehhez pedig elegendőek hasonlósági megfontolások.

Felhasznált irodalom

A feladatok és tételek között több olyan van, ami a matematikai folklór része. A többi feladatot a források után írtam dőlt betűvel.

[1] AM Storozhev: Tournament of towns, AMT Publishing, 2006. *25.*

[2] Bizám György, Herczeg János: Logar Miska feladatai, Bibliotheca, 1958. *4.*

[3] Dobos Sándor: A kombinatorika és a geometria határán, Raabe Tanácsadó és Kiadó, 2007. *6.*

[4] Dobos Sándor, Hraskó András: Projektív geometria, https://matkonyv.fazekas.hu/, *9.*

[5] Laczkó László, Juhász István: Feladatgyűjtemény, BJMT kiadvány, 1991. *18. 19.*

[6] OKTV feladatok: Oktatási Hivatal www.oktatas.hu, *14. 22. 23. 24.*

[7] Reiman István: Kétimenziós térszemlélet, OKSZ Matematikai Módszertani Lapok 5. évfolyam 3. szám, 1999. *7.*

Ajánlott irodalom

[1] Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1966.

[2] Lőrincz Pál - Petrich Géza: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 2003.

[3] Romsauer Lajos: Ábrázoló geometria, Franklin-Társulat, 1929.

[4] Strommer Gyula: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1974.

[5] Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria, Tankönyvkiadó, 1957.

[6] nyomtatott jegyzet: Bárdné Feind Teréz: Ábrázoló geometria, 1997.

[7] elektronikus jegyzet: Pék Johanna: Bevezetés az ábrázoló geometriába, 2012.