Pék Johanna

BEVEZETÉS AZ ÁBRÁZOLÓ GEOMETRIÁBA

(Matematika tanárszakos hallgatók számára)

Tartalomjegyzék

Előszó

Ez a jegyzet elsősorban matematika tanárszakos hallgatók számára készült, és – reményeink szerint – betekintést nyújt az ábrázoló geometriába.

Az ábrázoló geometria célja a három dimenziós „világ” megjelenítése a síkban (rajzlapon) olyan módon, hogy az ábrából az eredeti térbeli viszonyokra következtethessünk. Jelenlegi modern korunkban – ahol az informatika fejlettsége mindent átsző – szinte fölöslegesnek érezzük azt, hogy „kézzel” szerkesszünk képeket egy-egy három dimenziós tárgyról. Azonban az informatikai képalkotó eljárások matematikai hátterében mindig az ábrázoló geometria módszerei és tételei húzódnak meg.

Miért hasznos egy matematika szakosnak ábrázoló geometriát tanulni?
Egyrészt erősödik a térszemlélete, és a szabadkézi ábrák készítésében is ügyesebbé válhat. Ez a tanárszakos hallgatók számára kiemelten hasznos, mivel egy tanár a táblai rajzaival segíti a matematika (elsősorban a geometria) megértését.
Másrészt a problémamegoldó képesség is fejlődik. Egy-egy komplexebb feladat megoldása során előtérbe kerül a lényegretörő, tiszta logikára és térgeometriai tudásra épülő megoldás.

Az ábrázoló geometria elsajátítását segítik az alábbi jegyzetek és könyvek:

- Bancsik Zsolt, Juhász Imre, Lajos Sándor: Ábrázoló geometria szemléletesen
  (elektronikus jegyzet: `http://193.6.8.43/segedlet/dokumentumok/Abrazolo_geometria_szemleletesen.php`)
- Kárteszi Ferenc: Ábrázoló geometria
- Romsauer Lajos: Ábrázoló geometria I-II.
- Zigány Ferenc: Ábrázoló geometria
- Strommer Gyula: Ábrázoló geometria
- Lőrincz Pál, Petrich Géza: Ábrázoló geometria
- Hajdu Endre, H. Temesvári Ágota: Konstruktív geometria
- Pál Imre: Térláttatós ábrázoló mértan

A jegyzettel kapcsolatos észrevételeket, felbukkanó hibákat és elírásokat a pekj@arch.bme.hu e-mailre lehet elküldeni.

Pék Johanna

0. fejezet

Alapismeretek

0.1. Térgeometriai alapok

A fejezet első részében vázlatosan összefoglalunk néhány (a sík- és térgeometriából jól ismert) definíciót és tételt.

Térelemek kölcsönös helyzete

1. Pont és pont:
   (a) a két pont egybeesik
   (b) a két pont különböző
2. Pont és egyenes:
   (a) a pont illeszkedik az egyenesre
   (b) a pont nem illeszkedik az egyenesre
3. Pont és sík:
   (a) a pont illeszkedik a síkra
   (b) a pont nem illeszkedik a síkra
4. Egyenes és egyenes:
   (a) a két egyenes egybeesik (minden pontjuk közös)
   (b) a két egyenes párhuzamos (egyetlen közös pontjuk sincs, de van közös síkjuk)
   (c) a két egyenes metsző (van pontosan egy közös pontjuk)
   (d) a két egyenes kitérő (nincsenek egy síkban)
5. Egyenes és sík:
   (a) az egyenes illeszkedik a síkra (az egyenesnek minden pontja a síknak is pontja)
   (b) az egyenes párhuzamos a síkkal (az egyenesnek a síkkal nincs közös pontja)
   (c) az egyenes metszi a síkot (pontosan egy közös pont létezik)

6. Sík és sík:
   (a) a két sík egybeesik (minden pont és minden egyenes közös)
   (b) a két sík párhuzamos (egyetlen közös pontjuk sincs)
   (c) a két sík metszi egymást (pontosan egy egyenes a közös pontok halmaza)

Térelemek távolsága
(Bármilyen illeszkedés esetén a távolság triviálisan nulla.)

1. Pont és pont: A két pont által meghatározott szakasz hossza.
2. Pont és egyenes: Tekintve a pont és az egyenes síkját, húzzunk merőlegest a pontból az egyenesre. Az egyenes és a merőleges metszéspontjának az eredeti ponttól való távolsága a keresett távolság.
3. Pont és sík: Állítsunk merőlegest a pontból a síkra. A sík és a merőleges metszéspontjának az eredeti ponttól való távolsága a keresett távolság.
4. Egyenes és egyenes:
   (a) Metsző egyenesek távolsága 0.
   (b) Párhuzamos egyenesek távolsága: Válasszunk ki egy pontot valamely egyenesről. A keresett távolság ezen pont és a másik egyenes távolsága.
   (c) Kitérő egyenesek távolsága: Vegyünk azt az egyenest, amely mindkét egyenest metszi és mindkét egyenesre merőleges. Ez az egyenes mindig létezik, és *normáltranszverzális*nak nevezzük. A normáltranszverzálisnak az egyik, illetve a másik egyenessel alkotott metszéspontját tekintve (1-1 db), a keresett távolság e két pont távolsága.
5. Egyenes és sík:
   (a) Ha az egyenes és a sík metsző, a távolságuk 0.
   (b) Ha az egyenes a síkkal párhuzamos, tekintsünk egy tetszőleges pontot az egyenesről. A keresett távolság a pont és a sík távolsága.
6. Sík és sík:
   (a) Metsző síkok távolsága 0.
   (b) Ha a két sík párhuzamos, tekintsünk egy tetszőleges pontot az egyik síkról. A keresett távolság a pont és a másik sík távolsága.

Térelemek szöge
Megjegyzés: Két térelem szöge megállapodás szerint kisebb vagy egyenlő, mint 90°.

1. Két egyenes szögén az irányvektoraik szögét értjük.
2. Egyenes és sík szöge a sík normálvektorának és az egyenes irányvektorának szögének pótszöge.
3. Két sík szöge a normálvektoraik szöge.

Két merőleges tétele: Egy egyenes pontosan akkor merőleges egy síkra, ha annak két, az egyenes és a sík metszéspontján áthaladó egyenesére merőleges.

Osztóviszony: Tekintsünk egy $\overleftrightarrow{AB}$ egyenest és annak C pontját ($B \neq C$). Ekkor az A, B, C pontok *osztóviszonyá*n az $(ABC) = \dfrac{d(A,C)}{d(B,C)} \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ számot értjük, ahol a d előjeles távolságfüggvény.
Kettősviszony: Egy $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes A, B, C, D pontjainak ($B \neq C$, $B \neq D$, $A \neq D$) *kettősviszonyá*n az $(ABCD) = \dfrac{(ABC)}{(ABD)} \in \mathbb{R}$ számot értjük.

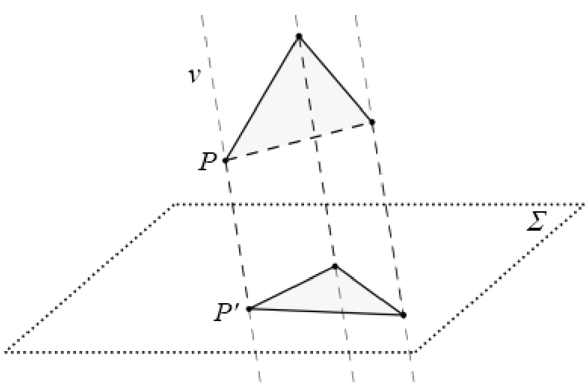
0.2. Az ábrázoló geometria és leképezési módszerei

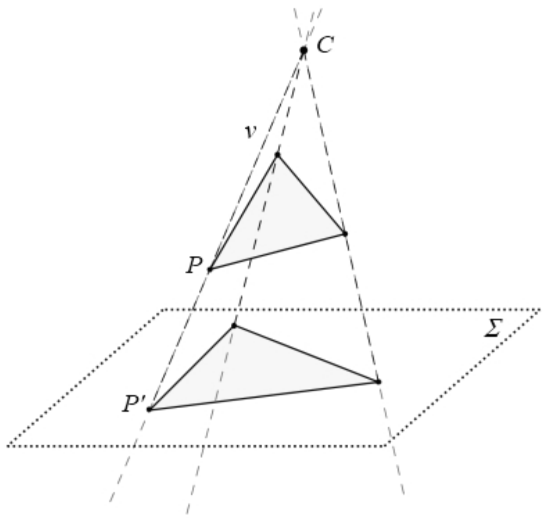
Az ábrázoló geometria célja a valós euklideszi tér pontjainak leképezése a valós euklideszi sík(ok)ra úgy, hogy további hozzárendelésekkel a tér pontjai rekonstruálhatóak legyenek.
A vetítéssel szemben elvárás, hogy a 3-dimenziós térről olyan 2-dimenziós „kép(ek)et” kapjunk, hogy azokból a térbeli viszonyokra (illeszkedés, metszés stb.) egyértelműen következtethessünk.
A leképezés lehet párhuzamos vagy centrális vetítés, és történhet 1 vagy több síkra. Az(oka)t a síko(ka)t, amely(ek)re vetítünk, *képsík(ok)*nak nevezzük (az ábrákon Σ).
Egy tetszőleges, térbeli P pontot tekintve

– párhuzamos vetítés esetén – a vetítés irányával párhuzamost húzva a P-n keresztül,

– centrális vetítés esetén – a leképezés C centrumát összekötve a P-vel,

*vetítőegyenes*t kapunk (az ábrákon v).
A P-n átmenő vetítőegyenes és a képsík metszéspontja (ha az létezik) adja a P *pont képé*t (az ábrákon P').





Az ábrázoló geometria főbb leképezési módszerei

Párhuzamos vetítések: A térbeli pontokat egy iránnyal párhuzamosan vetítjük a síkra/síkokra. Tulajdonságai:

- egyenestartó
- párhuzamosságtartó
- „aránytartó” (osztóviszony-tartó)

Főbb párhuzamos vetítési eljárások:

1. Kótás projekció
2. Monge-projekció
3. Axonometria

Centrális vetítések: A térbeli pontokat a tér egy pontjából (a centrumból) vetítjük a síkra/síkokra. Tulajdonságai:

- egyenestartó
- kettősviszony-tartó

Főbb centrális vetítési eljárások:

1. Centrális projekció
2. Perspektíva

Megjegyzés 1.: Valamely térelem (például egyenes, sík) képén az azt alkotó pontok képeinek halmazát értjük. Erre a nyilvánvaló tényre a továbbiakban „illeszkedéstartásként” hivatkozunk.

Megjegyzés 2.: Az egyenestartás azt jelenti, hogy kollineáris pontok képei kollineárisak. Ebbe beleértjük azt is, hogy egy egyenes képe speciálisan ponttá is fajulhat.

1. fejezet

Kótás projekció

1.1. A kótás projekció alapjai

A párhuzamos vetítések speciális esetei az ún. *merőleges vetítések*, ahol a vetítés iránya a képsíkra merőleges.

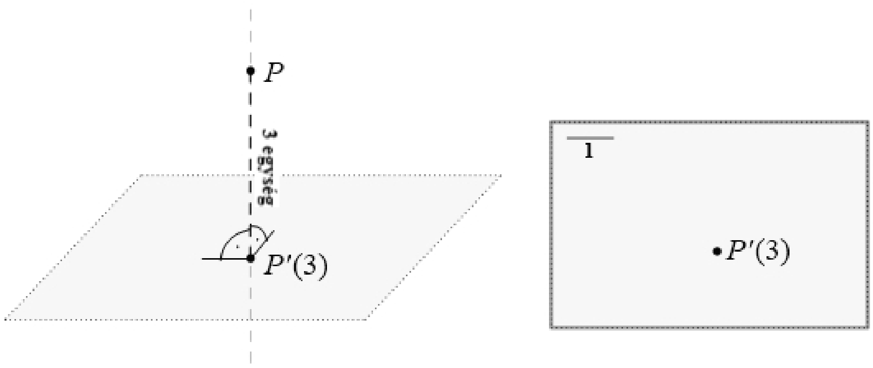
A *kótás projekció* egy képsíkot használó merőleges vetítés. Azonban így még nem kölcsönösen egyértelmű a vetítés, ugyanis egy képsíkra merőleges egyenes (vetítőegyenes) minden pontjának ugyanaz a képe. E hiba kiküszöbölhető úgy, hogy minden egyes ponthoz kóta (vagy mérőszám) tartozik.

A *kóta* egy olyan valós szám, amely megadja a pontnak a képsíktól vett előjeles(!) távolságát. A távolságot egy előre meghatározott egységhez viszonyítjuk, amelyet a képsíkon (azaz a rajzunkon) fel kell tüntetni (e-vel vagy egyszerűen **1**-gyel jelölve).

Pont ábrázolása

Rögzítsük a térben a képsíkot (az ábrázolás síkját, azaz a rajz síkját), és adjuk meg az egységet (ezt a rajz síkjában tüntetjük fel). Tekintsünk egy tetszőleges P pontot, amely 3 egység távolságra van a képsík „felett”.

A P pont ábrázolása a következő:

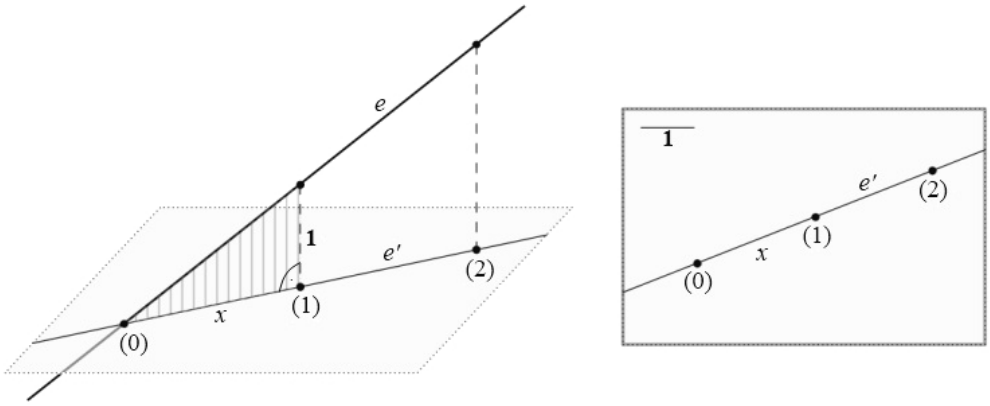


Az egész kótájú pontokat *szintpont*oknak nevezzük. **Speciális helyzetű**nek tekinthető a képsík összes pontja, amelyeknek a kótája – nyilvánvalóan – 0.

Egyenes ábrázolása

A kótás projekció mint párhuzamos vetítés egyenestartó, így egyenes képe egyenes. Ez a merőleges vetület azonban nem elég ahhoz, hogy az egyenes a képe alapján egyértelműen rekonstruálható (visszaállítható) legyen. (Gondoljuk végig, hogy végtelen sok egyenesnek lehet ugyanaz az egyenes a merőleges vetülete.)

Ezért *egy egyenest két pontjával* (általában a (0)-s és (1)-es kótájúakkal) *ábrázoljuk.*



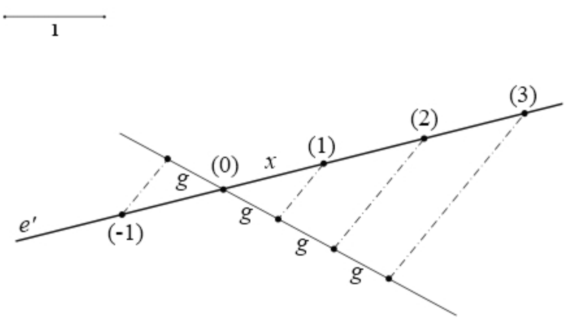
Az egyenes kitüntetett szerepű pontja az ún. *nyompont*ja – ez az egyenes metszéspontja a képsíkkal, kótája 0. Jelölése: $N = N'(0)$ vagy (0).
Egy egyenes képén két, egymást követő, egész kótájú pont képe közötti távolságot *osztóköz*nek nevezzük. (Az ábrán az x-szel jelölt szakasz.) Az egyenes egész kótájú pontjainak meghatározását/ábrázolását *graduálás*nak (lépcsőzésnek) nevezzük.

Speciális egyenesek

- *Szintvonalak/szintegyenesek:* Olyan egyenesek, amelyek párhuzamosak a képsíkkal. (Ábrázolásukat lásd sík szintvonalainál.)
- *Vetítőegyenesek:* A képsíkra merőleges egyenesek. A képük egyetlen ponttá fajul.

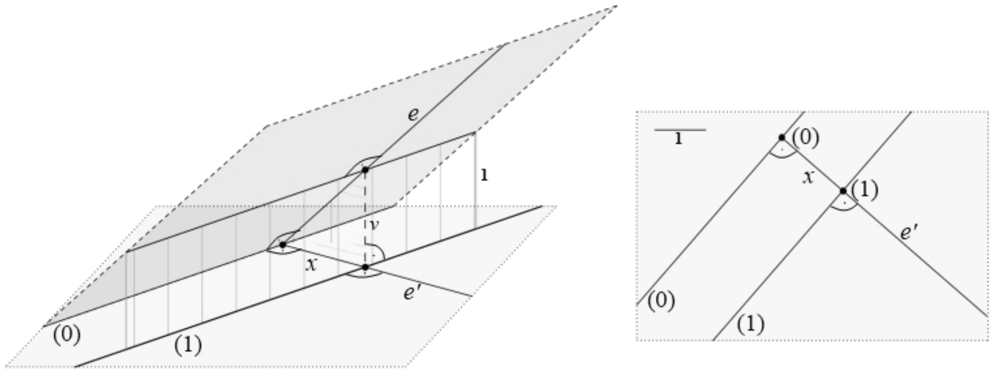
Alapfeladat: Tegyük fel, hogy ismerjük az e egyenes képét a nyompontjával ((0)) és (2)-es szintpontjával. Határozzuk még néhány további egész kótájú pontját! (graduálás)

Megoldás: Húzzunk egy tetszőleges egyenest a nyomponton át, és vegyünk fel rá egy tetszőleges g szakaszt. A párhuzamos szelők tételének felhasználásával az x osztóköz átmásolható.



Sík ábrázolása

Egy sík képe a párhuzamos, merőleges irányú vetítés során az egész képsíkot adná. Ezért nem minden pontjának a képét adjuk meg, hanem a következő (elemi térgeometriából jól ismert) lehetőségek közül választunk: a síkot megadhatjuk
– 3 különböző pontjával,
– 1 pontjával és egy arra nem illeszkedő egyenesével,
– 2 metsző egyenesével,
– 2 párhuzamos egyenesével.
A gyakorlatban főként két speciális párhuzamos egyenesével adjuk meg a síkot. Ezek a párhuzamos egyenesek a sík egész kótájú szintvonalai, általában a sík 0 és 1 magasságú pontjainak egyenesei.
A sík speciális szintvonala a 0 magasságú (vagy (0)-s) szintvonal, amelyet *nyomvonal*nak nevezünk.



A sík azon egyeneseit, amelyek a szintvonalakra merőlegesek, *esésvonal*aknak nevezzük. (Az ábrán az e egyenes a sík egy esésvonala.) A sík egy esésvonalának osztóközét a *sík osztóköz*ének nevezzük. (Az ábrán x-szel jelölve.)

Lemma: (esésvonalra vonatkozó képi feltétel) *Az esésvonal képe (e') merőleges a nyomvonalra (és az összes szintvonal képére is).*

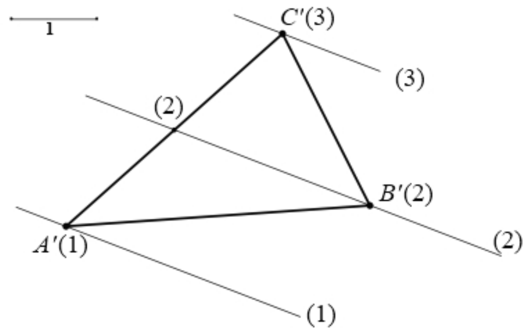
Bizonyítás: Elegendő azt belátni, hogy a nyomvonal merőleges az esésvonal és képe által adott síkra ($[e, e']$). (Ugyanis ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor a sík minden egyenesére merőleges.) Definíció szerint $e \perp (0)$, és a vetítés miatt $v \perp (0)$ (ahol $v \subset [e, e']$ vetítőegyenes). E két merőlegességből következik, hogy $(0) \perp [e, v] = [e, e']$ (ld. két merőleges tétele). Ebből pedig már következik, hogy $(0) \perp e'$. □

Speciális síkok

- *Szintsíkok:* A képsíkkal párhuzamos síkok.
- *Vetítősíkok:* A képsíkra merőleges síkok. A képük speciálisan egy egyenessé fajul!

Alapfeladat: Adott egy sík A, B, C pontjával. Határozzuk meg a sík szintvonalait!

Megoldás: Az osztóviszony-tartás miatt az $\overline{AC}$ szakasz felezőpontja egy 2 magasságban lévő pont. Ez a felezőpont és a B pont már megadja a sík (2)-es szintvonalát, amelyekkel párhuzamos az (1)-es és a (3)-as szintvonal.



1.2. Helyzetgeometriai alapfeladatok

Helyzetgeometriai feladatokon pont, egyenes és sík kölcsönös helyzeteinek ábrázolását értjük.

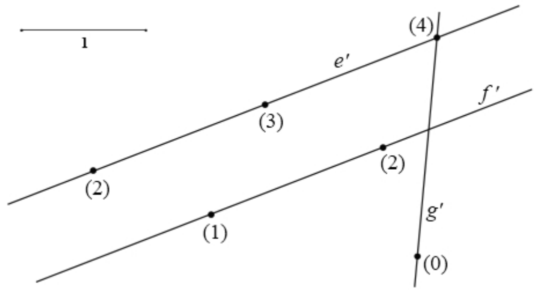
Nyilvánvaló, hogy két pont/egyenes/sík pontosan akkor esik egybe, ha képük és kótájuk/osztóközük azonos.
Tekintsük át a fontosabb esetek képi feltételeit:

1. Egy pont akkor és csakis akkor illeszkedik egy egyenesre, ha képe illeszkedik az egyenes képére, és(!) a pont kótája megegyezik annak az egyenesen fekvő pontnak a kótájával, amelynek képe az eredeti pont képével azonos.

2. Egy pont akkor és csakis akkor illeszkedik egy síkra, ha illeszkedik a sík egy tetszőleges egyenesére.

3. Két egyenes párhuzamos pontosan akkor, ha képeik párhuzamosak, az osztóközük ugyanakkora és lejtésük azonos. (*Lejtés* alatt azt az egyenesen meghatározott irányt értjük, amely felé indulva egyre kisebb kótájú pontokhoz jutunk. A lejtés közvetlen kapcsolatban áll az egyenes képsíkszögével, amelyről később lesz szó.)

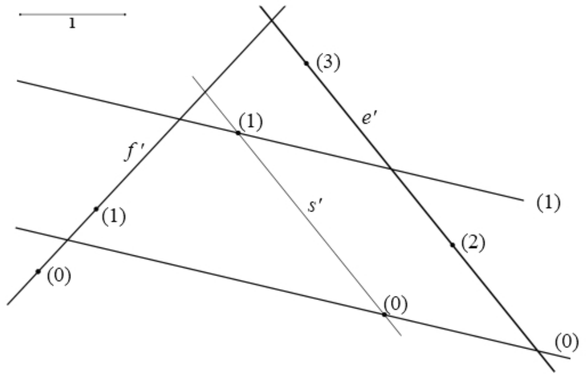
4. Két egyenes metsző, akkor és csak akkor, ha képeik metszőek és a képen keletkező metszéspont mindkét egyenesre illeszkedik.



e és f párhuzamos egyenespár; e és g metsző egyenesek

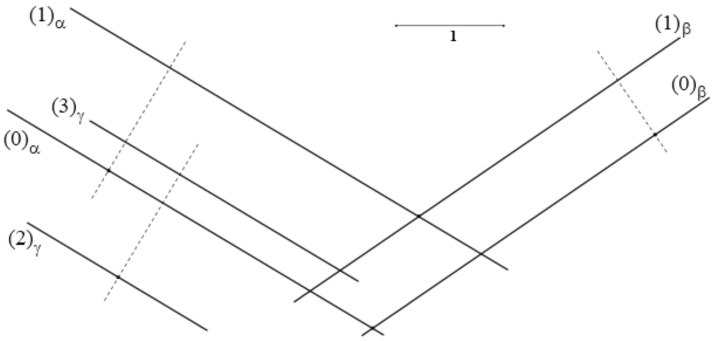
5. Egy egyenes pontosan akkor illeszkedik egy síkra, ha az egyenes megfelelő kótájú pontjai illeszkednek a megfelelő kótájú szintvonalakra.

6. Egy egyenes akkor és csak akkor párhuzamos egy síkkal, ha nincs közös pontjuk. (A sík egy egyenesével párhuzamos.)



az s egyenes eleme a síknak; e párhuzamos a síkkal; f metszi a síkot

7. Két sík akkor és csak akkor párhuzamos, ha szintvonalaik párhuzamosak, az osztóközük ugyanakkora és lejtésük azonos.

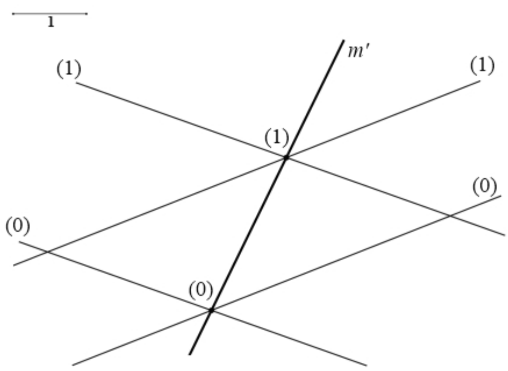


α és γ síkok párhuzamosak; az α és β egymást metsző síkok

Megjegyzés: Egy egyenesen vagy egy síkon nem egész (de racionális) kótájú pontokat is ábrázolhatunk. (ld. egyenes leforgatása)

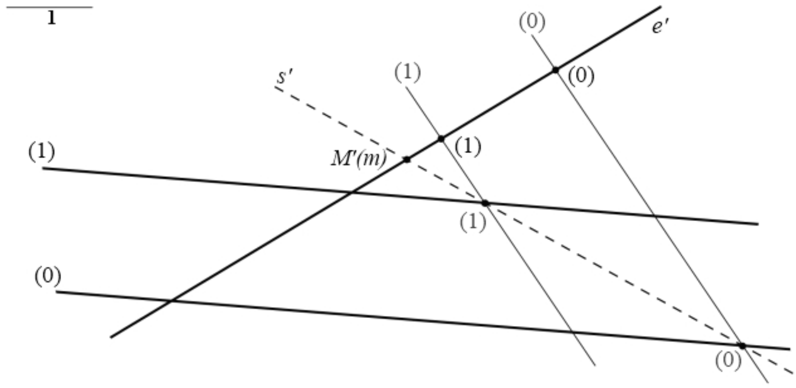
Alapfeladat: Adott két (nem párhuzamos) sík (0)-s és (1)-es szintvonalakkal. Szerkesztendő a két sík metszésvonala!

Megoldás: Két sík metszésvonala olyan egyenes, amely mindkét síkban benne van. A megfelelő szintvonalak metszéspontjai közös pontjai mindkét síknak, ezért elemei a metszésvonalnak. Ezek a pontok adják az m metszésvonal megfelelő kótájú pontjait.



Alapfeladat: Adott egy sík (0)-s és (1)-es szintvonalaival, továbbá egy e egyenes (0)-s és (1)-es szintpontjaival. Határozzuk meg a sík és egyenes metszéspontját!

Megoldás: Az egyenesen át vegyünk fel egy tetszőleges (segéd)síkot. Az eredeti sík és segédsík metszésvonalát az előző feladat alapján meg tudjuk szerkeszteni (s egyenes). Az e és az s közös síkban van (a segédsíkban), így a metszéspontjuk kijelölhető (M pont). Ez az M pont illeszkedik az e egyenesre, és(!) rajta van az eredeti síkon is (ugyanis az s egyenes benne van az eredeti síkban) – ezért M a keresett metszéspont.



(Az M pont m kótáját a későbbiekben az egyenes leforgatásával meg tudjuk határozni.)

Gyakorló feladatok

1. Adott egy sík három pontjával. Szerkesszünk meg a sík egy újabb pontját! (síkbeli négyszög szerkesztése)

2. Adott egy e egyenes (0)-s és (2)-es szintpontjaival, és egy f' egyenes és azon egy (1)-es kótájú pont. Határozzuk meg az f egyenest úgy, hogy e és f metsző legyen! *Segítség:* Metsző egyeneseknek létezik közös síkja.

3. Adottak A, B, C pontok és egy e egyenes (tetszőleges kótákkal). Szerkesszük meg az $ABC\triangle$ és az e egyenes közös pontját!

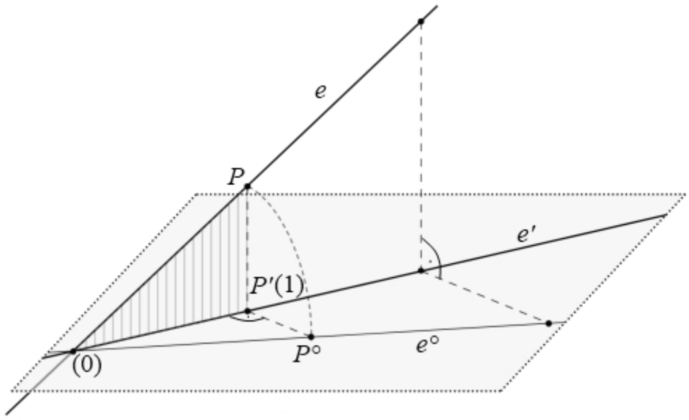
1.3. Metrikus alapfeladatok

Metrikus alapfeladatokon térelemek távolságának és szögének meghatározását értjük. Két térelem távolságának és/vagy szögének megszerkesztéséhez szükség van arra, hogy egy egyenest vagy egy síkot valódi nagyságban lássunk. Ezt úgy érjük el, hogy a szóban forgó egyenest/síkot a képsíkba (ritkább esetben képsíkkal párhuzamos síkba) forgatjuk.

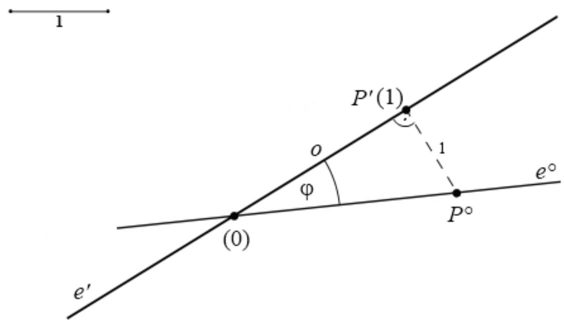
Egyenes leforgatása

Legyen e egy tetszőleges egyenes a térben, és tekintsük azt a vetítősíkot, amely e-t tartalmazza. Az *e egyenes leforgatása* során ezt a vetítősíkot fogjuk a képsíkba forgatni, felhasználva azt a tényt, hogy a vetítősík a képsíkra merőleges.

Az egyenes leforgatása egy térbeli, tengely körüli forgatás, ahol a forgatás szöge $\pm 90°$, tengelye az e'. Nyilvánvaló, hogy ekkor az egyenes nyompontja fixpontja a forgatásnak.



Az ábrán a P pont az egyenes 1-es kótájú pontja. Ez a pont a forgatás során egy e'-re merőleges síkban mozog egy olyan körön, amelyek középpontja $P'(1)$, sugara pedig 1 egység. A P pont leforgatottját $P°$-tal jelöljük, az e forgatott képe $e°$.



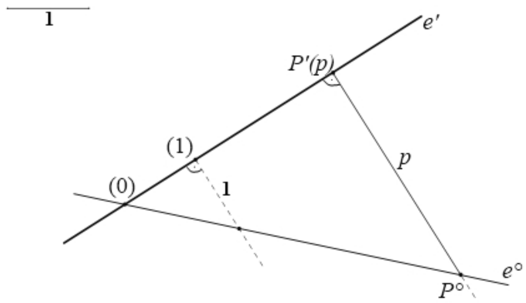
Egyenes képsíkszöge: Az egyenes leforgatása során az e' és $e°$ egyenesek szöge – a leforgatás tulajdonságaiból adódóan – éppen az egyenes képsíkkal bezárt szöge (φ).
A $(0)P'P°\triangle$ háromszöget tekintve látható, hogy az egyenes φ képsíkszöge és az egyenes o osztóköze között az alábbi összefüggés áll fenn:
Az egyenes képsíkszögére fennáll, hogy
– $0° < \varphi < 45°$, *ha* $o > \mathbf{1}$;
– $\varphi = 45°$, *ha* $o = \mathbf{1}$;
– $45° < \varphi < 90°$, *ha* $o < \mathbf{1}$;
*ahol **1** a kitüntetett egység.*

Sík képsíkszöge: Egy sík képsíkszögén egy esésvonalának képsíkszögét értjük.

Alapfeladat: Legyen adott egy e egyenes (0)-s és (1)-es kótájú pontjaival, valamint egy P' pont az e'-n. Határozzuk meg P kótáját úgy, hogy P illeszkedjen az egyenesre ($P \in e$)!

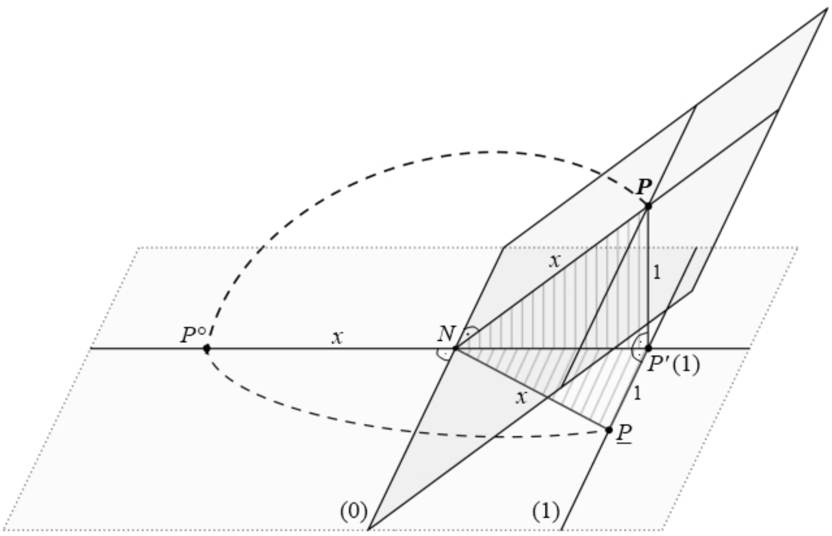
Megoldás: Forgassuk le az egyenest az (1)-es kótájú pont segítségével (lásd előző ábra), így megkapjuk $e°$-at. Húzzunk merőlegest P'-ből az e'-re. Ahol ez a merőleges elmetszi $e°$-at, ott találjuk a P pont $P°$ forgatott képét.

A pont és forgatottja közötti távolság – a leforgatási eljárás definíciója szerint – megadja a pont kótáját, azaz: $d(P', P^\circ) = p$.



Sík leforgatása

Az egyenes leforgatása lehetőséget ad arra, hogy bármilyen szakasz hosszát meg tudjuk határozni és azt fel tudjuk mérni. Hasonló gondolatmenettel szeretnénk elérni, hogy egy síkon bármilyen síkidomot megszerkeszthessünk.
Egy *sík leforgatása* esetén a sík nyomvonala mint tengely körül forgatjuk a sík pontjait a képsíkba (kivételes esetekben a síkot egy szintvonala körül is beforgathatjuk az adott szintsíkba). A forgatás szöge a sík képsíkszöge vagy annak kiegészítőszöge.



Az ábra jelöléseit felhasználva, egy síkbeli tetszőleges P pont forog a (0)-s szintvonal (nyomvonal) körül. A P pont egy olyan körön mozog, amelynek síkja merőleges a nyomvonalra (mint forgatási tengelyre), középpontja N és sugara $d(N, P) = x$.
Látható, hogy csupán az x szakasz hosszára van szükség a P pont leforgatásához. Ez az x szakasz az $NP'P\triangle$ háromszög átfogója – ezt a háromszöget *leforgatási háromszög*nek nevezzük. Ezt a háromszöget megszerkeszthetjük a képsíkban az $\overline{NP'}$ befogót és a P kótáját alapul véve ($NP'\underline{P}\triangle$).

A merőleges vetítés megőrzi az egyeneseket, az illeszkedést és az osztóviszonyt is, ezért egy tetszőleges sík pontjai és a képsík pontjai között tengelyes affinitás van.
A **tengelyes affinitás** (egy síkban vagy két sík között) egy pontonként fix egyenessel rendelkező, bijektív, egyenestartó, illeszkedéstartó és osztóviszony-tartó transzformáció. Az is igaz még, hogy a merőleges vetítés során kapott kép és a leforgatott kép között (síkbeli) *tengelyes affinitás* van. A sík nyomvonala pontonként fix egyenes (ez az affinitás tengelye), továbbá egy P pont P' vetített képének és P° forgatott képének egyenese (azaz az affinitás iránya) merőleges a nyomvonalra. (Ez a merőleges tengelyes affinitás.)

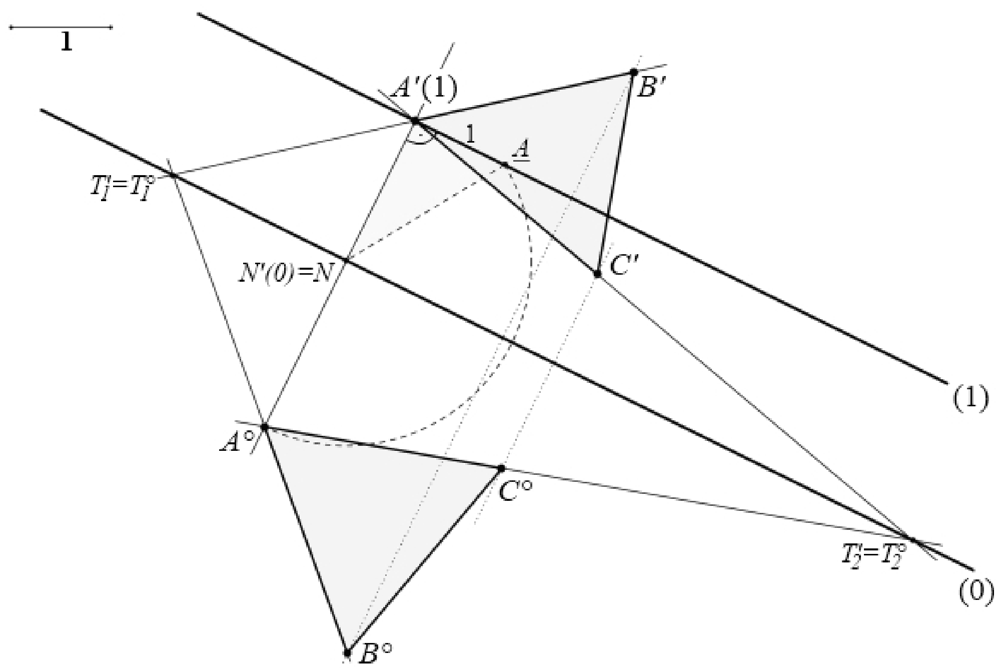
Megjegyzés: Síkbeli tengelyes affinitással kapcsolatos alapszerkesztéseket lásd a jegyzet végén.

Alapfeladat: Adott egy sík és annak egy A pontja ($A'(1)$). Szerkesszünk a síkon olyan tetszőleges oldalhosszúságú szabályos háromszöget, amelynek egyik csúcsa az A pont!

Megoldás: Legyen adva a sík a nyomvonalával és az (1)-es szintvonalával, amelyen rajta van az A pont.

Forgassuk le az A pontot a fent megismert képsíkba forgatással: Állítsunk merőlegest az A'-ből a szintvonalakra. Legyen ennek a merőlegesnek és a nyomvonalnak a metszéspontja N. Az A'-ből állítsunk merőlegest az előbbi merőlegesre (ez most éppen az (1)-es szintvonal). Mérjük fel az A'-ből az A kótáját erre a második merőlegesre (ez most 1 egység) – így kapjuk az $\underline{A}$ pontot. A térbeli leforgatási háromszög ($NA'A\triangle$) a síkban az $NA'\underline{A}\triangle$. Az így kapott $\overline{N\underline{A}}$ átmásolható – forgatással – az $\overline{NA^\circ}$ szakaszba.
A (0)-s szintvonal és az A° forgatott pont már a sík leforgatottjának tekinthető.

Szerkesszünk itt egy szabályos háromszöget: $A^\circ B^\circ C^\circ\triangle$.



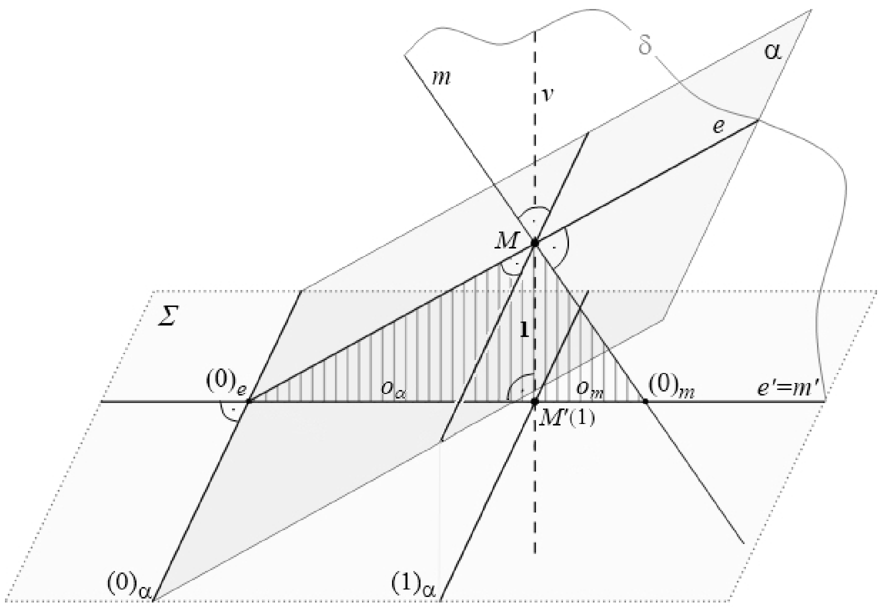
A feladat befejezéséhez szükség van még a B' és C' pontokra (a síkban).
Tekintsük az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes $\overleftrightarrow{A^\circ B^\circ}$ forgatott képét. Ez az egyenes elmetszi a nyomvonalat egy T_1 pontban, amelyről tudjuk, hogy $T_1 = T_1' = T_1^\circ$ (mivel T_1 eleme a pontonként

fix nyomvonalnak). Egy egyenest két pontja egyértelműen meghatározza, így A' és T_1' egyenese éppen az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes $\overleftrightarrow{A'B'}$ képe.
Azt is tudjuk, hogy a leforgatás során egy pont vetített képének és forgatott képének egyenese merőleges a szintvonalakra. Állítsunk merőlegest $B°$-ból a nyomvonalra. Ahol ez a merőleges elmetszi az $\overleftrightarrow{T_1'A'} = \overleftrightarrow{A'B'}$ egyenest, ott lesz a keresett B' pont. – A B' pont megszerkesztése – más nézőpontból – merőleges tengelyes affinitással történt: Adott egy tengelyes affinitás tengelyével (a (0)-s szintvonal/nyomvonal) és egy megfelelő pontpárral ($A° \to A'$). Határozzuk meg egy $B°$ pont B' képét! Mivel a tengelyes affinitás tengelye pontonként fix, ezért az $\overleftrightarrow{A°B°}$ egyenesnek $T_1° = T_1'$ fixpontja, amellyel az $\overleftrightarrow{A'B'}$ kép meghatározható: $\overleftrightarrow{T_1'A'} = \overleftrightarrow{A'B'}$. Az affinitás iránya merőleges a tengelyre, ezért a $B°$-ból húzott irány kimetszi az előbbi egyenesből a B' pontot.
A $C°$-ból a C' meghatározása ugyanígy történik, ott az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenes különböző képeit és a T_2 fixpontot használjuk fel.

Sík és egyenes merőlegessége

Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy a térbeli merőleges vetítés nem szögtartó, így két térelem merőlegességét általában nem ismerjük fel a képeik állása alapján. Ez alól kivételt képez, ha egy egyenes és egy sík merőlegességét szeretnénk megállapítani, amelynek képi feltétele a következő:

Tétel: (sík és egyenes merőlegességének képi feltétele) *Tegyük fel, hogy adott egy α sík két szintvonalával és egy m egyenes két szintpontjával. Az m egyenes pontosan akkor merőleges az α síkra, ha*
– *az egyenes m' képe merőleges az α sík szinvonalainak képeire, azaz $m' \perp (0)_\alpha$;*
– *az egyenes és a sík osztóköze egymás reciprokai, azaz $o_\alpha = \frac{1}{o_m}$; és*
– *az egyenes és a sík lejtiránya ellentétes.*



Bizonyítás: Legyen adott egy α sík (0)-s és (1)-es szintvonalaival, m egy rá nem illeszkedő egyenes, metszéspontjuk legyen az 1-es magasságban lévő M pont. Legyen δ az m vetítősíkja; továbbá az e a sík olyan esésvonala, amely a δ síkban van. (Ez a tétel bizonyításának mindkét irányánál feltehető.) Az M ponthoz tartozó vetítőegyenes a v egyenes ($v \subset \delta$).

Tegyük fel, hogy $m \perp \alpha$. Ekkor egyrészt $m \perp (0)_\alpha$ (mivel egy egyenes pontosan akkor merőleges egy síkra, ha annak minden egyenesére merőleges). Másrészt – a merőleges vetítés miatt – $v \perp (0)_\alpha$. Az m és v egyenesek benne vannak a δ vetítősíkban ($m, v \subset \delta$), így következik, hogy $(0)_\alpha \perp \delta$. Emiatt pedig $(0)_\alpha \perp m'$, mert $m' \subset \delta$.
Az osztóközre vonatkozó feltétel igazolásához tekintsük a $(0)_e(0)_m M\triangle$ háromszöget, amelynek $\overline{MM'}$ az átfogóhoz tartozó magassága ($d(M, M') = 1$). Ebben a háromszögben $(0)_e M' M\triangle \sim MM'(0)_m\triangle$, így $\frac{o_\alpha}{1} = \frac{1}{o_m}$ következik. Ez éppen azt jelenti, hogy a sík és az egyenes osztóközei egymás reciprokai. (Röviden: Az osztóközökre vonatkozó feltétel a magasságtétel következménye.)

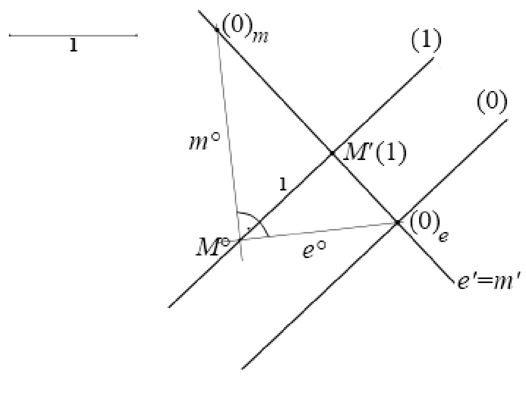
Megfordítva, tegyük fel, hogy a tételbeli képi feltételek teljesülnek. Ekkor az egyik feltétel szerint $m' \perp (0)_\alpha$ és a merőleges vetítés miatt $v \perp (0)_\alpha$. Így $(0)_\alpha \perp \delta$, amiből $(0)_\alpha \perp m$ következik. (Ekkor már feltehető az is, hogy a δ síkban létezik az e esésvonal.)
Az osztóközökre vonatkozó feltétel miatt a δ vetítősíkban fekvő $(0)_e(0)_m M\triangle$-et tekintve, $m \perp e$ azonnal adódik.
Tehát m merőleges az α sík két egyenesére ($(0)_\alpha$-ra és e-re), így $m \perp \alpha$.

A lejtirányokra vonatkozó feltétel a konstrukció miatt mindkét irányban nyilvánvaló.

$\square$

Alapfeladat: Adott egy sík (0)-s és (1)-es szintvonalával, és adott rajta egy M pont ($M'(1)$). Szerkesszünk a M-en át merőleges egyenest a síkra!

Megoldás: A képi feltételre vonatkozó tételt felhasználva állítsunk merőlegest M'-ből a szintvonalak képeire, így kapjuk m'-t. Az m egyenesnek M egy pontja, így csupán egy újabb pontot kell az egyenesről meghatározni: legyen ez a (0)-s kótájú pont. Ehhez a sík osztóközének reciprokát kell megszerkeszteni.
Forgassuk le az e esésvonalat (e°) és az M pontot (M°). Az e esésvonal vetítősíkjában található az m merőleges egyenes is, amelynek M egy pontja. Emiatt ha M°-ból merőlegest állítunk e°-ra, megkapjuk az m merőleges m° forgatott képét. Ahol ez a forgatott kép elmetszi m'-t, ott van az m egyenes $(0)_m$-es kótájú pontja (amely a leforgatás során fixpont).



Megjegyzés: A sík osztóközének ismeretében az egyenes osztóközének meghatározását *reciprok-osztóköz szerkesztés*nek nevezzük.

Gyakorló feladatok

1. Legyen adott két sík két-két szintvonalával úgy, hogy a szintvonalak párhuzamosak egymással (de a két sík nem párhuzamos). Szerkesszük meg a két sík metszésvonalát!
   Segítség: Tekintsünk egy olyan vetítősíkot, amely mindkét síkból 1-1 esésvonalat tartalmaz és forgassuk azt le. Így a két esésvonal metszéspontja a keresett metszésvonal egy pontja. A metszésvonal pedig párhuzamos a síkok szintvonalaival.

2. Adott egy egyenes két pontjával. Szerkesszük az egyenesre (tetszőleges helyre) egy 5 cm hosszúságú szakaszt!

3. Adott egy egyenes e' vetülete és nyompontja. Határozzuk meg az egyenest (egy újabb pontjával) úgy, hogy képsíkszöge $30°$ legyen!
   Segítség: „Forgassuk le" az egyenes vetítősíkját, és szerkesszünk olyan derékszögű háromszöget, amelynek egy szöge $30°$ és az azzal szemköztes oldal 1 egység.

4. Legyen adott egy egyenes e' vetülete és tetszőleges P pontja. Határozzuk meg az egyenes nyompontját úgy, hogy képsíkszöge $30°$ legyen!

5. Legyen adott egy síknak a nyomvonala (azaz a (0)-s szintvonala). Határozzuk meg a sík egy újabb szintvonalát úgy, hogy a sík képsíkszöge $30°$ legyen!

6. Legyen adott egy sík szintvonalaival és egy rá nem illeszkedő P pont. Állítsunk merőlegest P-ből a síkra!

7. Legyen adott egy sík szintvonalaival. Szerkesszünk olyan P pontot, amely 3 cm távolságra van a síktól!

8. Szerkesszünk adott síkra 4 cm oldalú négyzetet!

9. (Összetett feladat) Szerkesszünk adott síkon álló egyenes gúlát, melynek alapja 4 cm oldalú négyzet, magassága 5 cm!

2. fejezet

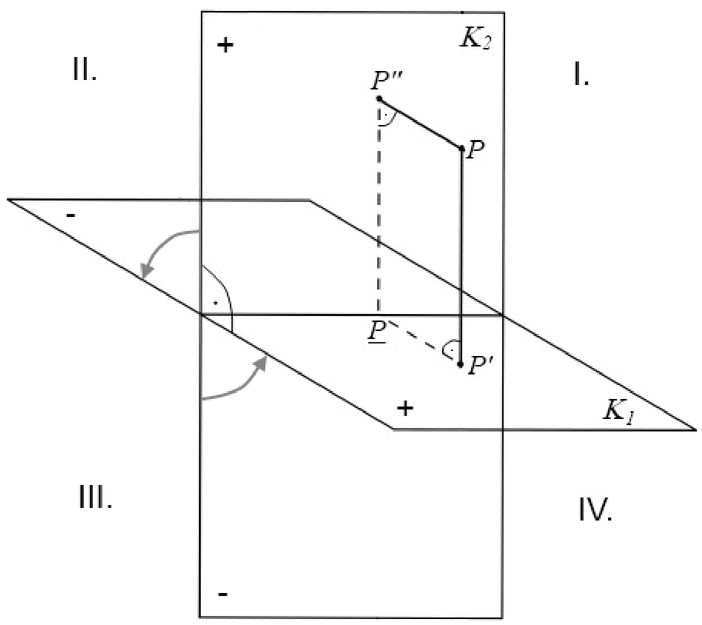
Monge-projekció

2.1. A Monge-projekció alapjai

A *Monge-projekció* egy kétképsíkos, párhuzamos vetítési eljárás. Megalkotója Gaspard Monge (1746-1818) francia matematikus.

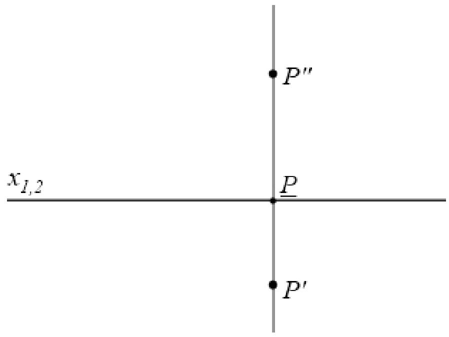
Rögzítsünk a térben két egymásra merőleges síkot. Legyen az egyik a K_1 *első képsík*, a másik a K_2 *második képsík*. A két képsík metszésvonala az $x_{1,2}$ ún. *képsíktengely*. A képsíkok a teret 4 térnegyedre osztják, amelyeket I., II., III. és IV. térnegyednek hívunk. (Az I. térnegyedet mindkét képsík pozitív félsíkja határolja.)

Vetítsük a tér pontjait merőlegesen ezekre a képsíkokra. Így egy tetszőleges P pont K_1-re eső merőleges vetületét a P pont *első képé*nek nevezzük és P'-vel jelöljük, hasonlóan a K_2-re eső merőleges vetület a P'' *második kép*. A $\overleftrightarrow{PP'}$ és $\overleftrightarrow{PP''}$ egyenes rendre egy *első* és egy *második vetítőegyenes*. (Az első képet szokás felülnézetnek, míg a második képet elölnézetnek is nevezni.)



Nyilvánvaló, hogy első és egy második képhez egy és csakis egy pont tartozhat a térben, ezért a leképezés kölcsönösen egyértelmű ($P \leftrightarrow \{P', P''\}$).

A cél azonban az, hogy egyetlen síkban (a rajz síkjában) ábrázolhassuk a tér pontjait. Ezért „hajtsuk össze” a két síkot: fektessük a K_2 pozitív félsíkját K_1 negatív félsíkjába, és K_2 negatív félsíkját a K_1 pozitív félsíkjába, így a két képsíkot (és minden pont két képét) már egyetlen síkban látjuk.

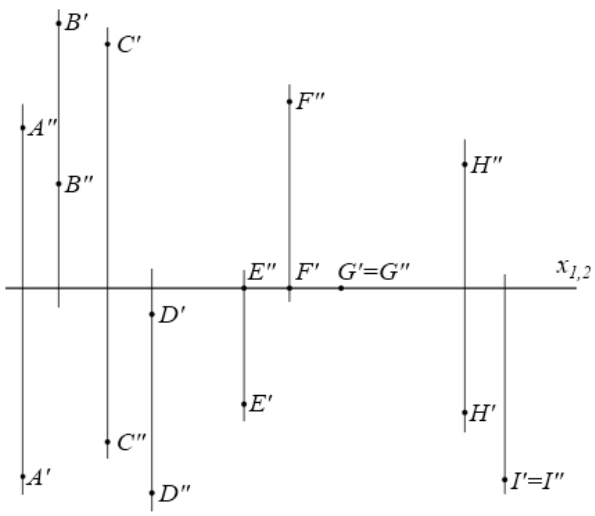


Mivel mindkét képsíkra a vetítés iránya merőleges, ezért a képsíkok „összehajtása” után egy P pont P' és P'' képei egy egyenesen ($\overleftrightarrow{P'P''}$) helyezkednek el, ez a P ponthoz tartozó *rendező(egyenes)*. – Vegyük észre, hogy a P pont távolsága a K_1 képsíktól a $\overline{\underline{P}P''}$ szakasz hossza, míg a P K_2-től való távolságát a $\overline{\underline{P}P'}$ szakasz hossza.

Pont ábrázolása

Egy tetszőleges pont ábrázolását már a bevezetőben ismertettük. A pont két képéből következtetni lehet arra, hogy melyik térnegyedben van. Például a II. térnegyedbeli pontok esetében mindkét kép az $x_{1,2}$ képsíktengely fölé kerül.

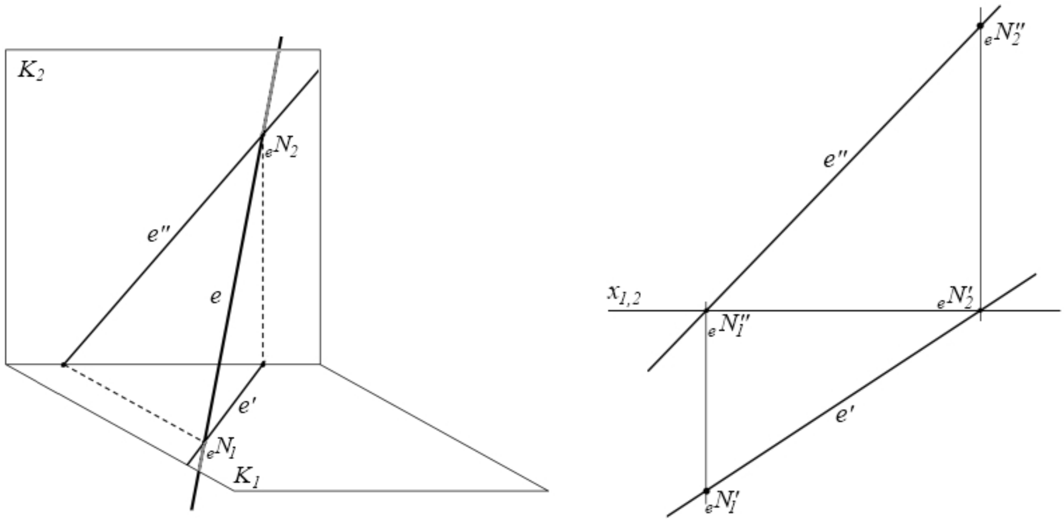
Speciális helyzetű pontoknak tekinthetőek a képsíkokon elhelyezkedő pontok. Ha E illeszkedik a K_1 képsíkra ($E \in K_1$), akkor a második képe illeszkedik a képsíktengelyre ($E'' \in x_{1,2}$). Hasonlóan, ha $F \in K_2$, akkor $F' \in x_{1,2}$.



Az ábrán A, B, C és D rendre I., II., III. és IV. térnegyedbeli pontok. Az $E \in K_1$, $F \in K_2$ és $G \in x_{1,2}$. A H pont az ún. szimmetriasík egy pontja, míg I koincidenciasíkbeli pont (lásd: speciális síkok).

Egyenes ábrázolása

A Monge-projekció egyenestartó leképezés, ezért a merőleges vetítés során egy egyenes képe szintén egyenes lesz (kivéve a vetítőegyenesek). Mivel két képsíkra vetítünk, így egy e egyenest két képe határoz meg egyértelműen: az e' első képe és az e'' második képe. Egy e egyenes (általában) két pontban metszi a két képsíkot, a K_1 képsíkkal való metszéspontját *első nyompont*nak, míg K_2-vel való metszéspontját *második nyompont*nak nevezzük és rendre N_1-gyel, illetve N_2-vel jelöljük. Amennyiben több egyenes szerepel az ábrán és a nyompontok az adott szerkesztésben kiemelt szerepet töltenek be, úgy élhetünk az ${}_eN_1$ és ${}_eN_2$ jelölésekkel is.
Tömörebb, matematikai írásmóddal élve: $e \cap K_1 = \{{}_eN_1\}$ és $e \cap K_1 = \{{}_eN_2\}$.



Speciális egyenesek

- *Képsíkokkal párhuzamos egyenesek:* Ha egy egyenes párhuzamos a K_1 képsíkkal, akkor a második képe párhuzamos az $x_{1,2}$ (képsík)tengellyel. Analóg állítás igaz a K_2-vel párhuzamos egyenesekre.
  Képi feltételek az összes speciális párhuzamos egyenesre:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} l \| K_1 & \Longleftrightarrow & l'' \| x_{1,2}\ ; & l \| K_2 & \Longleftrightarrow & l' \| x_{1,2}\ ; \\ l \in K_1 & \Longleftrightarrow & l'' = x_{1,2}\ ; & l \in K_2 & \Longleftrightarrow & l' = x_{1,2}\ ; \\ l \| x_{1,2} & \Longleftrightarrow & l' \| x_{1,2} \text{ és } l'' \| x_{1,2}\ . & & & \end{array}$$

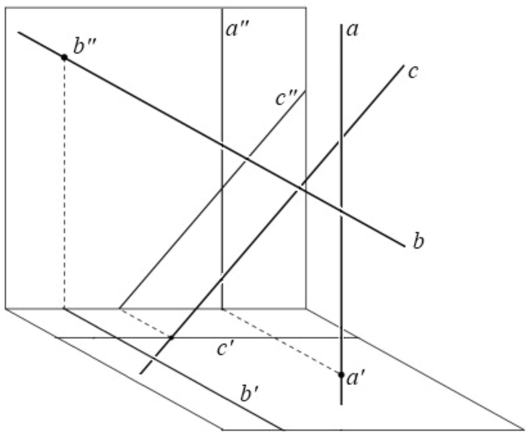
  Az ábrán $d \| K_1$, $c \| K_2$ és $e \| x_{1,2}$.

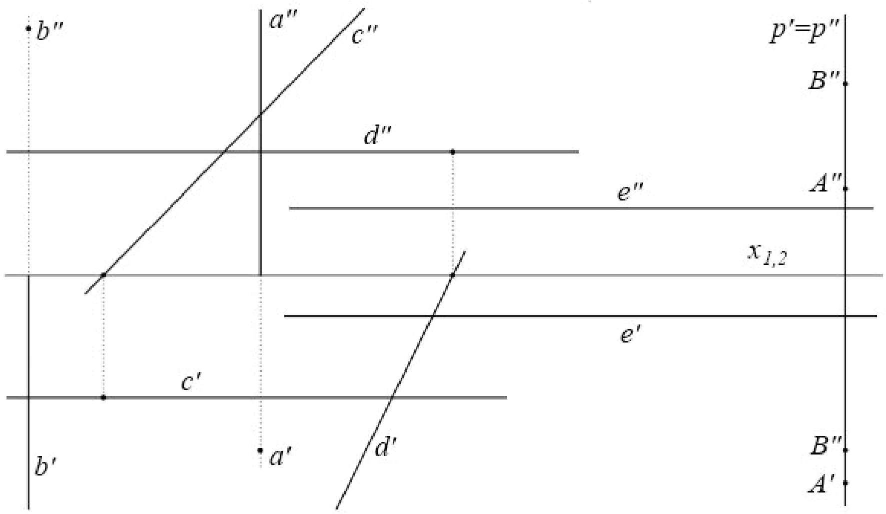
- *Képsíkokra merőleges egyenesek:* A merőleges helyzetű egyenesek a korábban már említett *vetítőegyenes*ek. Egyik képük speciálisan ponttá fajul. Első vetítőegyenes esetén az első kép egyetlen pont, így az egyenes minden pontjának ugyanaz az első képe. Második vetítőegyenes esetén minden pontjának ugyanaz a második képe.
  Képi feltételek:

$$\begin{array}{rcl} l \perp K_1 & \Longleftrightarrow & l'' \perp x_{1,2} \text{ és } l' \text{ egy pont}\ ; \\ l \perp K_2 & \Longleftrightarrow & l' \perp x_{1,2} \text{ és } l'' \text{ egy pont}\ . \end{array}$$

Az ábrán a egy első-, míg b egy második vetítőegyenes.

- *Profilegyenesek:* Olyan egyenesek, amelyek merőlegesek az $x_{1,2}$ képsíktengelyre. (A merőlegességet itt kitérő egyenesekre is értjük.) Egy profilegyenes első és második képe egybeesik, ráadásul ez(ek) merőleges(ek) az $x_{1,2}$-re. Emiatt egy profilegyenes szokásos módon történő ábrázolása nem lehet kölcsönösen egyértelmű, ezért *egy profilegyenest két pontjával ábrázoljuk.*
  Képi feltétel: p profilegyenes $\iff$ $p' = p''$ és $p' \perp x_{1,2}$.
  Az ábrán a p profilegyenest A és B pontjaival ábrázoltuk.

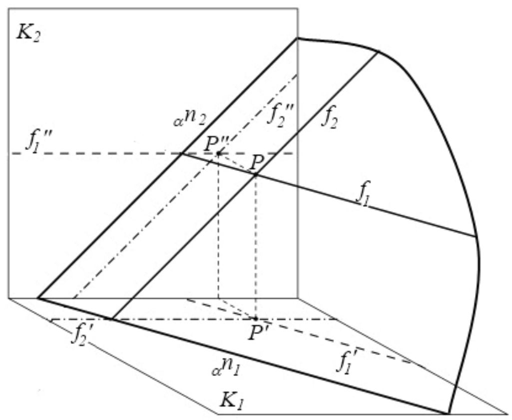


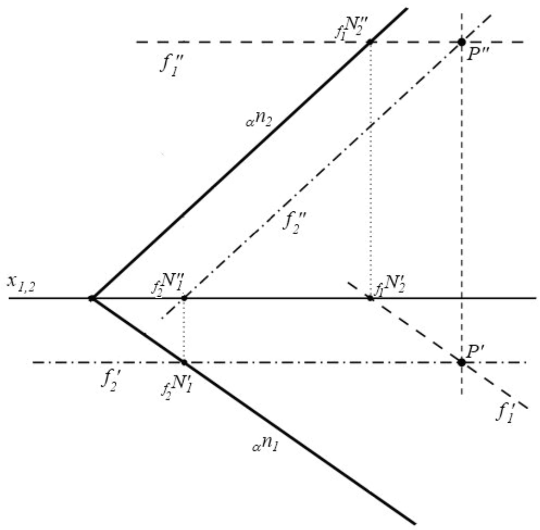


Sík ábrázolása

Tekintsünk egy α síkot a térben, amelyet ábrázolhatjuk két egyenesével vagy három pontjával (lásd: kótás projekcióban sík ábrázolása).

Általában a síknak két speciális egyenesét ábrázoljuk, mégpedig a sík metszésvonalait a két képsíkkal (amennyiben ezek léteznek). Az α sík K_1 képsíkkal alkotott metszésvonalát a sík *első nyomvonalá*nak (n_1), a K_2-vel való metszésvonalát a sík *második nyomvonalá*nak (n_2) nevezzük. Ha több sík nyomvonala is fontos szerephez jut a szerkesztésben, úgy bal alsó indexben feltüntethetjük a síkot is: $\alpha \cap K_1 = {}_\alpha n_1$ és $\alpha \cap K_2 = {}_\alpha n_2$.



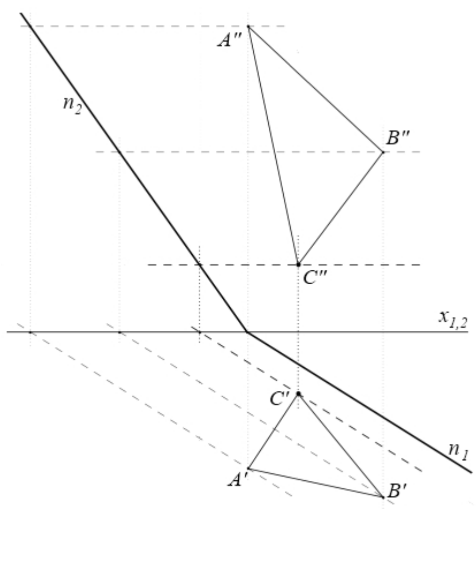


A két képsík és az α metsző helyzete miatt az α sík két nyomvonala az $x_{1,2}$-tengelyen metszi egymást.

A sík minden pontján áthalad a sík két speciális egyenese, amelyek párhuzamosak valamely nyomvonallal. Az α sík ${}_\alpha n_1$ első nyomvonalával párhuzamos egyeneseit a sík *első fővonalai*nak, az ${}_\alpha n_2$-vel párhuzamos síkbeli egyeneseket a sík *második fővonalai*nak nevezzük. (Lásd később.)

Az ábrán a sík egy P pontján áthalad egy f_1 első és egy f_2 második fővonal. Egy fővonal ábrázolásakor két tulajdonságát kell figyelembe venni: egyrészt párhuzamos valamely képsíkkal (mivel párhuzamos valamely képsík egy egyenesével – itt ez az egyenes egy nyomvonal), másrészt illeszkedik a síkra. (A síkra illeszkedő pontok és egyenesek szerkesztését és képi feltételeit a következő fejezetben tárgyaljuk.)

Megkülönböztetünk dőlt és feszített síkot aszerint, hogy a két képen a sík ugyanazon vagy különböző oldalát látjuk-e.
Dőlt sík esetén az első és második képen is a sík egyik oldalát látjuk, ebben a síkban egy háromszög két képének körüljárási iránya megegyezik. (Lásd az előző ábrát.)
Feszített sík ábrázolásakor a két képen a sík különböző oldalait látjuk, így egy síkbeli háromszög két képének körüljárási iránya ellentétes.



Speciális síkok

- *Képsíkkal (vagy a képsíktengellyel) párhuzamos síkok:* Ha egy sík párhuzamos valamely képsíkkal, akkor egyik nyomvonala eltűnik és így a másik párhuzamos az $x_{1,2}$-tengellyel. Amennyiben egy sík az $x_{1,2}$-vel párhuzamos, úgy mindkét nyomvonala párhuzamos a képsíktengellyel.
  Összefoglalva:

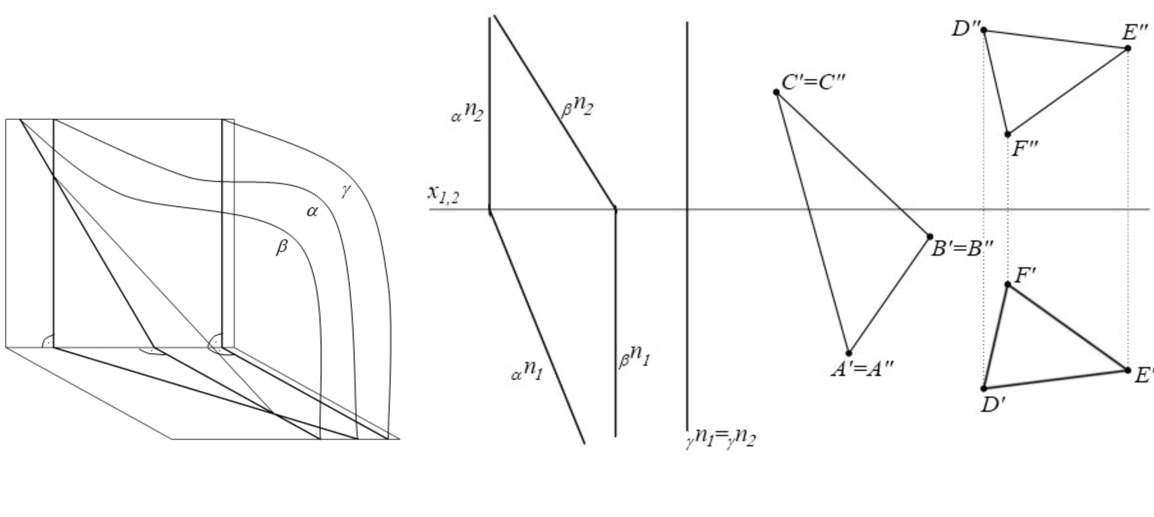
$$\begin{aligned} \delta \| K_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \nexists\ {}_\delta n_1 \ \text{ és } \ {}_\delta n_2 \| x_{1,2}\ ; \\ \delta \| K_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \nexists\ {}_\delta n_2 \ \text{ és } \ {}_\delta n_1 \| x_{1,2}\ ; \\ \delta \| x_{1,2} \quad &\Longleftrightarrow \quad {}_\delta n_1 \| x_{1,2} \ \text{ és } \ {}_\delta n_2 \| x_{1,2}\ . \end{aligned}$$

- *Képsíkokra merőleges síkok:* Egy K_1 első képsíkra merőleges síkot *első vetítősík*nak, a K_2 második képsíkra merőleges síkot *második vetítősík*nak nevezünk. Egy első/második vetítősík esetén a sík minden pontjának első/második képe a sík első/második nyomvonalára kerül. Könnyen látható, hogy (a merőlegesség miatt) egy első/második vetítősík második/első nyomvonala merőleges $x_{1,2}$-re.
  A képi feltételek:

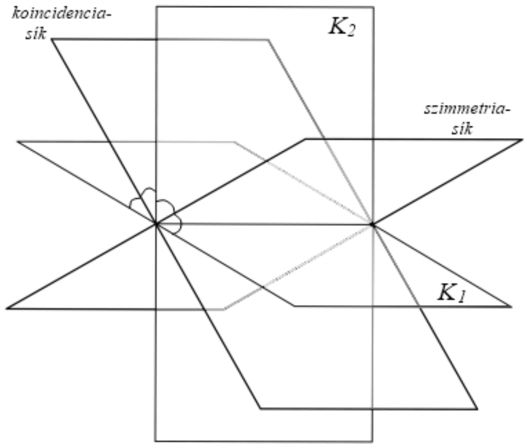
$$\begin{aligned} \delta \perp K_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad {}_\delta n_2 \perp x_{1,2} \\ \delta \perp K_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad {}_\delta n_1 \perp x_{1,2} \end{aligned}$$

  Megjegyzés: Vegyük észre, hogy egy tetszőleges egyenes első és második képét egy első és egy második vetítősík megfelelő nyomvonalaként kapjuk. Ez a tény fontos az ún. fedőegyenespárok módszerében (lásd később).
  Az ábrán α egy első, míg β egy második vetítősík.

- *Profilsíkok:* Olyan síkok, amelyek merőlegesek az $x_{1,2}$ képsíktengelyre. Ebből következik, hogy a két nyomvonal egybeesik és merőleges az $x_{1,2}$-re.
  Képi feltétel: $\delta \perp x_{1,2} \quad \Longleftrightarrow \quad {}_\delta n_1 = {}_\delta n_2 \ \text{ és } \ {}_\delta n_1 \perp x_{1,2}$
  Az ábrán a γ egy profilsík.



- *Szimmetriasík és koincidenciasík:* A két képsík szögfelezősíkjait tekintve a szimmetriasíkhoz és a koincidenciasíkhoz (egybeesési síkhoz) jutunk. A szimmetriasík az I. és III. térnegyedben található, és minden P pontjára teljesül, hogy $d(P', x_{1,2}) = d(P'', x_{1,2})$. A koincidenciasík a II. és IV. térnegyeden halad át és minden P pontjára $P' = P''$ fennáll.
  Az előző ábrán az $ABC\triangle$ koincidenciasíkbeli, a $DEF\triangle$ szimmetriasíkbeli háromszög.



Fontos megjegyzés: Az illeszkedés- és egyenestartásból azonnal látható, hogy egy sík két képe között tengelyes affinitás van, ahol az affinitás tengelye a síknak és a koincidenciasíknak a metszésvonala, az irány pedig merőleges az $x_{1,2}$-tengelyre (de az affinitás iránya az affinitás tengelyére nem feltétlenül merőleges).

2.2. Helyzetgeometriai alapfeladatok

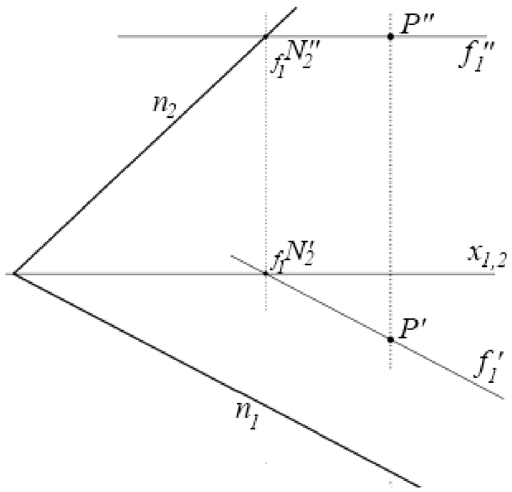
Tekintsük át röviden, hogy milyen képi feltételei vannak két térelem illeszkedésének, párhuzamosságának vagy metszésének.

1. Két pont pontosan akkor azonos, ha megfelelő képeik egybeesnek: $P = Q \iff P' = Q'$ és $P'' = Q''$.

2. Egy P pont akkor és csakis akkor illeszkedik egy e egyenesre, ha a megfelelő képek illeszkednek egymásra: $P \in e \iff P' \in e'$ és $P'' \in e''$.

3. Egy P pont pontosan akkor illeszkedik egy α síkra, ha illeszkedik α egy e egyenesére: $P \in \alpha \iff P \in e$ és $e \subset \alpha$.
   Alapfeladat: Legyen adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszük meg egy tetszőleges síkbeli P pont képét!
   Megoldás: Evidens, hogy a keresett P pont első vagy második képe tetszőlegesen felvehető. Legyen ez a P' első kép. Minden síkbeli ponton át húzható egy első és egy második fővonal. Ha a sík egy fővonalára illesztjük rá a P pontot, akkor a P síkbeli lesz. (Ez a fővonal játssza majd a feltételben szereplő „tetszőleges” egyenes szerepét.) Válasszuk ki a sík egy f_1 első fővonalát úgy, hogy f_1' áthaladjon P'-n.

Az f_1 fővonal f_1' első képe párhuzamos n_1-gyel ($f_1 \| n_1$ miatt), az f_2'' második kép párhuzamos $x_{1,2}$-vel ($f_1 \| K_1$-ből következően).
Így f_1-nek nincs első nyompontja, de van második nyompontja, amely – az illeszkedéstartás miatt – illeszkedik a sík n_2 második nyomvonalára. Ahol az f_1' metszi az $x_{1,2}$-tengelyt, ott található a második(!) nyompontjának első(!) képe ($f_1' \cap x_{1,2} = {}_{f_1}N_2'$). (Lásd a sík ábrázolásánál található ábrákat.) Ha pedig megtaláltuk az ${}_{f_1}N_2$ első képét, akkor azzal egy rendezőn található a második képe is (továbbá illeszkedik n_2-re). Az ${}_{f_1}N_2''$-ből $x_{1,2}$-vel párhuzamost húzva f_1''-höz jutunk.
Végül az illeszkedéstartás miatt $P'' \in f_1''$, és a P'-höz tartozó rendező(egyenes) kimetszi f_1''-ből P''-t.

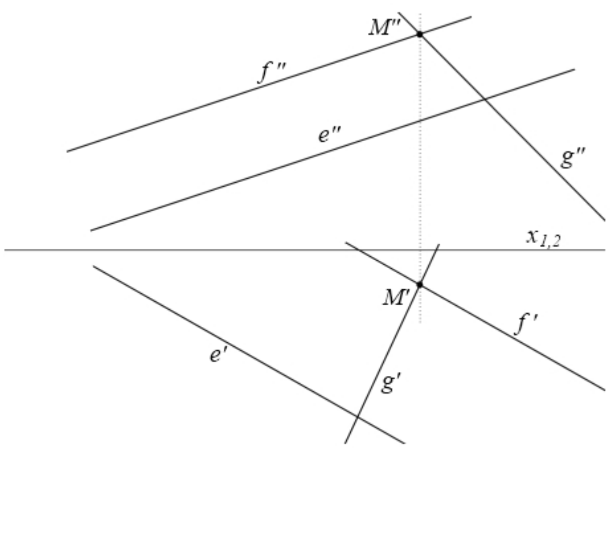


(Hasonlóan szerkeszthető egy f_2 második fővonalra illeszkedő pont képe is.)

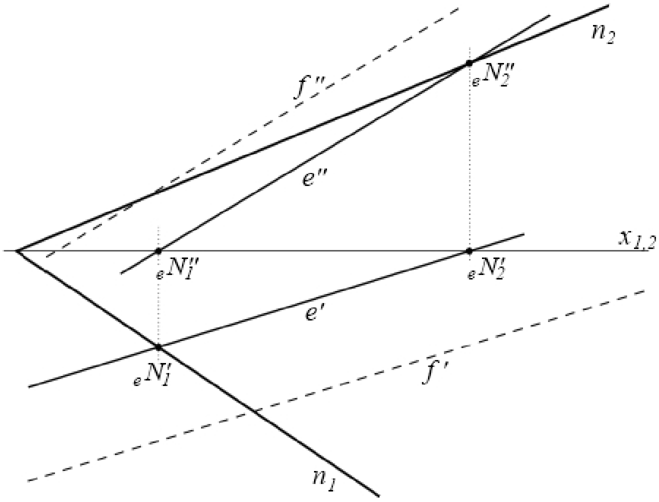
4. Két egyenes kölcsönös helyzetét tekintve a képi feltételek egyértelműek:

$$l \| k \iff l' \| k' \text{ és } l'' \| k''$$
$$l \cap k = \{M\} \iff l' \cap k' = \{M'\} \text{ és } l'' \cap k'' = \{M''\} \text{ és } \overleftrightarrow{M'M''} \perp x_{1,2}$$

Az ábrán e és f párhuzamos, f és g metsző, míg e és g kitérő helyzetű.

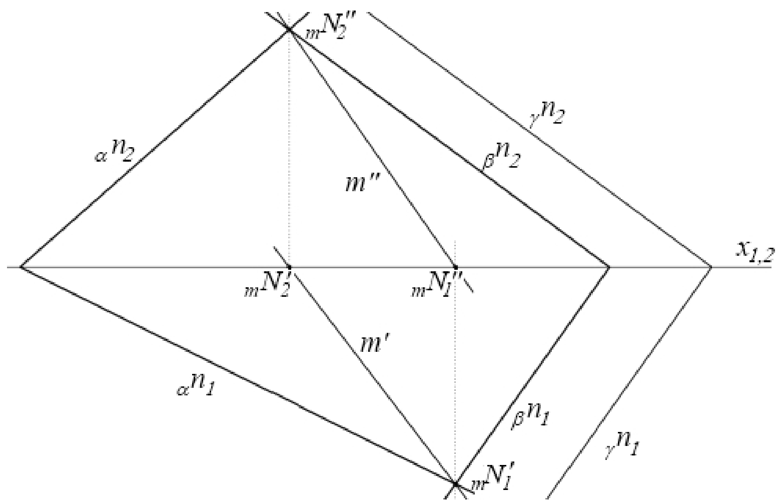


5. Egy egyenes pontosan akkor illeszkedik egy síkra, ha a megfelelő nyompontjai illeszkednek a megfelelő nyomvonalakra. (Azaz az egyenes két pontja illeszkedik a síkra.)
   A képi feltétel: $e \subset \alpha \quad \iff \quad {}_eN_1 \in {}_\alpha n_1$ és ${}_eN_2 \in {}_\alpha n_2$
   Egy egyenes akkor és csakis akkor párhuzamos egy síkkal, ha nincs azzal közös pontja. A gyakorlatban úgy szerkeszthetünk gyorsan egy síkkal párhuzamos egyenest, hogy vesszük a sík egy egyenesét, és azzal párhuzamost húzunk. Arra azonban vigyázni kell, hogy a kapott párhuzamos nyompontjai ne illeszkedjenek a sík nyomvonalaira (mert ekkor újra síkbeli egyenest kapnánk).
   Az ábrán e benne van az n_1 és n_2 nyomvonalakkal adott síkban ($e \subset [n_1, n_2]$), míg f párhuzamos a síkkal ($f \| [n_1, n_2]$).



(Egy egyenes és egy sík metszéspontjának megszerkesztését lásd később.)

6. Két sík pontosan akkor párhuzamos, ha két-két egyenesük párhuzamos. Ezt a feltételt a szerkesztésekben a nyomvonalak párhuzamosságával érjük el.
   Képi feltétel: $\Sigma_1 \| \Sigma_2 \quad \iff \quad {}_{\Sigma_1}n_1 \| {}_{\Sigma_2}n_1$ és ${}_{\Sigma_1}n_2 \| {}_{\Sigma_2}n_2$
   Az ábrán β és γ síkok párhuzamosak.



Alapfeladat: Adottak α és β síkok nyomvonalaikkal. Szerkesztendő az m metszésvonal!
Megoldás: Az előző ábra mutatja a szerkesztést. Ahhoz, hogy a metszésvonalat megszerkesszük, elég, ha két pontot ismerünk a metszésvonalból. (Emlékeztetőül: Két sík metszésvonala a két sík összes közös pontjának halmaza.)
A két sík ${}_\alpha n_1$ és ${}_\beta n_1$ nyomvonalai egy pontban metszik egymást, ezért ez a (közös) pont eleme lesz a keresett metszésvonalnak is. Ez a pont nem más, mint az m első nyompontja: ${}_m N_1$. (Egy síkbeli egyenes első/második nyompontja eleme a sík első/második nyomvonalának.) Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy a két második nyomvonal metszéspontja a metszésvonal második nyompontja: ${}_m N_2$.
E két pont első és második képének ismeretében a metszésvonal első és második képe is megrajzolható: $\overleftrightarrow{{}_m N_1' \, {}_m N_2'} = m'$ és $\overleftrightarrow{{}_m N_1'' \, {}_m N_2''} = m''$.

Gyakorló feladatok

1. Adott egy sík nyomvonalaival és egy P pont P'' második képe. Határozzuk meg a P' első képet úgy, hogy P síkbeli legyen!

2. Adott egy sík nyomvonalaival és egy e egyenes e' első képe. Határozzuk meg e''-t úgy, hogy e a síkkal párhuzamos legyen!

3. Szerkesszünk $ABCD$ síkbeli(!) négyszöget!

4. *Alapfeladat:* Szerkesszük meg egy $ABC\triangle$ háromszög síkjának nyomvonalait!

5. *Alapfeladat:* Legyen adott P pont és e egyenes képeikkel. Határozzuk meg a közös síkjuk nyomvonalait!

6. Legyen adva e és f metsző egyenespár. Szerkesszük meg a síkjukban lévő tetszőleges pont képeit nyomvonalak (vagy fővonalak) használata nélkül!

7. Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszük meg azokat a pontjait, amelyek a K_1 képsíktól 3 cm-re vannak! (fővonal szerkesztése)

8. Határozzuk meg egy általános helyzetű egyenes metszéspontját a koincidenciasíkkal és a szimmetriasíkkal!

9. Határozzuk meg egy általános helyzetű sík metszésvonalát a koincidenciasíkkal és a szimmetriasíkkal!

2.3. Sík és egyenes metszéspontja

A következő két feladat kulcsfontosságú alapszerkesztések a Monge-projekcióban.

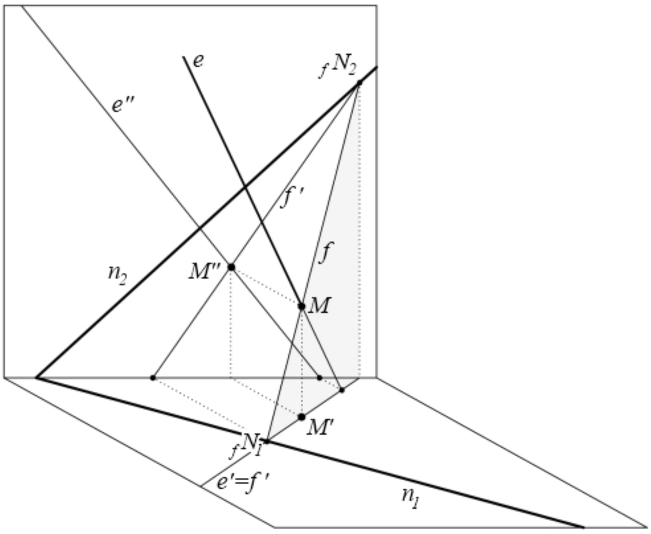
Alapfeladat: Adott egy sík nyomvonalaival és egy e egyenes két képével. Szerkesztendő a sík és az egyenes metszéspontja!
Megoldás: **Fedőegyenespárok módszere**.
A feladatot visszavezetjük két egyenes metszéspontjának meghatározására, ugyanis metsző egyenesek közös pontja azonnal kijelölhető.

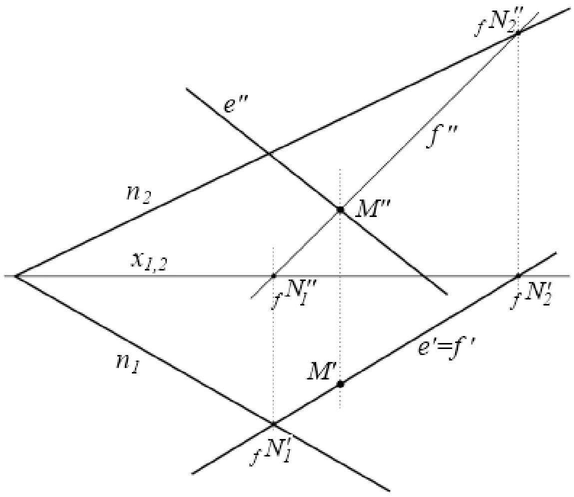
Olyan síkbeli(!) egyenest keresünk, amelyet az e egyenes biztosan metsz, azaz a síkbeli egyenesnek és e-nek legyen közös síkja.

Tekintsük az e egyenes e' első képét. Biztosan létezik olyan síkbeli egyenes, amelynek ugyanaz az első képe, mint az e'. Legyen ez egy f-fel jelölt ún. *fedőegyenes*, így e és f közös első vetítősíkban nyugszik ($e' = f'$).

Szerkesszük meg az f síkbeli(!) egyenes második képét. Ahol az f' metszi az n_1 első nyomvonalat, ott van az f egyenes első nyompontja ($f' \cap n_1 = {}_fN_1 = {}_fN_1'$). Az ${}_fN_1$ második képe az $x_{1,2}$-n van (hiszen az első nyompont K_1-beli pont).
Az ${}_fN_2$ első képe az f' és $x_{1,2}$ közös pontja: ${}_fN_2' = f' \cap x_{1,2}$. Ezzel egy rendezőn és az n_2 nyomvonalon található az ${}_fN_2$ második képe (${}_fN_2'' = {}_fN_2$).
A két nyompont második képe pedig megadja az f''-t: $\overleftrightarrow{{}_fN_1'' \, {}_fN_2''} = f''$.

A második képeket nézve már látható, hogy e és f metsző. (A metszést az garantálja, hogy e és f egyeneseknek van közös vetítősíkja.) A második képen a keresett M metszéspont második képe kijelölhető: $e'' \cap f'' = \{M''\}$. Rendezővel $e' = f'$-re vetítve adódik M' is.





Fontos megjegyzés: A módszer akkor is működik, ha az első lépésben e''-höz választunk fedő helyzetű f'' síkbeli egyenest. Ekkor a szerkesztés végén az első képeken mutatkozik meg a metszéspont M' első képe. (Ez a szerkesztés az Olvasó feladata.)

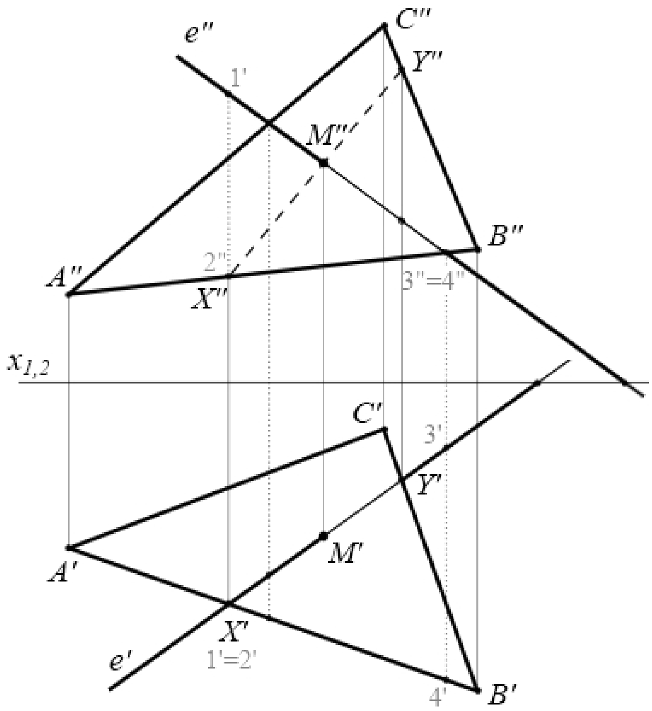
Alapfeladat: Adott egy $ABC\triangle$ háromszög és egy e egyenes képeikkel. Szerkesztendő a háromszög és az egyenes közös pontja!

Megoldás: A feladatot ismét a **fedőegyenespárok módszeré**vel oldjuk meg, így minden geometriai meggondolást átültethetünk erre az esetre. A különbség annyi, hogy most nem a nyomvonalakat és nyompontokat használjuk fel, hanem a háromszög oldalait és két „tetszőleges” pontot a fedőegyenesről.

Tekintsük az e egyenes e' első képét. Biztosan létezik olyan egyenes az $ABC\triangle$ síkjában, amelynek ugyancsak e' az első képe. Ekkor ez a fedőegyenes metszi az $ABC\triangle$ oldalait egy X és egy Y pontban, amelynek első képei kijelölhetőek: $e' \cap \overline{A'B'} = X'$ és $e' \cap \overline{B'C'} = Y'$. (A fedőegyenes tehát az $\overleftrightarrow{XY}$ egyenes.)

Az X' első képből induló rendező az $\overline{A''B''}$ oldalból kimetszi X''-t, az Y'-ből húzott rendező a $\overline{B''C''}$-ből Y''-t metszi ki. Így megkaptuk az $\overline{XY}$ szakasz második képét: $\overline{X''Y''}$.

Az előző feladathoz hasonlóan $e'' \cap \overline{X''Y''} = \{M''\}$. Az M'' második képből pedig rendezővel kapjuk a metszéspont M' első képét.



Megjegyzés 1.: Háromszög (vagy valamely síkidom) és egyenes metszése esetén előfordul, hogy a kapott M metszéspont a háromszög külső pontja. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az egyenes a háromszöget nem, de a háromszög síkját már metszi.

Megjegyzés 2.: Ebben az esetben is működik a fedőegyenespárok módszere a második képeket használva.

2.4. Láthatóság

Az ábrázoló geometria egyik célja, hogy szemléletes ábrákat nyerjünk a szerkesztés során. Ezért természetes gondolatként vetődik fel, hogy a térbeli objektumok elöl- és felülnézetében (második, illetve első képén) melyik térelem látszik és melyik van takarásban. Láthatóság kérdése esetén csak az I. térnegyedbeli pontok lehetnek láthatóak, a többit a képsíkok „eltakarják”.

Láthatóság vizsgálatakor fedőpontokat veszünk az ábrázolt objektumokról. A *fedőpontok* olyan pontpárok (ponthármasok stb.), amelyeknek vagy az első vagy a második képe egybeesik (azaz egy vetítőegyenesen helyezkednek el).
Első fedőpontok esetén két (vagy több) pontból kiválasztható az az egy, amelyik az első képeket tekintve a „legmagasabban” van, így az a pont látszik, a többire pedig rátakar. A „magasságot” a pontok második(!) képei és az $x_{1,2}$ közötti távolságuk határozzák meg.
Második fedőpontok esetén két (vagy több) pontból lehet azt az egyet kiválasztani, amelyik a második kép esetén „legközelebb van hozzánk”, és a többi pontra rátakar. A „közelséget” a pontok első(!) képei és az $x_{1,2}$ közötti távolságuk adják.

A láthatóságot legkönnyebben konkrét példán keresztül lehet szemléltetni. – Térjünk vissza az előző fejezet utolsó feladatához, ahol az $ABC\triangle$ háromszöget metszette az e egyenes az M pontban.

Mi látszik az első képen és mi van takarásban („felülnézet”)? Az M metszéspont biztosan látszik, hiszen mindkét ábrázolt objektumnak (háromszög és egyenes) eleme. Az egyenes és a háromszög minden olyan pontja látszik, amelyeknek nincs közös fedőpontjuk. Csupán az $\overline{X'Y'}$ szakaszhoz tartozó térbeli pontokról kell megállapítani, hogy hol látszanak az egyenes pontjai és hol a háromszög(lemez) pontjai.
Vegyük észre, hogy elegendő az X'-t és Y'-t mint fedőpontokat megnézni. Ugyanis ha egy szakasznak két végpontja látszik (és nincs egyéb rátakaró objektum), akkor minden pontja látszik. – Az X'-höz két fedőpont tartozik: az egyenesen lévő 1 pont és a háromszög $2 = X$ pontja (1’=2’).
Két eset lehetséges: Az első esetben az 1-es pont magasabban van, mint a 2-es, így a kérdéses pontban az egyenes látszik. Ha látszik az egyenes 1-es pontja és M pontja, akkor a teljes $\overrightarrow{M1}$ félegyenes látszik. A második esetben a 2-es pont van magasabban, ekkor a háromszög(lemez) 2-es és M pontjai is láthatóak, azaz a háromszög rátakar az egyenes $\overline{1M}$ szakaszára. – Az 1-es és 2-es pontok második képét tekintve látható, hogy az 1-es pont távolabb helyezkedik el a K_1 képsíktól, így az elfedi a 2-es pontot. Tehát az első eset valósult meg.
Ugyanezt a módszert követjük az Y' esetén is, ott a háromszög takar rá az egyenesre.

Mi látszik a második képen és mi van takarásban („elölnézet”)? Az M metszéspont ismét biztosan látszik, és analóg meggondolásokat használunk a második kép esetében is, mint az első képeknél.
Legyen a 3-as pont az egyenesen, a 4-es pont a háromszögön úgy, hogy $3'' = 4''$ (második fedőpontok). Rendezővel a megfelelő térelemre vetítve, a $3'$ és a $4'$ első képeket kell megnézni. Ezek közül a $4'$ van távolabb az $x_{1,2}$-től, ezért elölnézetben a 4-es pont látszik, a 3-as nem. Ezekben a fedőpontokban tehát a háromszöget látjuk, az egyenest nem.
Ugyanígy kell eljárni a második kép másik metszéspontjánál is, így kapjuk meg a keresett „képies képet” mindkét nézetben.

Amennyiben a feladat síkidomok, felületek vagy testek közös pontjainak meghatározása, a láthatóság vizsgálata – a szemléletesség miatt – elengedhetetlen.

Alapfeladat: Adottak $ABC\triangle$ és $DEF\triangle$ háromszögek különböző síkokban. Szerkesszük meg a két háromszög metszésvonalát!

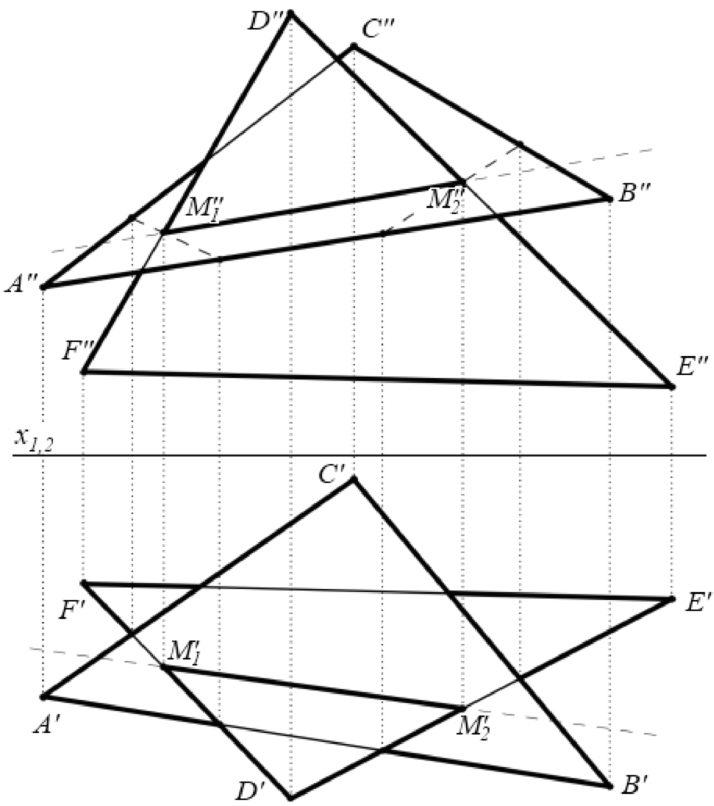
Megoldás: A feladatot egyenes és háromszög metszéspontjának megszerkesztésére vezetjük vissza.

Válasszuk ki az egyik háromszög oldalait és keressük meg a másik háromszöggel alkotott metszéspontjait (ha ezek léteznek). Ha így 0 vagy 1 metszéspontot kaptunk, akkor cseréljük fel a két háromszög szerepét (és az egyik háromszöget rögzítve a másik oldalaival való metszéspontjait szerkesztjük meg).
Ha a két háromszög metsző, akkor összesen 2 különböző metszéspontot kell kapni.

Az $ABC\triangle$ legyen rögzített, és meghatározzuk a metszéspontjait a $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ és $\overline{DF}$ oldalakkal. – Fedőegyenespárok módszerével a $\overline{DF}$ és az $ABC\triangle$ háromszög metszéspontja M_1. A $\overline{DE}$ a háromszöget az M_2 pontban metszi. (A fedőegyeneseket mindkét esetben szaggatott vonallal jeleztük.)
Az $\overline{EF}$ biztosan nem metszi a háromszöget, ez a második képből leolvasható.

A $DEF\triangle$ rögzítése és metszése az $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ és $\overline{AC}$ oldalakkal szükségtelen, mert már megkaptuk a keresett két metszéspontot.

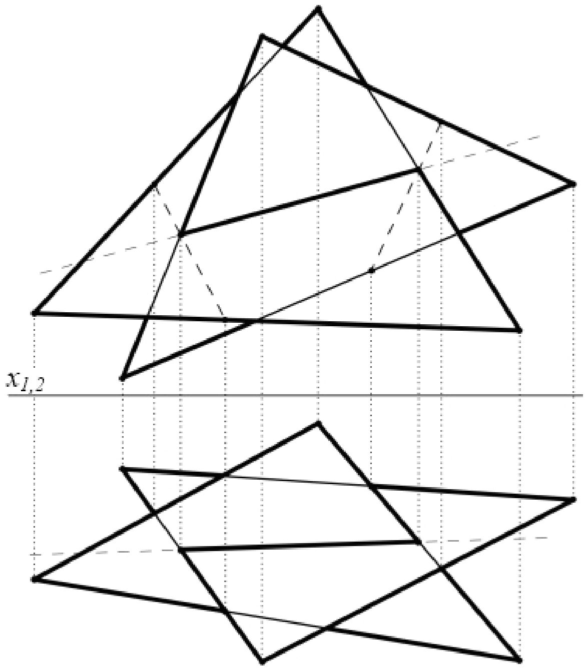
Az M_1 és M_2 pontok meghatározzák a két háromszög metszésvonalát: $\overline{M_1M_2}$.
Végül – a fedőpontokat felhasználva – láthatóság szerint húzzuk ki az ábrát.



A fenti szerkesztésben a $DEF\triangle$ oldalai az $ABC\triangle$ háromszöggel 2 db metszéspontot adtak. Így a $DEF\triangle$-et „átdöftük” az $ABC\triangle$-n. Ezt *teljes áthatás*nak nevezzük.

Ha a $DEF\triangle$ oldalainak az $ABC\triangle$ háromszöggel csupán 1 db közös pontja lett volna, akkor – a fentiek szerint – az $ABC\triangle$ oldalainak és a $DEF\triangle$-nek a metszéspontjait

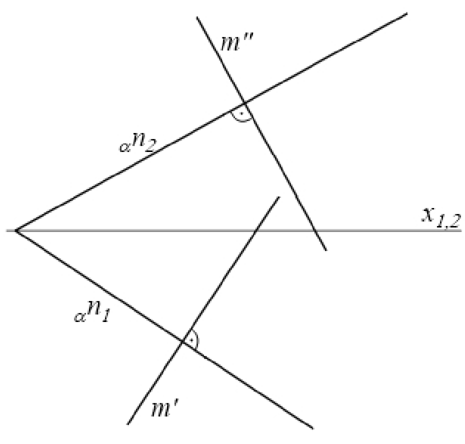
is meg kellett volna szerkeszteni. Ilyen módon egy újabb metszéspontot kaptunk volna. Ekkor az egyik háromszög „belemar” a másikba. Ez a *bemetszés* esete.
A következő rajzon – a szerkesztés részleteinek mellőzésével – egy ilyen bemetszést ábrázoltunk.



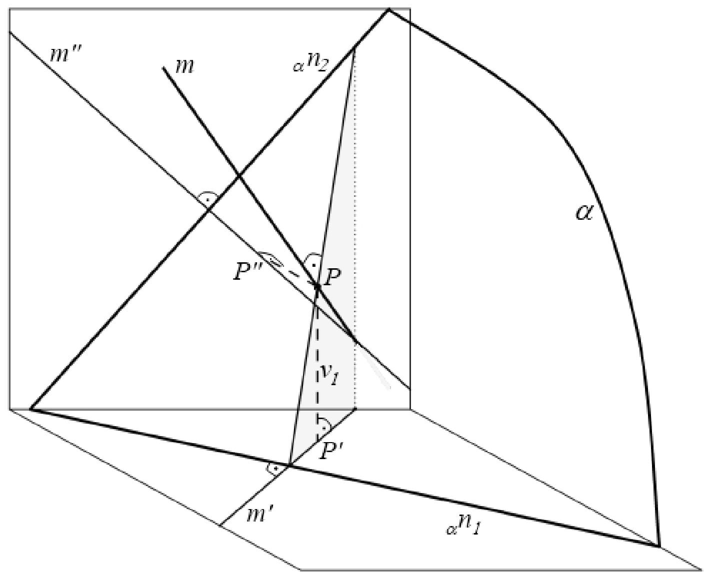
2.5. Sík és egyenes merőlegessége

Tétel: (egyenes és sík merőlegességének képi feltétele) *Monge-projekcióban egy m egyenes pontosan akkor merőleges egy α síkra, ha az egyenes m' első képe merőleges a sík ${}_{\alpha}n_1$ első nyomvonalára és az m'' első kép merőleges az ${}_{\alpha}n_2$ második nyomvonalra. Röviden:*

$$m \perp \alpha \iff m' \perp {}_{\alpha}n_1 \text{ és } m'' \perp {}_{\alpha}n_2$$



Bizonyítás: Legyen adva az α sík ${}_{\alpha}n_1$ és ${}_{\alpha}n_2$ nyomvonalaival, legyen m adott két képével úgy, hogy az m egyenes metszi az α síkot egy P pontban. A P ponthoz tartozó első vetítőegyenest v_1-gyel, a második vetítőegyenesét v_2-vel jelöljük. Legyen az m első vetítősíkja $\mathcal{V}_1 = [m, v_1]$ $(m' \subset \mathcal{V}_1)$, a második vetítősíkja $\mathcal{V}_2 = [m, v_2]$ $(m'' \subset \mathcal{V}_2)$.



Tegyük fel, hogy $m \perp \alpha$. Ekkor egyrészt $m \perp {}_{\alpha}n_1$, mert ${}_{\alpha}n_1 \subset \alpha$. Másrészt, $v_1 \perp K_1$ (és ${}_{\alpha}n_1 \subset K_1$) miatt $v_1 \perp {}_{\alpha}n_1$. Így ${}_{\alpha}n_1$ merőleges az m és v_1 síkjára: ${}_{\alpha}n_1 \perp \mathcal{V}_1$, amiből $m' \perp {}_{\alpha}n_1$ következik $(m' \subset \mathcal{V}_1)$.
Hasonló gondolatmenettel igazolható, hogy $m'' \perp {}_{\alpha}n_2$.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $m' \perp {}_{\alpha}n_1$ és $m'' \perp {}_{\alpha}n_2$ képi feltételek teljesülnek. Mivel $v_1 \perp K_1$, ezért $v_1 \perp {}_{\alpha}n_1$. Ez az $m' \perp {}_{\alpha}n_1$ feltétellel együtt azt jelenti, hogy az ${}_{\alpha}n_1$ nyomvonal merőleges m' és v_1 síkjára: ${}_{\alpha}n_1 \perp \mathcal{V}_1$. Ebből ($m \subset \mathcal{V}_1$ miatt) következik, hogy $m \perp {}_{\alpha}n_1$. Ugyanígy látható be (m'' és v_2 felhasználásával), hogy $m \perp {}_{\alpha}n_2$.
Az $m \perp {}_{\alpha}n_1$ és $m \perp {}_{\alpha}n_2$ miatt $m \perp \alpha$ következik. □

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a fenti bizonyítás több ponton megegyezik a kótás projekcióbeli sík és egyenes merőlegessége képi feltételének bizonyításával.

Gyakorló feladat: Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy külső pont. Szerkesszünk az adott pontból merőlegest a síkra, majd határozzuk meg a metszéspontot is!

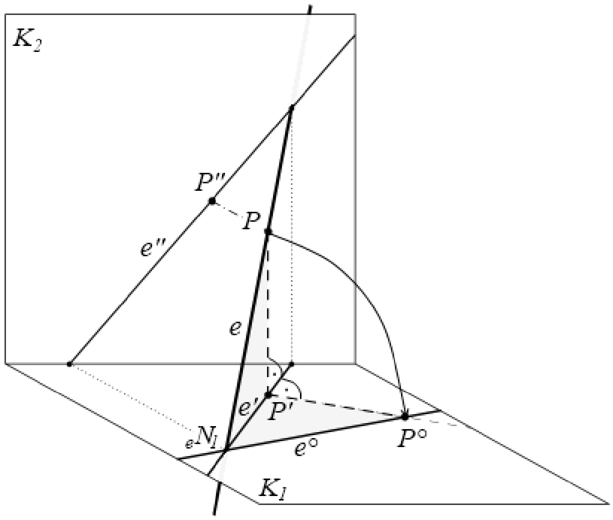
2.6. Egyenes és sík képsíkba forgatása

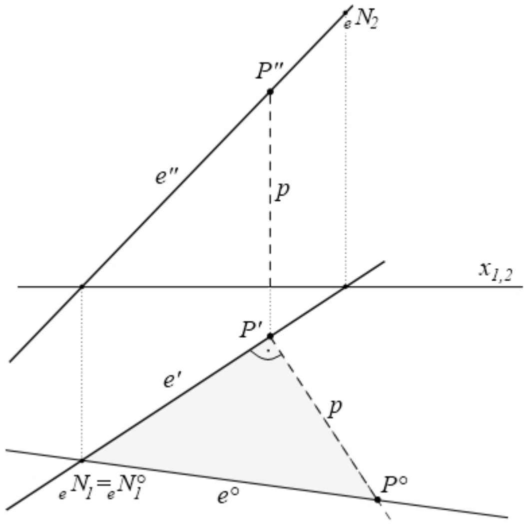
Egyenes és sík képsíkba forgatása során ugyanazokat a térbeli meggondolásokat alkalmazzuk, mint kótás projekció esetén.

Egyenes leforgatása

Egy egyenes leforgatásának célja, hogy az egyenesen két pont távolságát meghatározzuk, vagy felmérjünk adott hosszúságot.

Tekintsünk egy e egyenest, amely két képével adott a Monge-projekcióban. Forgassuk most az e-t a K_1 képsíkba. Ez a térben egy $\pm 90°$-os e' tengelyű forgatást jelent. Az e egyenes ${}_eN_1$ nyompontja a forgatás során fixpont. Egy tetszőleges P pontjának leforgatottja $P°$, amelyet úgy kapunk, hogy P'-ből merőlegest állítunk e'-re, majd erre a merőlegesre P'-ből felmérjük P-nek a K_1-től való távolságát (p). (Röviden: Az e egyeneshez tartozó első vetítősíkot forgattuk le a K_1 képsíkba.)
Ekkor az $\overleftrightarrow{{}_eN_1^\circ P^\circ} = e^\circ$ leforgatott egyenesen már tetszőleges távolságokat felmérhetünk.



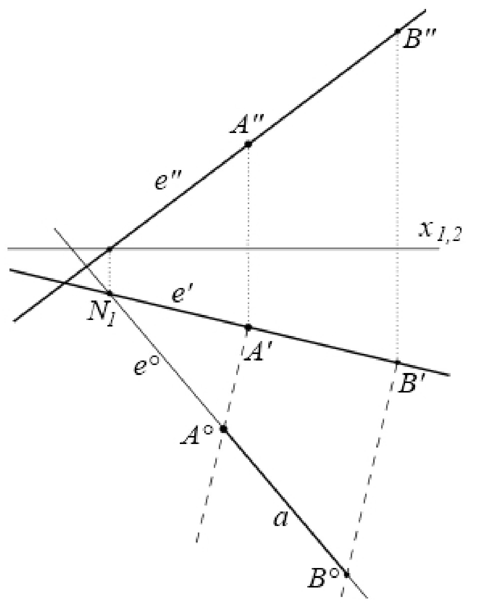


Megjegyzés 1.: Az egyenest analóg módon leforgathatjuk a K_2-be is. Abban az esetben az e egyenes második vetítősíkját forgatjuk be a K_2 képsíkba. Tetszőleges P pont leforgatásához pedig a pont K_2-től való távolságát használjuk fel, amely megegyezik a $d(P', x_{1,2})$ távolsággal.
(Erre példát lásd a későbbiekben tárgyalásra kerülő Kocka ábrázolásánál.)

Megjegyzés 2.: Előfordulhat az is, hogy képsíkkal párhuzamos síkba kell forgatni az egyenest. Ez természetesen megtehető, de abban az esetben a pont képsíktól való távolsága helyett a pont adott párhuzamos síktól vett távolságával kell dolgozni.

Alapfeladat: Legyen adott egy e egyenes két képével, azon egy A pont, és egy a szakaszhosszúság. Szerkesszünk olyan, az e egyenesen fekvő B pontot, amely a távolságra van az A ponttól!

Megoldás: A B pont meghatározásához forgassuk le az egyenest, mivel $e°$-on valódi nagyságokat mérhetünk fel. A feladatnak két megoldása van.
Forgassuk e-t az első képsíkba. Az e egyenes leforgatottját az $N_1 = N_1' = N_1^\circ$ nyompontjával (mint fixponttal) és az $A°$ képével meghatározhatjuk (lásd előző szerkesztés).
Mérjük fel $e°$-on az $A°$-ból az adott a hosszt, így kapjuk a $B°$ pontot. Ez a keresett pont leforgatott képe. Állítsunk $B°$-ból merőlegest az e'-re. Ahol ez a merőleges elmetszi e'-t, ott van a B pont B' első képe. Rendezővel a B'' meghatározható.



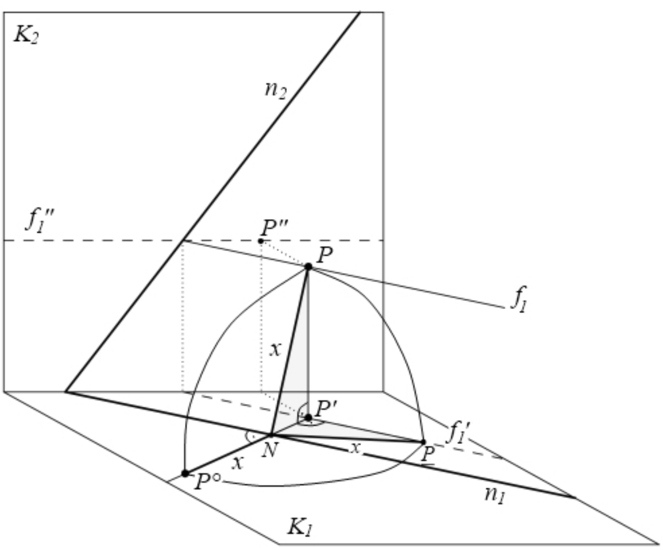
Sík leforgatása

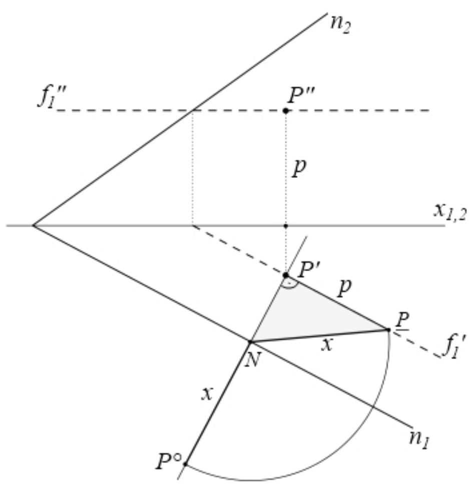
Egy tetszőleges sík leforgatásával lehetővé válik, hogy azon a síkon minden térelemet valódi nagyságban lássunk.

Egy sík képsíkba forgatása egy térbeli tengely körüli forgatás, ahol a tengely a (képsíkhoz tartozó) nyomvonal, a forgatás szöge a sík képsíkkal bezárt szöge (vagy annak kiegészítő szöge). (v.ö.: Kótás projekció, Sík leforgatása)

Legyen adott egy sík nyomvonalaival. Vegyünk fel rajta egy tetszőleges P pontot a már korábban megismert módon (egy f_1 első fővonalra illesztjük a P-t).
Az ábra jelöléseit használva, a térben a P pont egy olyan körön mozog, amelynek középpontja N, sugara $d(P,N) = x$, síkja pedig merőleges n_1-re. E merőlegesség miatt a keresett P° pont illeszkedik egy P'-ből induló, az n_1-re merőleges egyenesre.

Szükség van még az x szakaszhosszra.





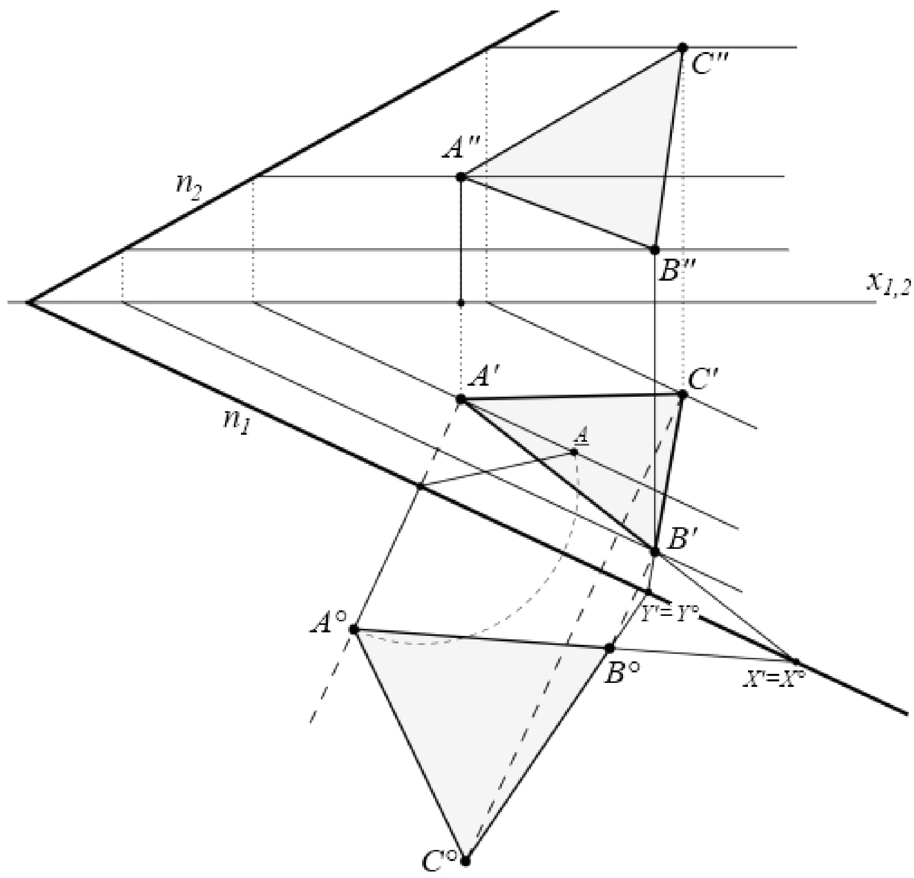
Tekintsük az $NP'P\triangle$ háromszöget, amelyet *leforgatási háromszög*nek nevezünk. Ennek a háromszögnek az átfogója a keresett x. Az egyik befogója az $\overline{NP'}$ szakasz, amelyet az első képen valódi nagyságban látunk. A másik befogója a $\overline{PP'}$ szakasz, aminek a hosszát a második képen olvashatjuk le: $d(P,P') = d(P'', x_{1,2}) = p$. Mérjük fel ezt a távolságot a P-hez tartozó fővonal első képére: $\overline{P'\underline{P}}$. Az $NP'\underline{P}\triangle$ egybevágó az eredeti leforgatási háromszöggel, ezért $d(N,\underline{P}) = x$. – Ezt a szakaszt kell átmérni N végpontból a P'-ből induló merőlegesre, így kapjuk meg a P° forgatott képet.

Megjegyzés: Analóg módon forgathatunk a K_2 képsíkba, a megfelelő képek szerepeinek felcserélésével. Szükség esetén valamely képsíkkal párhuzamos síkba is forgathatunk, akkor a leforgatási háromszög oldalhosszúságai megváltoznak.

A Kótás projekció fejezetben elmondottak – a vetítési rendszer hasonló volta miatt – itt is érvényesek maradnak: *A sík pontjainak első/második képei és a K_1-be/K_2-be forgatott képei között merőleges tengelyes affinitás van, ahol az affinitás tengelye az n_1/n_2 nyomvonal.*

Alapfeladat: Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszünk a síkban tetszőleges oldalhosszúságú szabályos háromszöget!

Megoldás: (A feladat megoldása analóg a Kótás projekcióban leírtakkal.) Szerkesszünk egy tetszőleges A pontot a síkra (egy első fővonal segítségével), majd forgassuk le a leforgatási háromszöge segítségével.



Az $n_1 (= n_1^\circ)$ nyomvonal és az A° forgatott kép megadja az $[n_1, n_2]$ sík leforgatottját. Szerkesszünk itt egy szabályos háromszöget:: $A^\circ B^\circ C^\circ \triangle$.

Mivel a vetített és forgatott képek között merőleges tengelyes affinitás van (tengely: n_1, megfelelő pontpár: (A', A°)), ezért a B' és C' első képeket ennek segítségével határozzuk meg. Az $\overleftrightarrow{A^\circ B^\circ}$ elmetszi az n_1-et egy $X' = X^\circ$ fixpontban. Az illeszkedéstartás miatt B' rajta van az $\overleftrightarrow{A'X'}$ egyenesen. Az $\overleftrightarrow{A'X'}$-ből a B°-ból húzott (merőleges) irány metszi ki a B'-t. Hasonlóan járunk el a C' esetében is, ott a $\overleftrightarrow{BC}$ egyenes különböző képeit és az $Y' = Y^\circ$ fixpontot használjuk fel. – Ezzel megkaptuk az $A'B'C'\triangle$ első képet.

A B és C pontok második képeit első fővonalak segítségével határozhatjuk meg.

Gyakorló feladatok

1. Adott egy e egyenes két képével és azon egy A pont. Határozzunk meg – az e K_2-be(!) forgatásával – olyan e-beli pontot, amely 4 cm-re van az A ponttól!

2. Legyen adva egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont képeikkel. Határozzuk meg az egyenes és a pont távolságát!
   Segítség: Határozzuk meg az egyenes és a pont közös síkját, majd forgassuk le az így kapott síkot.

3. Adott egy sík és egy rá nem illeszkedő pont. Határozzuk meg a pont és a sík távolságát!
   Segítség: Állítsunk merőlegest a pontból a síkra, majd szerkesszük meg a merőleges és a sík metszéspontját. A keresett távolság a pont és a metszéspont távolsága.

4. Adott egy sík nyomvonalaival. Szerkesszünk rá szabályos háromszöget úgy, hogy a síkot a második képsíkba forgatjuk!

5. Legyenek adottak e és f kitérő egyenesek. Határozzuk meg a távolságukat! (Csak a távolság kell, a normáltranszverzális helye nem.)
   Segítség: Toljuk el az e-t az f egy tetszőleges F pontjába: $\underline{e}$. A keresett távolság az e és az $[f, \underline{e}]$ sík távolsága. (Sík és egy azzal párhuzamos egyenes távolsága: az egyenes egy pontjának és a síknak a távolsága.)

2.7. Mértani testek ábrázolása

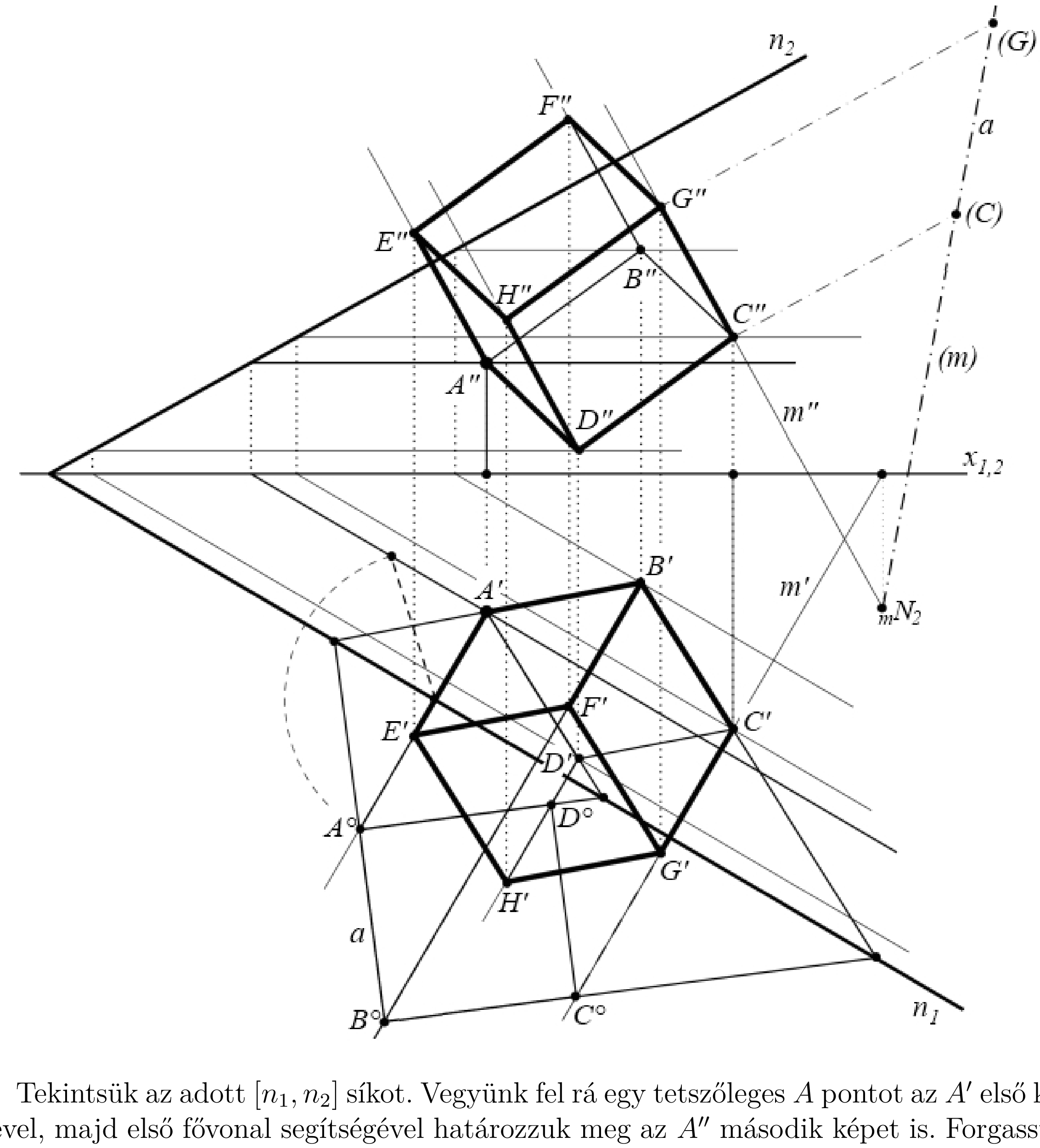
Egy ábrázolási rendszerben bármit meg tudunk szerkeszteni, ha ismerjük a következő helyzetgeometriai és metrikus alapszerkesztéseket:
– két sík metszésvonala,
– sík és egyenes metszéspontja,
– sík és egyenes merőlegességének képi feltétele,
– sík (és így speciálisan egyenes) képsíkba forgatása.
(A párhuzamossági és illeszkedési feltételeket az ábrázolási rendszer részének tekintjük.)
Mivel ezek az eszközök már rendelkezésre állnak, így minden térbeli objektum megszerkeszthető – csupán a saját elemi sík- és térgeometriai, differenciálgeometriai és projektív geometriai tudásunk szabhat határt. (A későbbiekben még megismerkedünk egy szerkesztéseket megkönnyítő módszerrel, az ún. képsíktranszformációval is.)

Alapfeladat: Szerkesszünk tetszőleges síkon álló, a élhosszúságú kockát!

Megoldás: Tekintsük át, hogyan „építhetjük fel” a kockát:

1. Megszerkesztjük az $ABCD$ négyzet alapot a síkra (→ sík leforgatása).
2. Az A, B, C, D csúcsokból merőlegeseket állítunk a síkra (→ létezik képi feltétel).
3. Egyik merőlegesre a csúcsából felmérjük az a hosszt (→ egyenes leforgatása).
4. Az így kapott új kockacsúcsot eltoljuk a másik három merőlegesre (→ osztóviszony-, párhuzamosság- és illeszkedéstartás).
5. Láthatóság szerint kihúzzuk az ábrát (→ fedőpontokkal).

Mivel minden lépésnél már ismert módszert használunk, ezért a szerkesztést csupán röviden írjuk le.



Tekintsük az adott $[n_1, n_2]$ síkot. Vegyünk fel rá egy tetszőleges A pontot az A' első képével, majd első fővonal segítségével határozzuk meg az A'' második képet is. Forgassuk le A-val a síkot n_1 körül a K_1-be, és szerkesszünk a leforgatotton egy a oldalhosszúságú $A^\circ B^\circ C^\circ D^\circ$ négyzetet. Tengelyes affinitás segítségével határozzuk meg a hiányzó B', C', D' képeket, ezután (első) fővonalakkal szerkesszük meg a B'', C''', D'' második képeket is. (Ha a szerkesztés pontos, akkor a párhuzamosság- és osztóviszonytartás miatt

$ABCD$ négyzet első és második képe paralelogramma.)

Állítsunk merőlegest A, B, C, D csúcsokból a síkra. Az első képen a merőlegesek első képei egybeesnek a leforgatáshoz használt merőlegesekkel. (Csak a képek esnek egybe, hiszen a leforgatás merőlegesei K_1-beliek, míg a merőleges egyenesek a „térben” vannak.)

Fel kell mérni valamely csúcsból kiindulva a kocka élhosszát az egyik merőlegesre. Ha nem akarunk zsúfolt ábrát, akkor a négy rendelkezésre álló merőlegesből azt válasszuk ki, amelyik képének környezetében kevés pont/vonal található – esetünkben legyen ez a C-ből induló merőleges (m). Forgassuk le m-et a második(!) képsíkba. Ekkor az ${}_mN_2$ fixen maradó pont, és a C''-ből merőlegest állítva m''-re, felmérjük arra a $d(C, K_2) = d(C', x_{1,2})$ távolságot: (C) és $\overleftrightarrow{{}_mN_2(C)} = (m)$. (*Megjegyzés:* Több leforgatás esetén Monge-projekcióban a leforgatott képeket zárójelben is feltüntethetjük.) A (C)-ból a nyomponttól távolabb mérjük fel az a élhosszúságot: (G). (Ezzel érjük el azt, hogy a kocka a síkon a képsíkoktól távolabb, a „szemlélőhöz közelebb” álljon.) A (G) visszaforgatásával kapjuk a G'' második képet. Ez a G kockának egy újabb pontja. Rendezővel kapjuk a G' első képet.

Az előbb megkapott $\overline{CG}$ szakaszt átmásolhatjuk az A, B és D csúcsokba egyszerű párhuzamos eltolással. (Ezt azért tehetjük meg, mert a Monge-projekció osztóviszony- és párhuzamosságtartó.) Így kapjuk az E, F és H pontok első és második képeit.

A szerkesztés végén a láthatóság szerinti ábrázolás maradt hátra. A kocka kontúrja mindig látszik – ez az első képen az $A'B'C'G'H'E'$ hatszög. Felhasználva a kocka geometriai jellegét, fedőpontok helyett most elég pusztán két (nem fedő)pont láthatósági helyzetéről dönteni. Az első képen vagy az F vagy a D pont van magasabban, a második képet vizsgálva nyilvánvalóan az F pont látszik. A második kép esetében is hasonlóan járunk el, ott a kontúr az $A''D''C''G''F''E''$, továbbá a H és B pontok közül a H pont látható.

Gyakorló feladatok

1. Szerkesszünk tetszőleges síkon álló szabályos hatszög alapú egyenes gúlát, ahol a hatszög oldalai 3 cm hosszúságúak, a gúla magassága 6 cm!

2. Szerkesszünk tetszőleges síkon álló szabályos háromszög alapú egyenes hasábot, ahol a háromszög oldalai 4 cm hosszúságúak, a gúla magassága 7 cm!

3. Szerkesszünk tetszőleges síkon álló szabályos ötszög alapú egyenes gúlát, ahol az ötszög oldalai 3 cm hosszúságúak, a gúla magassága 4 cm!

4. Szerkesszünk tetszőleges síkon álló, 5 cm oldalhosszúságú szabályos tetraédert!

2.8. Képsíktranszformáció

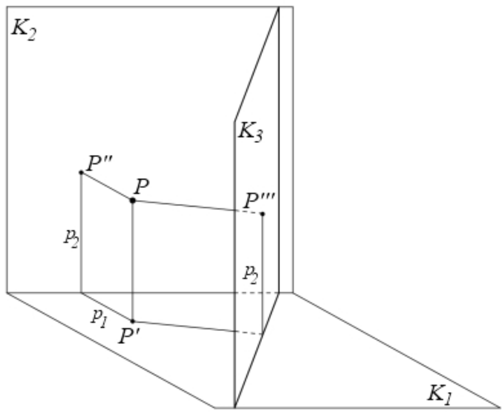
A *képsíktranszformáció* célja, hogy új képsík(ok) bevezetésével egy általános helyzetű objektumot speciális helyzetbe hozzunk, vagy fordítva.

Új képsík bevezetése: Egy első vagy egy második vetítősíkot kinevezünk új képsíknak, majd erre a vetítősíkra merőlegesen vetítjük az objektum pontjait. Ezután elhagyjuk azt a képsíkot, amelyre vonatkozóan az új képsík nem vetítősík helyzetű. Egy tetszőleges P pontnak ekkor egy *harmadik képe* keletkezik, amelyet P'''-vel jelölünk. További képsíkok analóg módon vezethetők be, egy P pont *negyedik, ötödik stb. képe* a $P^{IV}, P^{V}, \ldots$ pont.

Megjegyzés: A szakirodalom a harmadik képsík elnevezést fenntartja a profilsíkok elnevezésére, így egy tetszőleges új képsík számozása általában 4-től indul.
(Jelen jegyzet nem követi ezt a hagyományt.)

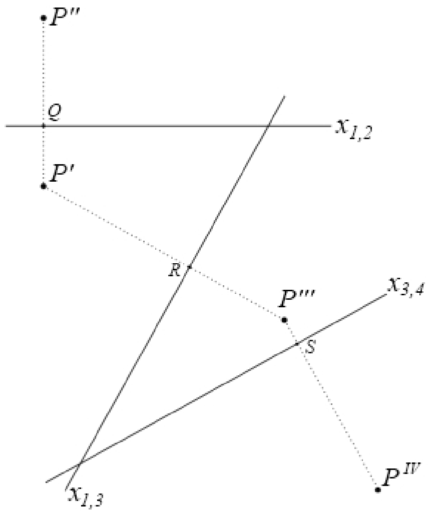
Pont transzformációja

Egy tetszőleges P pont esetén, ha azt például egy első vetítősíkra (a leendő K_3 harmadik képsíkra) vetítjük, egy P'''-vel jelölt új képét kapjuk, ahol a P''' távolsága a K_1 képsíktól megegyezik a P K_1-től való távolságával ($d(P''', K_1) = d(P, K_1) = |p_2|$).
A P''-t *elmaradó kép*nek, p_1-gyel jelölt szakaszt *elmaradó rendező*nek nevezzük.



Alapfeladat: Legyen adott egy P pont két képével. Vezessünk be egy tetszőleges harmadik, majd egy negyedik képsíkot, és határozzuk meg a P''' és P^{IV} képeket!

Megoldás: Vegyünk fel egy tetszőleges $x_{1,3}$ új képsíktengelyt, ezzel már megadtuk a K_3 új képsík helyzetét (K_3 egy első vetítősík, első nyomvonala éppen $x_{1,3}$).
Állítsunk merőlegest P'-ből $x_{1,3}$-ra, ez az új rendező. Az előző bekezdésben mondottak értelmében: $d(P''', K_1) = d(P'', K_1) = d(P'', Q) = d(P''', R)$. E szakasz átmásolásával a rendezőből kimetszhetjük a P''' új képet. (A $\overline{P'Q}$ szakasz az elmaradó rendező.)



Hasonlóan járunk el egy negyedik kép esetében is. – Tetszőleges $x_{3,4}$ képsíktengelyt felvéve adott az új, negyedik képsík. Most az első képeket hagyjuk el, így az elmaradó rendező a $\overline{P'''R}$ szakasz. Az átmásolandó rendező pedig a $\overline{P'R}$ szakasz: $d(P', R) = d\left(P^{IV}, S\right)$.

Egyenes transzformációja

Egy egyenest két pontjával transzformálhatjuk. Alkalmas új képsíkok bevezetésével
- (első lépésben) egy egyenes képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozható,
- (második lépésben) egy egyenes képsíkra merőleges (vetítő) helyzetbe hozható.

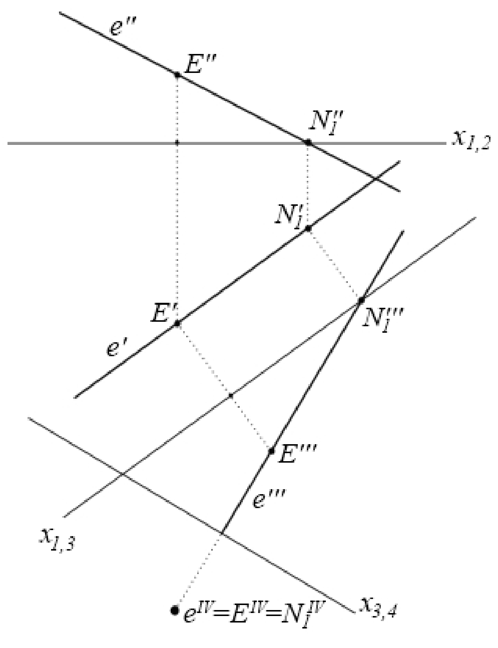
Ezekkel a lépésekkel elérhető, hogy például egy egyenest valódi nagyságban lássunk (első lépés). A vetítősugár helyzetű egyenesek esetében (második lépés) könnyen szerkeszthetőek például egy mértani testtel alkotott metszéspontjai.

Alapfeladat: Adott egy egyenes két képével. Alkalmas új képsíkokat bevezetve, hozzuk az egyenest vetítő helyzetbe!

Megoldás: Az egyenest két tetszőleges pontjával transzformáljuk, legyenek ezek most az E pont és az egyenes N_1 első nyompontja. Mivel az előző alfejezetben már megismerkedtünk a pont transzformációjával, ezért csupán arról kell nyilatkozni, hogy milyen helyzetű legyen a két új képsíktengely.

1. lépés: Egy egyenes párhuzamos egy képsíkkal, ha valamely képe párhuzamos a képsíktengellyel. – Legyen ezért $x_{1,3}$ olyan, hogy $e' \| x_{1,3}$ teljesüljön. (A közöttük lévő távolság nem lényeges.) Ekkor az e egyenes az új K_3 képsíkkal párhuzamos. Az ismert szerkesztéssel kapjuk E''', N_1''' majd e''' képeket.

2. lépés: Egy egyenes vetítőegyenes, ha egyik képe merőleges a képsíktengelyre, másik képe egy ponttá fajul. – Állítsunk merőlegest (tetszőleges pontból) az e''' egyenesre, ez lesz az $x_{3,4}$ új képsíktengely (ezzel a K_4 adott és rá merőleges az e). Az átmásolandó rendezők egyforma hosszúságúak és egyetlen (rendező)egyenesen helyezkednek el, így fajul ponttá az $e^{IV}(= E^{IV} = N_1^{IV})$ kép.



Sík transzformációja

Egy síkot szintén pontjai segítségével transzformálunk. Tetszőleges helyzet esetén 3 pontjával kell meghatározni az új képeket, ha azonban rendelkezésre állnak a nyomvonalak (mint a sík egyenesei), úgy kevesebb pont is elég. (Felhasználva, hogy a nyomvonalak a képsíktengelyen metszik egymást.) Alkalmas új képsíkok bevezetésével
- (első lépésben) egy sík képsíkra merőleges (vetítő) helyzetbe hozható,
- (második lépésben) egy sík képsíkkal párhuzamos helyzetbe hozható.

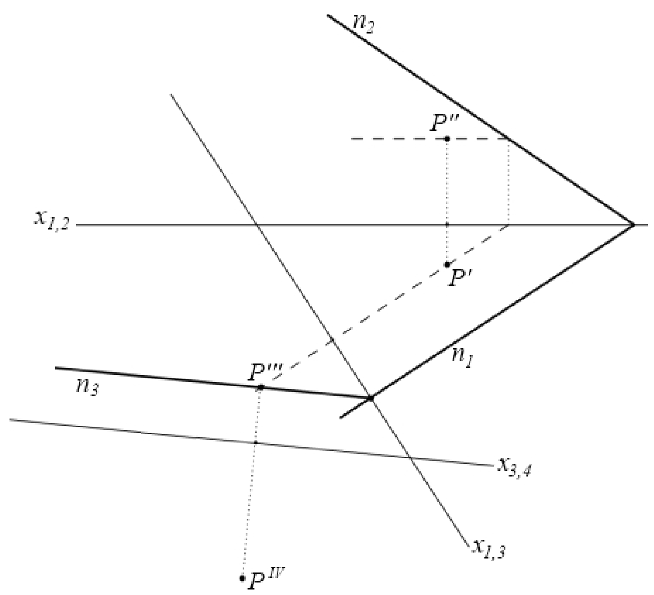
Ezekkel a lépésekkel elérhető, hogy például egy sík és egy mértani test metszetét egyszerűbben szerkeszthessük (első lépés). Egy képsíkkal párhuzamos sík esetében pedig a megfelelő képen mindent valódi nagyságban látunk (második lépés).

Alapfeladat: Adott egy sík nyomvonalaival. Alkalmas új képsíkok bevezetésével hozzuk a síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe!

Megoldás: Vegyük fel a sík egy tetszőleges P pontját. A szerkesztésből nyilvánvaló lesz, hogy elég csupán ezt az egyetlen pontot transzformálni (a már jól ismert módon).

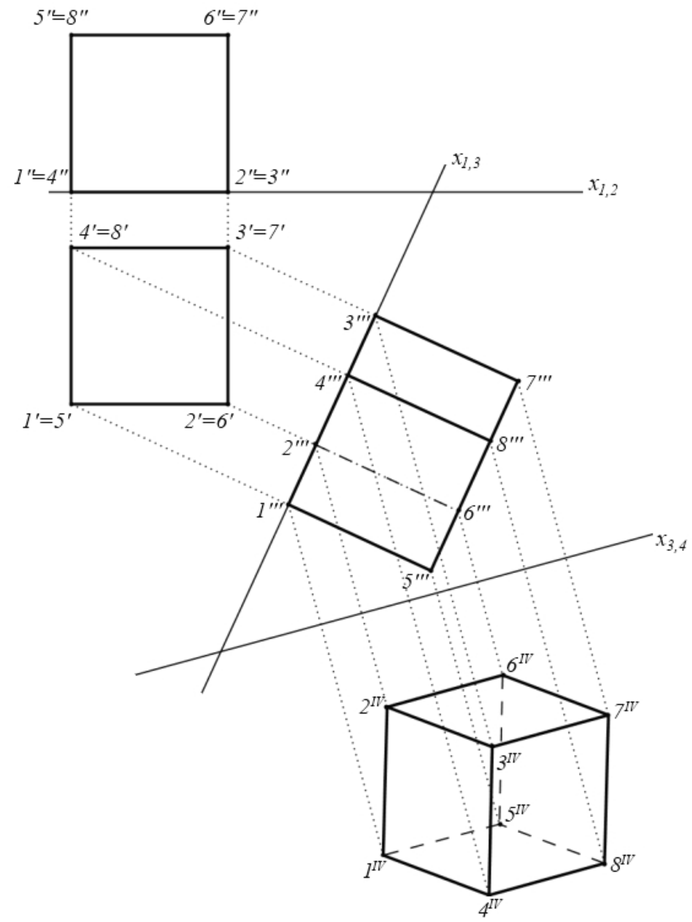
1. lépés: Egy sík merőleges egy képsíkra, ha valamely nyomvonala merőleges a képsíktengelyre. – Tekintsük az n_1 nyomvonalat és állítsunk rá tetszőleges pontból merőlegest. Így kapjuk az $x_{1,3}$ új képsíktengelyt (a térben ezzel megadtuk a K_3 képsíkot, erre merőleges a nyomvonalakkal adott sík). A P pont harmadik képe P'''. A sík merőleges a K_3 harmadik képsíkra, ezért egy (harmadik) vetítősíkot kaptunk. A vetítősíkokat az jellemzi, hogy az egyik képen minden pontjuk és egyenesük egy egyenesben (a nyomvonalban) látszik. Adott a P''' pont és az n_1 metszéspontja az $x_{1,3}$-mal, ezek adják a keresett n_3 harmadik nyomvonalat.

2. lépés: Ha egy sík képsíkkal párhuzamos, akkor egyik nyomvonala párhuzamos a képsíktengellyel, a másik nyomvonala eltűnik. – Vegyünk fel egy tetszőleges, n_3-mal párhuzamos egyenest, így kapjuk az $x_{3,4}$ képsíktengelyt (és a K_4 új képsíkot). Az n_4 nyomvonal nem létezik, ezzel a sík párhuzamossá vált K_4-gyel. A P pontot a szokott módon transzformáljuk.



Fontos megjegyzés: A pont, egyenes és sík transzformációja ugyanúgy szerkeszthető akkor is, ha a K_1 képsíkot hagyjuk el az első lépésben.

Feladat: Adott egy K_1 képsíkon álló kocka, amelynek egyik oldala párhuzamos a K_2 képsíkkal. Szerkesztendő a kocka egy harmadik, majd egy negyedik képe (láthatóság szerint)!



Gyakorló feladatok

1. Szerkesszük meg egy tetszőleges pont harmadik és negyedik képét két új képsík bevezetésével úgy, hogy első lépésben a K_1 képsíkot hagyjuk el!

2. Hozzunk egy általános helyzetű egyenest képsíkra merőleges helyzetbe úgy, hogy első lépésben a K_1 képsíkot hagyjuk el!

3. Hozzunk egy általános helyzetű síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe úgy, hogy első lépésben a K_1 képsíkot hagyjuk el!

4. Szerkesszük meg az 1. számú feladatlapon található csonkolt kocka transzformált képét!

2.9. Árnyékszerkesztés

Tegyük fel, hogy adott egy fényforrás, továbbá egy vagy több objektum a térben, és meg szeretnénk határozni az objektumok összes lehetséges árnyékát.

3 árnyékoltsági fokozatot különbözhetünk meg:

(a) (a fény által) bevilágított részek,

(b) vetett árnyékban lévő részek (az egyik alakzat árnyéka rávetül egy másikra),

(c) önárnyékos részek (az objektum helyzetéből adódóan sötétben maradó részei).

Egy K_1 képsíkon álló kocka esetében például a fényforrás a kocka néhány lapját bevilágítja (a), más lapjait nem éri fény (c), míg a kocka árnyéka a képsíkokra esik (b).

A fényforrás lehet egy adott iránnyal párhuzamos, vagy származhat egy pontból mint centrumból. Az esetek többségében párhuzamos fényiránnyal dolgozunk.

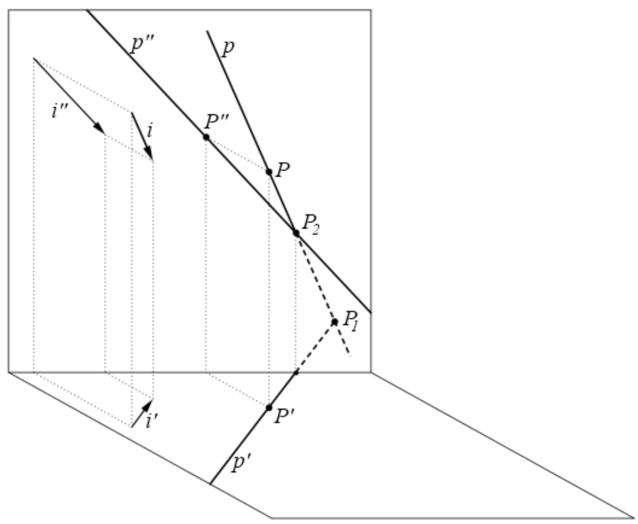
Árnyékszerkesztési feladatok esetében (a szemléletességet figyelembe véve) az I. térnegyedben lévő mértani alakzatoknak keressük az összes árnyékát. Emiatt az objektumok K_1 és K_2 képsíkok pozitív félsíkjaira vetett árnyékait biztosan meg kell szerkeszteni.

Pont árnyéka

Egy párhuzamos fényirányt ugyanúgy határozhatunk meg, mint egy egyenest, ezért két képével egyértelműen megadható.

Egy pontnak – általában – két lehetséges árnyéka van: a K_1, illetve a K_2 képsíkra eső árnyék, amelyeket *első és második árnyék*nak nevezünk.

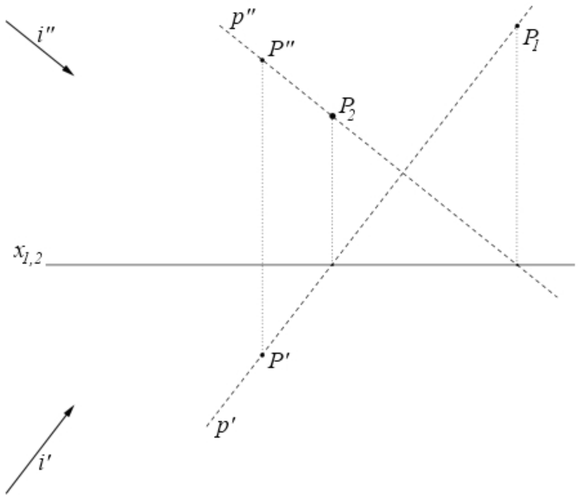
A pont árnyékai *a ponton át, a fényiránnyal húzott párhuzamos egyenes nyompontjai.*



Alapfeladat: Legyen adva egy i fényirány és egy P pont képeikkel. Szerkesztendő a pont képsíkokra vetett árnyéka!

Megoldás: Az előző észrevételt figyelembe véve húzzunk párhuzamost a P-n keresztül az i iránnyal (mint egyenessel), így kapjuk a p egyenest (p', p'').

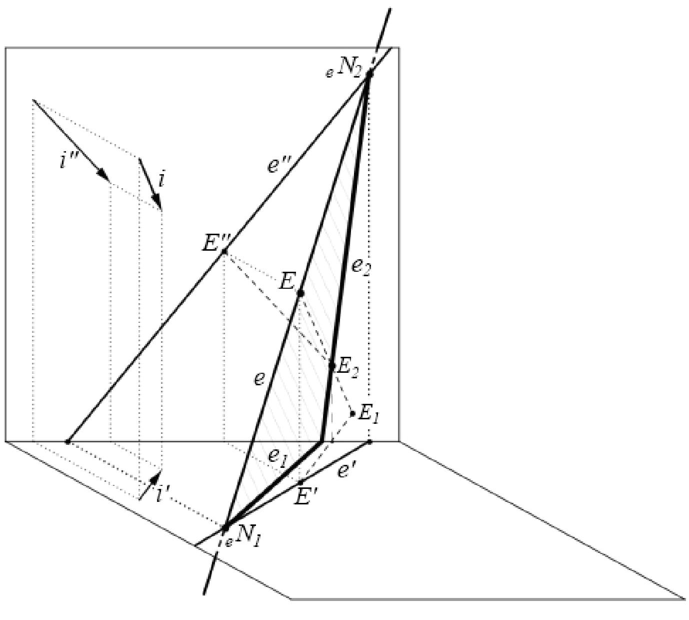
Határozzuk meg a p egyenes nyompontjait, amelyeket most P_1-gyel és P_2-vel jelölünk. A p egyenesnek a második nyompontja (P_2) az I. térnegyedbe esik, míg az első nyompontja a II. térnegyedbe. Ezért a P pont árnyéka a P_2 pont.



Egyenes árnyéka

Legyen adott ismét egy párhuzamos fényirány és egy egyenes. Az egyenes árnyékát *annak a síknak a nyomvonalai(nak adott szakaszai) adják, amely sík párhuzamos a fényiránnyal és tartalmazza az egyenest.*

Egy egyenes árnyékát két pontjának árnyékaival határozhatjuk meg. Ha rendelkezésre állnak az egyenes nyompontjai, akkor azoknak az árnyékai önmaguk, és így elegendő az egyenes egy tetszőleges pontjának árnyékát megszerkeszteni.



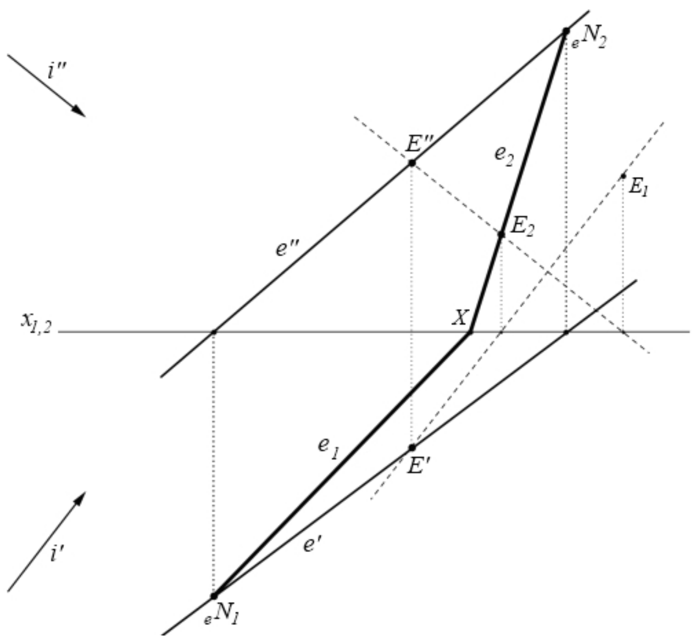
Alapfeladat: Adott egy i fényirány és egy e egyenes. Szerkesztendő az e egyenes képsíkokra vetett árnyéka!

Megoldás: Legyen E az egyenes egy tetszőleges pontja, és az előzőekben tárgyalt módon határozzuk meg ezen pont árnyékát: E_2 (az E_1 lehetséges árnyék nem az I. térnegyedben van).

Az E_2 az egyenes második árnyékának eleme, továbbá az ${}_eN_2$ nyompont árnyéka önmaga, így az egyenes második árnyékából két pontot ismerünk. Ezzel megkaptuk az e_2 második árnyékot. Ebből az egyenesből csak azt a szakaszt ábrázoljuk, amely az egyenes I. térnegyedbeli pontjainak árnyékait adja – ennek egyik végpontja az $x_{1,2}$-tengelyen van (X), a másik végpont az ${}_eN_2$ nyompont.

Ugyanígy járunk el az első árnyékok esetében is. Az ${}_eN_1$ nyompont egybeesik a saját árnyékával, ezt összekötve az E_1 első árnyékkal adódik az e_1 első árnyék. Ennek az I. térnegyedre vonatkozó része az ${}_eN_1$ nyomponttól az X pontig tart.

Az egyenes árnyéka az ${}_eN_1X\,{}_eN_2$ töröttvonal.

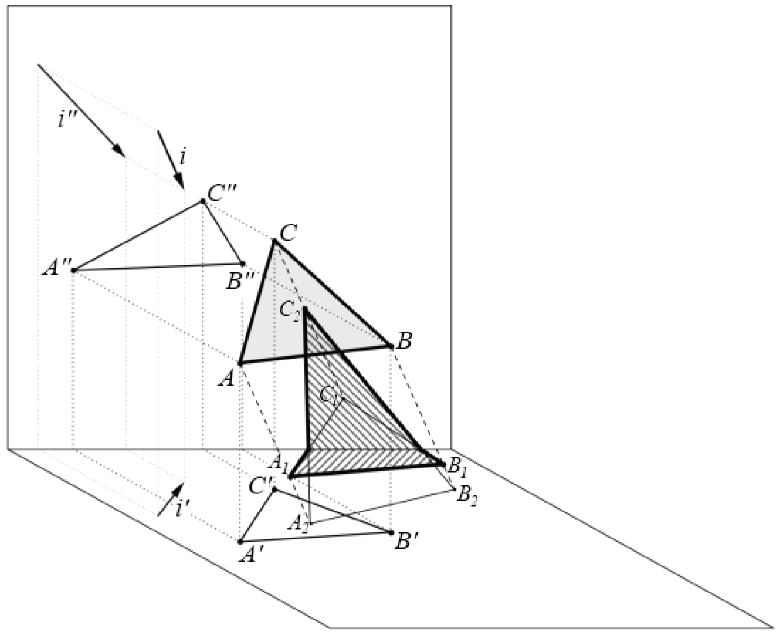


Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a példában tulajdonképpen a következő feladatot oldottuk meg: Adott egy i és egy e egyenes. Szerkesszük meg az e egyenest tartalmazó, i-vel párhuzamos sík nyomvonalait!

Sík (sokszög) árnyéka

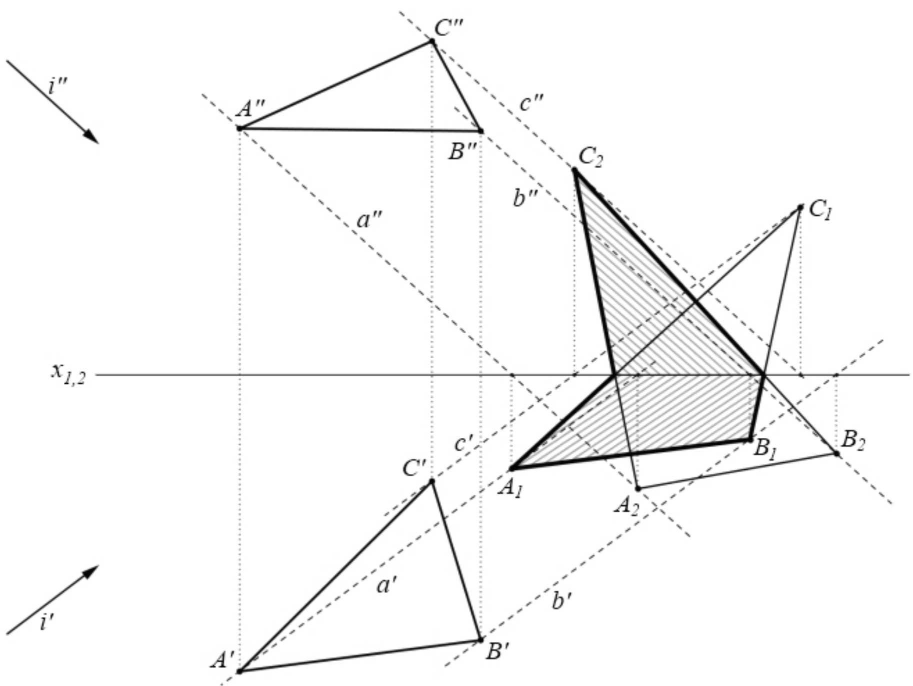
Egy tetszőleges, nyomvonalaival adott sík árnyékát nyilvánvalóan nem túl látványos megszerkeszteni. Egy sík árnyéka alatt itt egy síkbeli sokszög árnyékát értjük. A sokszög árnyékát a sokszög csúcspontjainak árnyékaival határozzuk meg.

Egy síkbeli sokszög két árnyéka között *tengelyes affinitás* van, ahol a tengely az $x_{1,2}$ képsíktengely, az irányt egy pont két árnyékát összekötő egyenes adja.
Azonnal látható az is, hogy a sokszög első/második képei és első/második árnyékai között is tengelyes affinitás van, ahol a tengely a sík első/második nyomvonala, az irány a fényirány első/második képe.



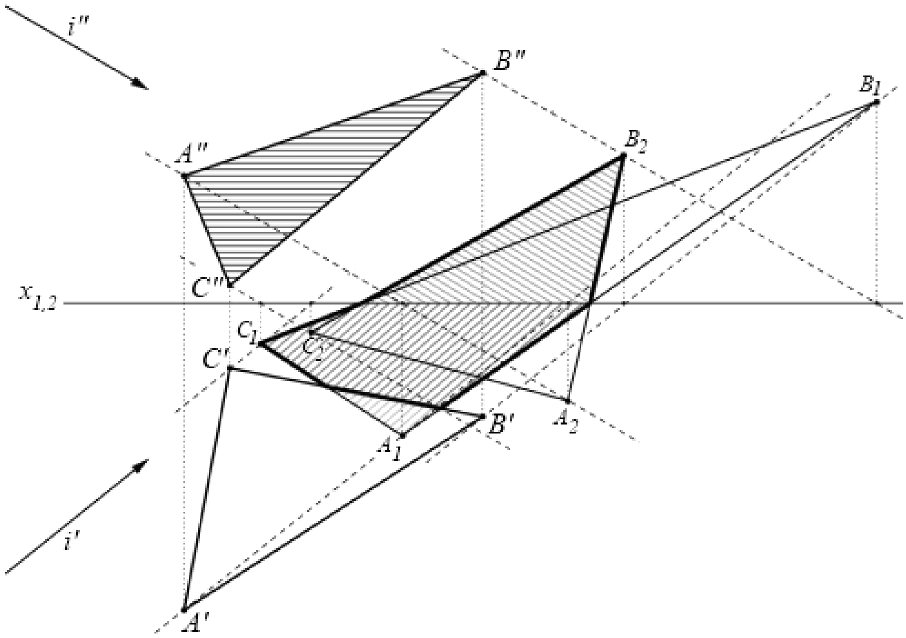
Alapfeladat: Legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszög két képével, valamint egy i fényirány! Határozzuk meg a háromszög összes árnyékát!

Megoldás: Szerkesszük meg az A, B és C pontok első és második árnyékát, így kapjuk az $A_1B_1C_1\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögeket. Az egyenes árnyékánál elhangzottak alapján az $\overline{AC}$ és $\overline{BC}$ oldalak árnyéka most két töröttvonal.



Az $ABC\triangle$ háromszögnek létezik egy, a fény által megvilágított oldala és egy *önárnyékos* oldala. Az önárnyékos oldal egyik képen sem látszik, mivel a háromszög dőlt(!) síkban van.

Ebből már az is következik, hogy *feszített síkbeli sokszög árnyékának szerkesztése során az egyik képen az önárnyékos oldal is látszik.* Az önárnyékot mutató kép az, amelyiknek a körüljárási iránya a hozzá tartozó árnyékkal ellentétes.
A következő ábrán egy feszített síkbeli háromszög árnyékát mutatjuk be, ahol a második képen az önárnyékos rész is látható. (Az $A''B''C''\triangle$ és $A_2B_2C_2\triangle$ háromszögek körüljárási iránya ellentétes.)



Gyakorló feladatok

1. Adott egy feszített síkbeli háromszög és egy fényirány. Szerkesztendő a háromszög összes árnyéka!

2. Adott egy dőlt síkbeli paralelogramma és egy fényirány. Szerkesztendő a paralelogramma képsíkokra vetett árnyéka!

3. Adott egy dőlt síkbeli háromszög és egy azt metsző egyenes, valamint egy fényirány. Szerkesztendő az összes árnyék!
   Útmutató: Elsőként szerkesszük meg a háromszög és az egyenes metszéspontját, azután pedig az összes képsíkra eső árnyékot.
   A feladatnak a nehézsége az, hogy meg kell szerkeszteni az egyenes háromszögre eső árnyékát is. A keresett árnyék egy szakasz a háromszögön, amelynek egyik végpontja a metszéspont. A másik végpontját az árnyékok mutatják meg. A háromszög árnyékából egy ponton „kilép” az egyenes árnyéka, ezt a pontot visszavetítve a háromszög megfelelő oldalára megkapjuk a keresett (árnyék)szakasz másik végpontját. (Két ilyen lehetséges pont van, de a szerkesztésből és a láthatóságból evidens, hogy melyik a jó.)

4. Adott egy K_1 képsíkon álló a oldalhosszúságú kocka és egy fényirány. Szerkesztendő a kocka összes árnyéka!

2.10. Síklapú testek metszése egyenessel

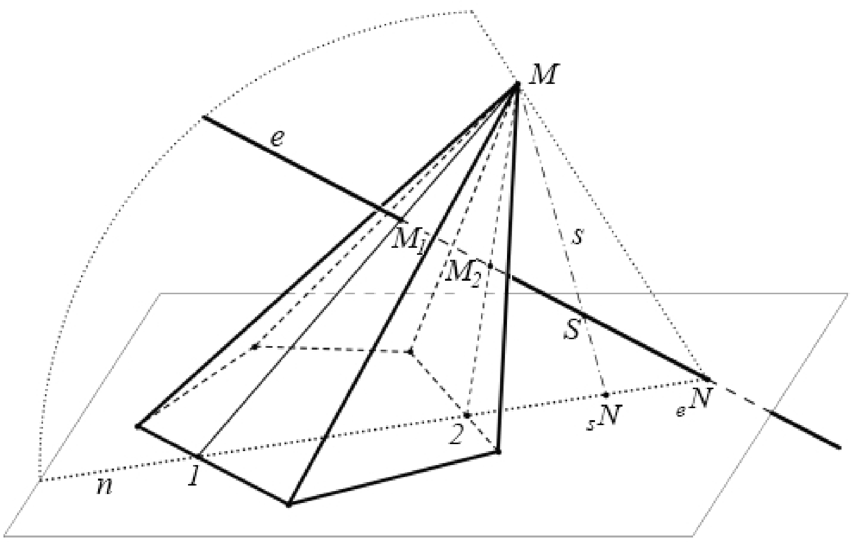
A következőkben két tipikus síklapú test – a gúla és a hasáb – egyenessel való metszését szerkesztjük meg.

Gúla metszése egyenessel

Legyen adott egy ferde gúla, amelynek alapja a K_1 képsíkban fekszik, a csúcsa egy M pont, és egy általános helyzetű, a gúla csúcsát nem tartalmazó e egyenes. Keressük a gúla és az egyenes közös pontjait (0, 1 vagy 2 metszéspont létezik).

Egyik megoldás az lehet, ha tekintjük a gúla összes oldalát és mindegyiket elmetsszük az egyenessel (lásd fedőegyenespárok módszere). Ez a gondolatmenet azonban például egy 27 oldalú gúla esetében nagy munkát ró a megoldóra. Ezért másképpen járunk el.

Egy másik megoldás a következő: Tekintsük azt a síkot, amely tartalmazza az e egyenest és a gúla M csúcspontját is. (Ilyen sík mindig létezik, ugyanis egy pontnak és egy arra nem illeszkedő egyenesnek van közös síkja.) Ennek a síknak a nyomvonala elmetszi a gúla alapját 0, 1 vagy 2 pontban. (Az ábrán ezek az *1* és a *2* metszéspontok.) Ezeket a metszéspontokat összekötve a gúla csúcsával 0, 1 vagy 2 (gúla)alkotót kapunk. Ezen az alkotók benne vannak az $[e, M]$ síkban, ezért – ha létezik metszéspont, akkor – e-vel metsző helyzetűek. Az így kapott metszéspontok rajta vannak az egyenesen is és a gúlán is, ezért ezek éppen a keresett közös pontok. (Az ábrán az M_1 és M_2 pontok.)



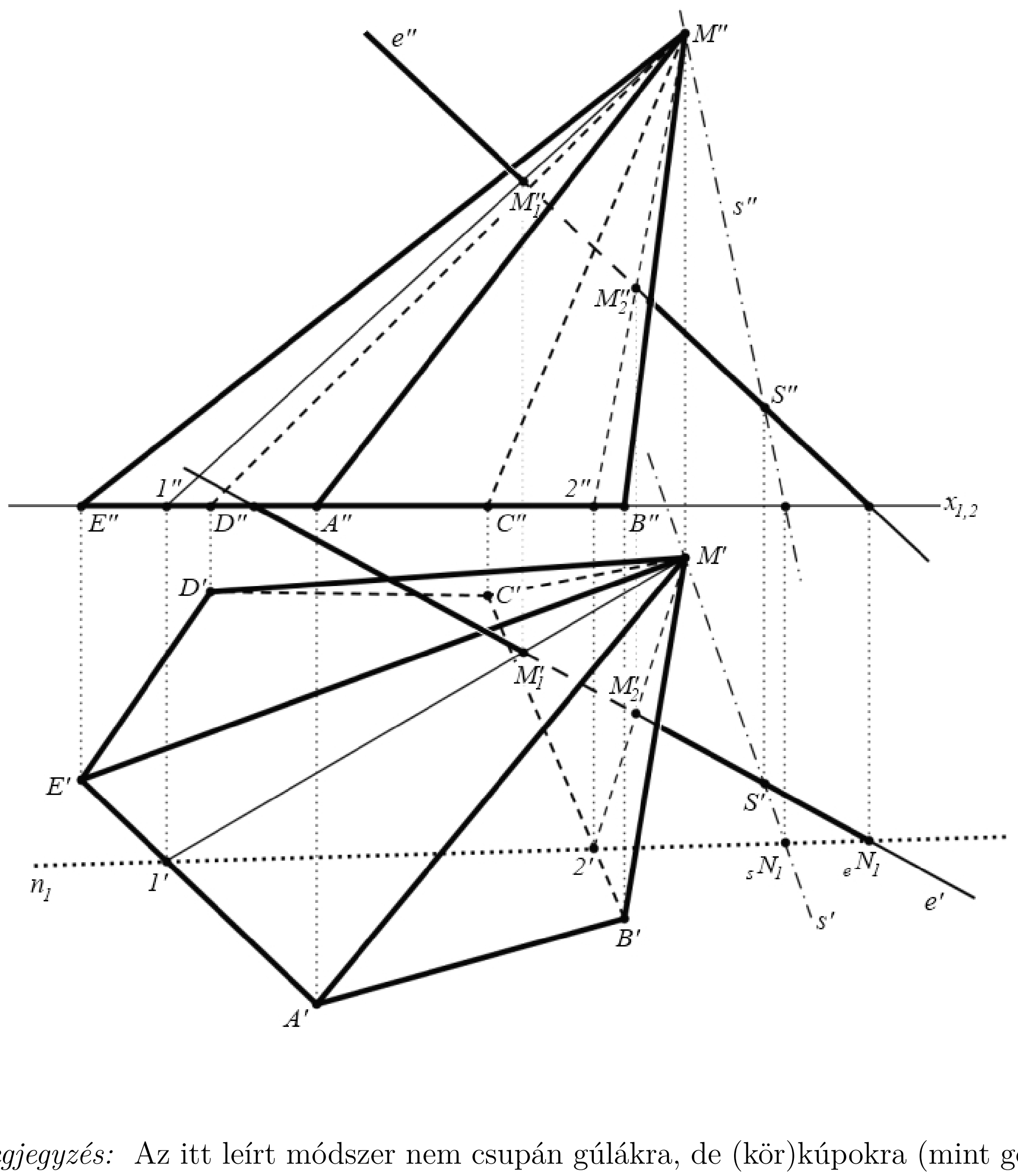
Oldjuk meg a fenti feladatot Monge-projekcióban:

Alapfeladat: Adott egy ötszög alapú ferde gúla, amelynek alapja K_1-ben fekszik és egy e egyenes. Szerkesztendő (láthatósággal együtt) az egyenes gúlával való metszése!

Megoldás: A fent leírt térgeometriai ötlethez meg kell szerkeszteni a gúla M csúcsának és az e egyenesnek a közös síkját.

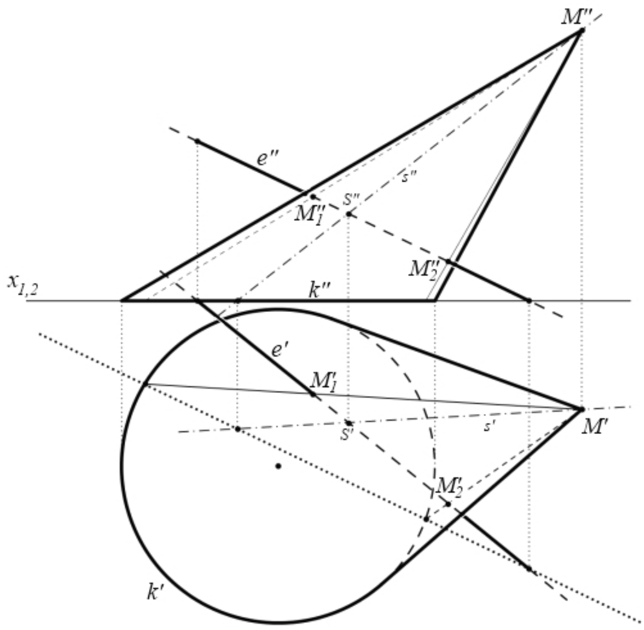
Tekintsünk egy tetszőleges S (segéd)pontot az e-n, majd határozzuk meg az $\overleftrightarrow{MS} = s$ (segéd)egyenest. Az s nyilvánvalóan benne van az $[M, e]$ síkban, ezért az ${}_sN_1$ első nyompontja eleme az $[M, e]$ sík n_1 első nyomvonalának. Az is igaz még, hogy az n_1-re illeszkedik az ${}_eN_1$ is, így a két első nyompontból kapjuk a keresett első nyomvonalat: $\overleftrightarrow{{}_sN_1\,{}_eN_1} = n_1$.

Az n_1 nyomvonal két pontban metszi a gúla (K_1-beli) alapját: az $1'$-vel és $2'$-vel jelölt pontokban. Az ehhez tartozó alkotók első képei az $\overline{M'1'}$ és az $\overline{M'2'}$ szakaszok. Az $\overline{M1}$ és $\overline{M2}$ már az $[M, e]$ síkban vannak, ezért metszéspontjuk az e-vel kijelölhető: $\overline{M'1'} \cap e' = \{M_1'\}$ és $\overline{M'2'} \cap e' = \{M_2'\}$. Rendezővel az e''-re vetítve adódnak M_1'' és M_2'' pontok. Az M_1 és M_2 pontok a keresett metszéspontok.
(Végül láthatóság szerint kihúzzuk a rajzunkat.)



Megjegyzés: Az itt leírt módszer nem csupán gúlákra, de (kör)kúpokra (mint görbelapú testekre) is igaz. Ott a kúp csúcspontja és az egyenes közös síkját tekintjük, ennek a nyomvonala a kúp alapkörét metszi, így kapjuk a síkban fekvő kúpalkotókat.

Érdekességként, a szerkesztés részletezése nélkül az egyenes és a kúp metszéspontjainak meghatározása a következő:

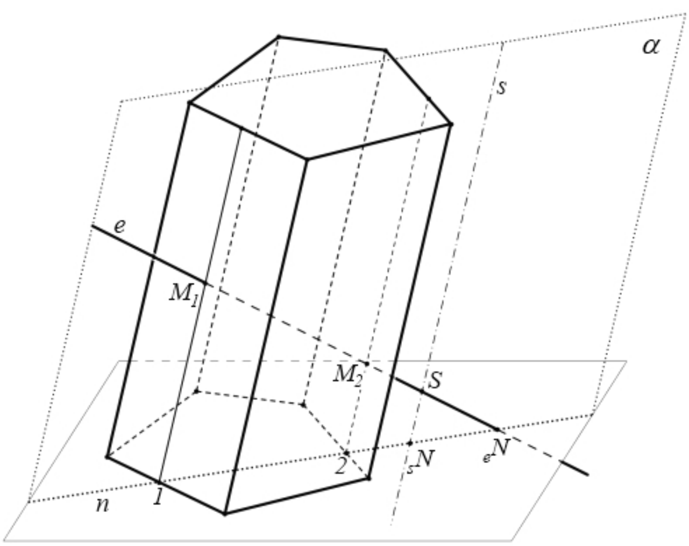


Hasáb metszése egyenessel

A gúla esetében elmondottakat átvihetjük a hasábok esetére is, amennyiben a hasábot olyan speciális gúlának tekintjük, amelynek a csúcspontja egy végtelen távoli pont.

Legyen adott egy ferde hasáb, amelynek alapja a K_1 képsíkban fekszik és egy tetszőleges e egyenes.

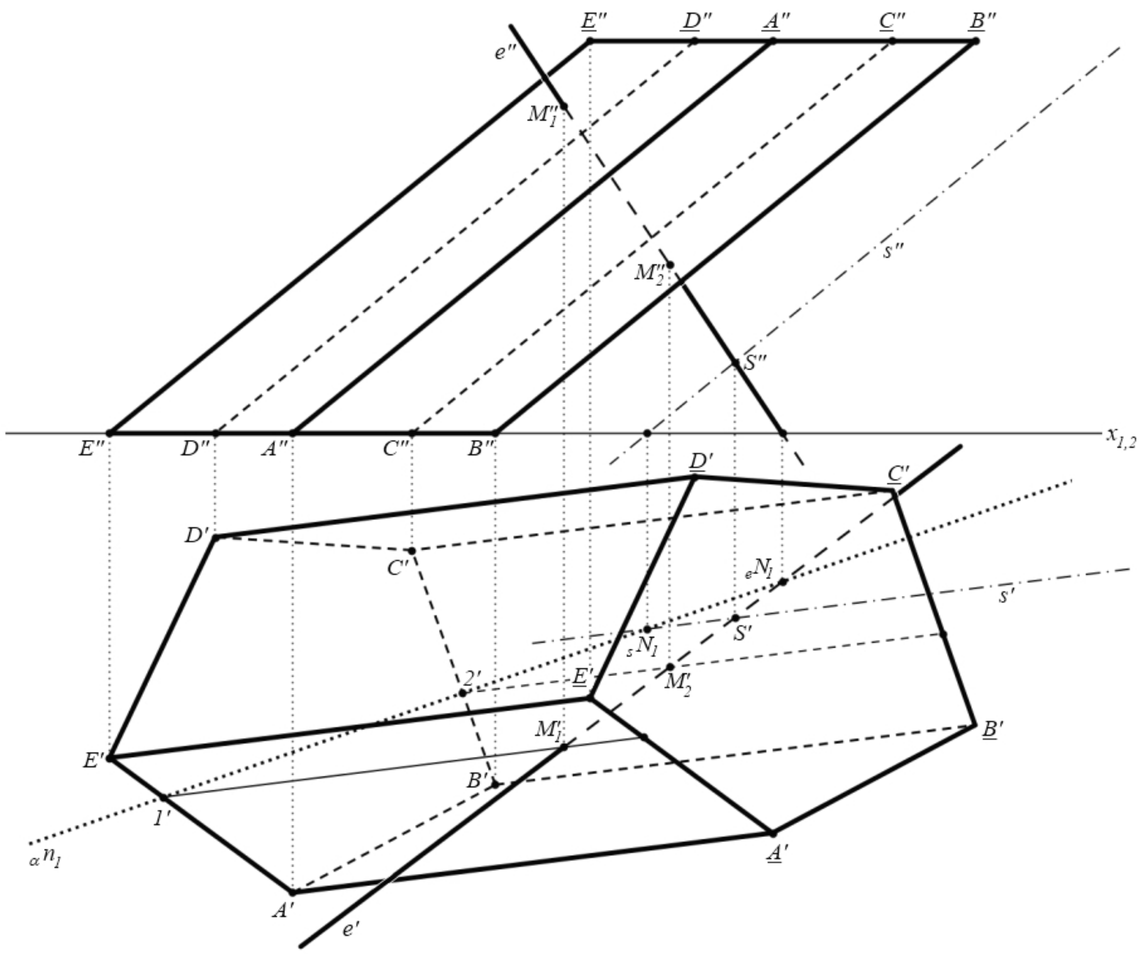
Tekintsük azt a síkot, amely párhuzamos a hasáb alkotóival és illeszkedik az e-re (α). Ennek a síknak az első nyomvonala (legfeljebb) két pontban metszi az alapsokszöget. (Az ábrán ezek az *1* és *2* pontok.) Ezekből a metszéspontokból indított hasábalkotók benne vannak az α síkban és metszik az e egyenest az M_1 és M_2 pontokban. Ezek a pontok a keresett metszéspontok.



Alapfeladat: Adott egy ötszög alapú ferde hasáb, amelynek alapja K_1-beli, valamint egy e egyenes. Szerkesztendőek (láthatósággal együtt) a közös pontok!

Megoldás: Legyen a hasáb alapja az $ABCDE$ ötszög, a fedőlapja az $\underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}\,\underline{D}\,\underline{E}$. Elsőként itt is azt a síkot kell meghatározni, amely párhuzamos a hasáb alkotóival és illeszkedik e-re.
Tekintsük az e tetszőleges S (segéd)pontját, és húzzunk párhuzamost S-en át a hasáb alkotóival: s (segéd)egyenes. Így az s benne van az e-t tartalmazó, hasábalkotókkal párhuzamos α síkban. Ennek az ${}_\alpha n_1$ nyomvonala meghatározható az e és az s első nyompontjaival: $\overleftrightarrow{{}_eN_1\,{}_sN_1} = {}_\alpha n_1$.

Az ${}_\alpha n_1$ két pontban metszi az $ABCDE$ alapot: *1* és *2*. Ezekhez az alapbeli pontokhoz tartozó hasábalkotók az α síkban vannak, emiatt e-vel metsző helyzetűek. A két alkotó és az e metszéspontjai az M_1 és M_2 pontok. E pontok első képeit azonnal meghatározhatjuk: M_1' és M_2'. Innen rendezővel kapjuk a második képeket (M_1'' és M_2''). A gúlánál elmondottak itt is érvényben maradnak, az M_1 és M_2 pontok rajta vannak a hasáb felszínén is és az egyenesen is, ezért ezek a keresett metszéspontok.



Ha a szerkesztésünk pontos, akkor az 1-ből/2-ből induló hasábalkotó második képe, az e'' és az M_1'-ből/M_2'-ből induló rendező egy pontban metszi egymást: az M_1''/M_2'' pontban. (Nyilvánvaló, hogy ugyanez igaz a gúla esetére is.)

Megjegyzés: Gúla és hasáb egyenessel történő metszését hasonlóan oldjuk meg akkor is, ha az alapsokszög nem K_1-ben, hanem K_2-ben vagy tetszőleges síkban fekszik. Az első nyomvonal szerepét ekkor a második nyomvonal vagy az alap síkjának és az $[M, e]$ síknak a metszésvonala veszi át.

Gyakorló feladatok

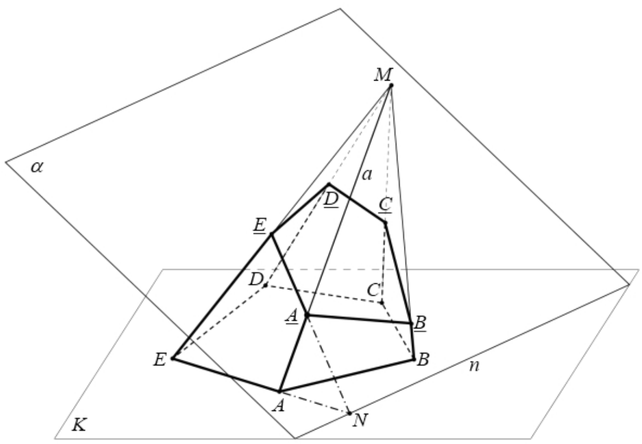
1. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde gúla és egy első vetítőegyenes. Szerkesztendőek a metszéspontok!
2. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde hasáb és egy második vetítőegyenes. Szerkesztendőek a metszéspontok!
3. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde gúla és egy, a csúcsára nem illeszkedő egyenes. Szerkesztendőek a metszéspontok!
4. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde hasáb és egy egyenes. Szerkesztendőek a metszéspontok!
5. *(nehezebb feladat)* Adott egy tetszőleges képsíkon álló ferde gúla és egy csúcsán át nem menő egyenes. Szerkesszük meg a gúla és az egyenes közös pontjait!

2.11. Síklapú testek metszése síkkal

Gúla metszése síkkal

Legyen adott egy ferde gúla (amelynek alapja a K_1 képsíkban van), egy azt metsző sík és keressük a síkmetszetet.

Elsőként az juthat eszünkbe, hogy a gúla minden egyes alkotójával elmetsszük a síkot, így kaphatjuk meg a keresett metszetet. Azonban ez a megoldás nem optimális.



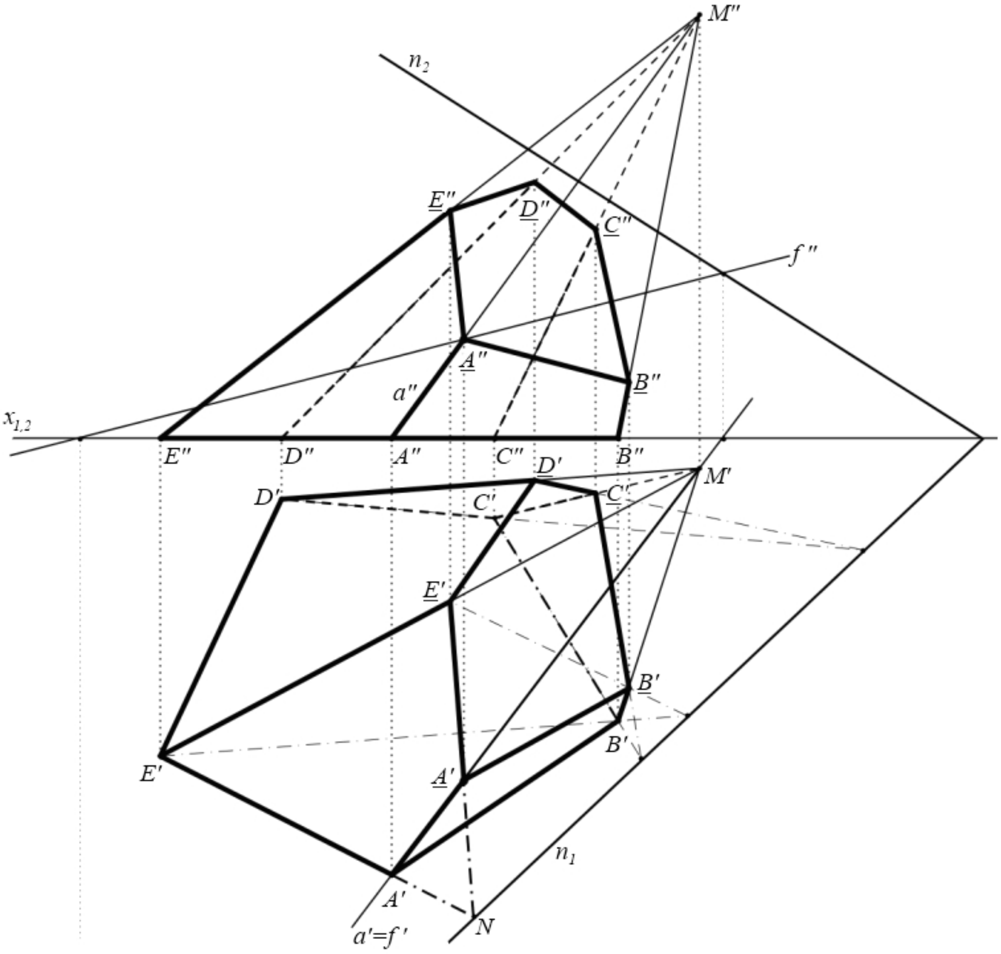
Vegyük észre, hogy *a gúla alapja és a síkmetszet között centrális kollineáció van*, amelynek tengelye a nyomvonal (mint a sík és az alap síkjának metszésvonala), a centrum a gúla csúcspontja. Ezt a (síkok közötti) centrális kollineációt a K_1-re történő merőleges vetítés egy másik centrális kollineációba viszi át a K_1-ben – a tengely az n_1

nyomvonal, a centrum a gúla csúcspontjának első képe (M'), megfelelő pontpárokat az alap és a síkmetszet első képei adnak.

Ezt felhasználva a megoldás a következő: Válasszuk ki a gúla egy tetszőleges alkotóját, és keressük meg a metszéspontját a síkkal. Ezzel megadtuk a centrális kollineáció egy megfelelő pontpárját, a többi metszéspontot a kollineációval nyerjük.

Alapfeladat: Legyen adott egy ferde gúla, amelynek alapja a K_1 képsíkban van, valamint egy, a gúlát metsző sík. Szerkesszük meg a síkmetszetet!

Megoldás: A fent említett geometriai ötlet segítségével, válasszuk ki a gúla egy tetszőleges alkotóját és metsszük el azzal a síkot. Legyen ez az alkotó az $\overline{AM} = a$ alkotó. Fedőegyenespárok módszerével a metszéspont az $\underline{A}$ pont.



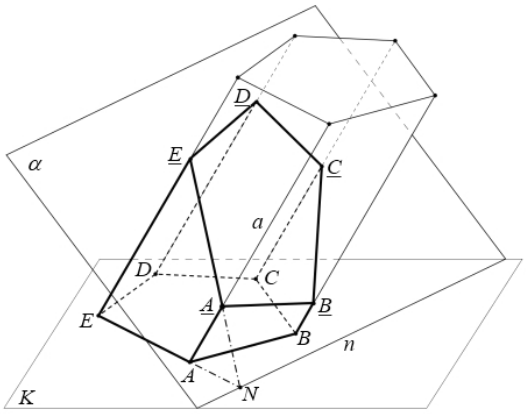
A gúla alapja és a síkmetszet első képe közötti centrális kollineációt felhasználva (tengely: n_1, centrum M', megfelelő pontpár $(A', \underline{A}')$) megszerkesztjük a síkmetszet többi pontjának első képét: $\underline{B}', \underline{C}', \underline{D}', \underline{E}'$. Az $\underline{E}'$ pontot például az N-nel jelölt fixpont (nyompont) segítségével kaptuk.

A síkmetszet első képének ismeretében a második képek is azonnal adódnak – egyszerűen rendezőkkel „felvetítjük” a metszéspontokat a megfelelő alkotókra.

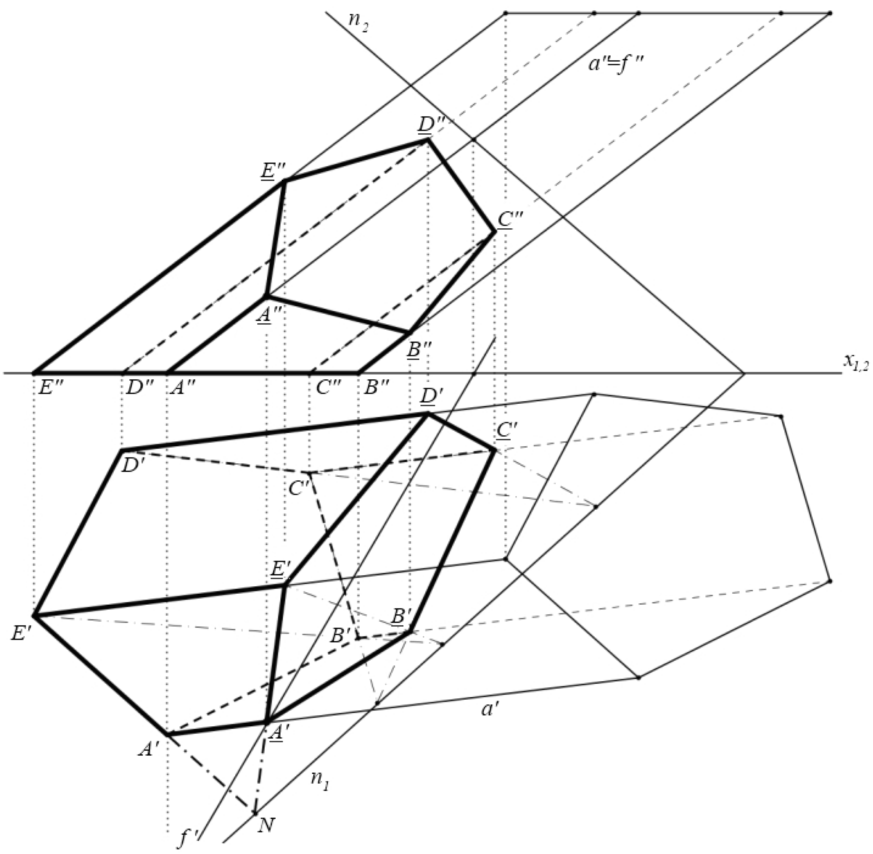
Végül láthatóság szerint kihúzzuk az ábrát. (Ilyenkor általában a gúla sík által „levágott” részét nem ábrázoljuk.)

Hasáb metszése síkkal

Egy tetszőleges, K_1-en álló ferde hasáb síkmetszetét a gúlánál látottakhoz hasonlóan szerkeszthetjük meg. A különbség az, hogy itt *a hasáb alapja és a síkmetszet között* (síkok közötti) *tengelyes affinitás van* – a tengely a sík nyomvonala, az irány a hasábalkotók iránya. Ez a tengelyes affinitás az első képen egy másik tengelyes affinitássá fajul: a tengely a sík első nyomvonala, az irány a hasábalkotók első képeinek iránya, megfelelő pontpárokat az alap és a síkmetszet első képei adnak.



Alapfeladat: Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde hasáb és egy azt metsző sík. Szerkesztendő a síkmetszet!



Megoldás: Az eddigiek ismeretében a szerkesztés igen egyszerű. Válasszuk ki a hasáb egy alkotóját ($\overline{AM} = a$), és metsszük el a síkkal (ahol f egy második fedőegyenes). Így kapjuk az $\underline{A}$ pont két képét.

A fennmaradó metszéspontok első képeit az előbb említett tengelyes affinitással kapjuk, például az $\underline{E}'$ pontot az $(A', \underline{A}')$ pontpár és az N fixpont (nyompont) felhasználásával határoztuk meg.

A második képeket rendezőkkel, a megfelelő alkotókra vetítve kapjuk. Végül láthatóság szerint kihúzzuk a rajzot.

Megjegyzés: Könnyen látható, hogy az említett megoldások akkor is alkalmazhatóak, ha a gúla/hasáb alapja K_2-beli vagy tetszőleges síkbeli.

Gyakorló feladatok

1. Legyen adott egy K_1 képsíkon álló ferde gúla és egy második vetítősík. Szerkesztendő a síkmetszet!

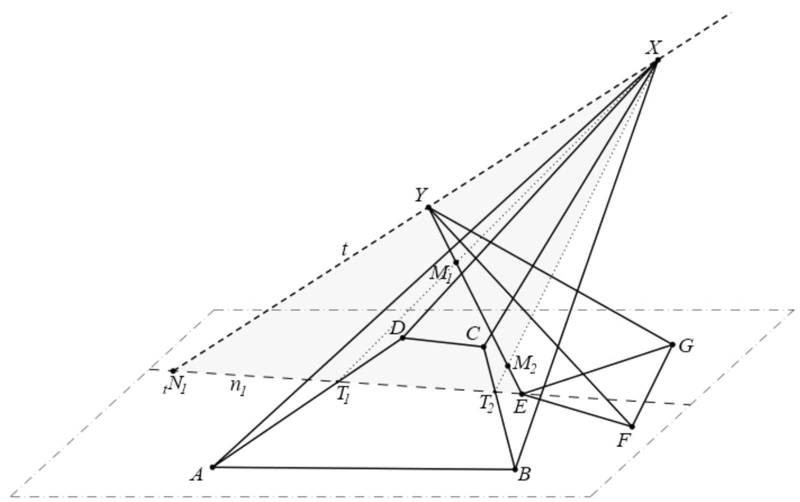
2. Legyen adott egy K_2 képsíkon álló ferde hasáb és egy azt metsző sík. Szerkesztendő a síkmetszet!

3. *(nehezebb feladat)* Adott egy tetszőleges képsíkon álló ferde gúla és egy másik, a gúlát metsző sík. Szerkesszük meg a gúla és a sík közös pontjait!

2.12. Síklapú testek áthatása

Amennyiben két mértani test közös pontjait szeretnénk meghatározni, akkor azt mondjuk, hogy a két test áthatási pontjait keressük.
Alapfeladat: Legyen adott két gúla, amelyek alapjai a K_1 képsíkon vannak. Szerkesztendő a két gúla összes közös pontjának halmaza!
Természetes gondolatként merül fel, hogy fixnek tekintve az egyik gúlát, elmetsszük azt a másik gúla alkotóival és fordítva – ez azonban időigényes megoldás.

A feladatot az ún. *lengősíkok módszeré*vel oldhatjuk meg.



Legyen a két gúla csúcspontja az X, illetve az Y pont, ezek közös egyenese legyen a t-vel jelölt (tartó)egyenes. Tekintsünk egy olyan síkot, amely tartalmazza a t egyenest és az egyik gúla alapjának egy csúcspontját (az ábrán az E pontot). Az ilyen tulajdonságú síkot *lengősík*nak nevezzük.
Könnyen látható, hogy ez a sík mindkét gúlából egyeneseket metsz ki: az X csúcspontú gúlából az $\overline{XT_1}$ és $\overline{XT_2}$ alkotókat, az Y csúcspontú gúlából az $\overline{YE}$ alkotót. Mivel ez a három alkotó egy síkban van, ezért páronként vett metszéspontjaik kijelölhetőek: M_1 és M_2. Ez a két metszéspont mindkét gúlán rajta van – így találtunk két *áthatási pont*ot.

A szerkesztést megkönnyíti, hogy mindkét gúla a K_1-en áll, ezért a lengősíkok első nyomvonalait egyszerűen meg tudjuk határozni: a tartóegyenes ${}_tN_1$ első nyompontját összekötve a gúlák alapjainak csúcspontjaival megkapjuk az összes (áthatás szempontjából lényeges) lengősík első nyomvonalát. (A részleteket lásd a következő két példában.)
Amennyiben meghatároztuk az összes fent említett metszéspontot, azokat összekötve az *áthatási töröttvonal(ak)*hoz jutunk.

Két test áthatása kétféle lehet: *teljes áthatás* és *bemetszés*. Az első esetben az egyik test „átfúrja” a másikat, míg a második esetben az egyik test „belemar” a másikba.

A jegyzetben bemutatjuk egy hasáb és egy gúla, illetve két hasáb áthatását. Javasoljuk, hogy a következő két példa áttanulmányozása után az Olvasó önállóan szerkessze meg két gúla áthatását.

Alapfeladat: Legyen adott egy K_1-en álló ferde gúla és egy K_1-ben álló ferde hasáb. Szerkesztendő az áthatásuk!

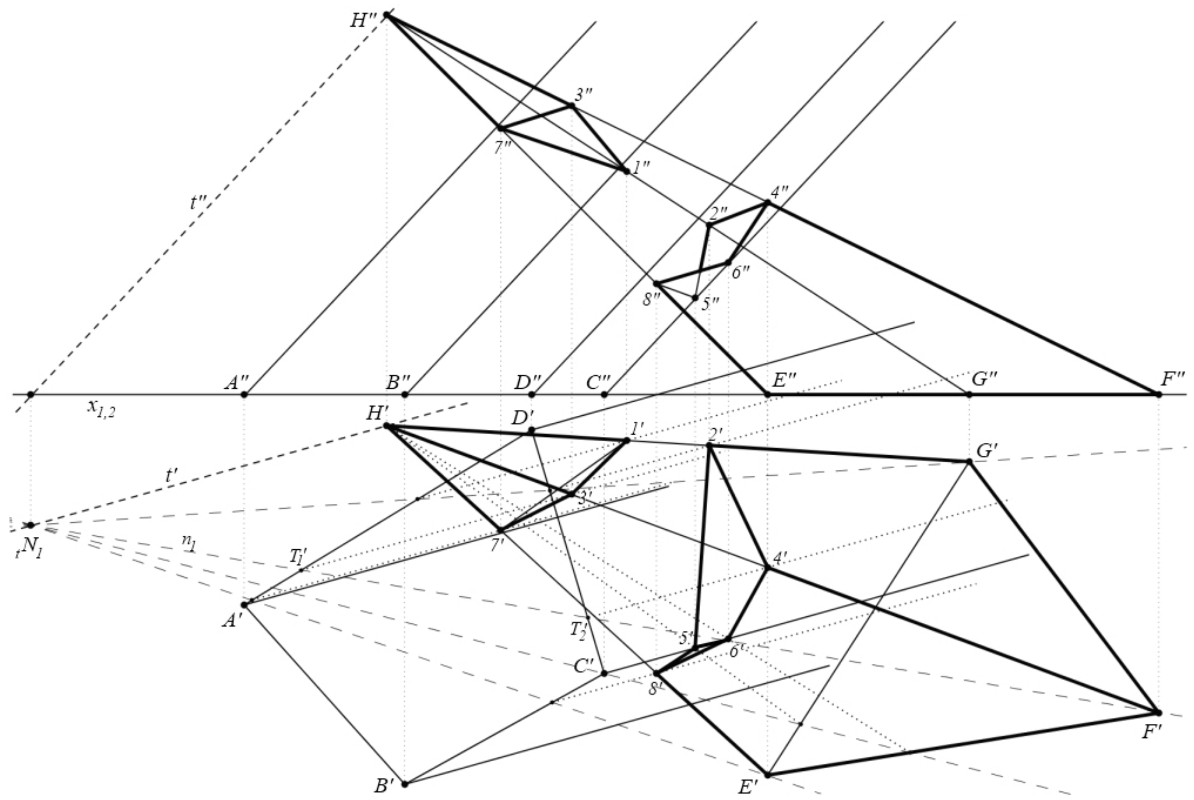
Megoldás: Emlékezzünk arra, hogy a hasáb olyan speciális gúla, amelynek csúcspontja a végtelen távolban van. Éppen ezért a bevezetőben elmondott lengősíkos eljárás alkalmazható hasáb esetére is.
Legyen adott az $ABCD$ alaplapú ferde hasáb és az EFG alapú, H csúcsú ferde gúla.

Elsőként határozzuk meg a lengősíkok tartóegyenesét, azaz a két gúla csúcspontját összekötő egyenest. A gúla csúcspontja a H pont, ezt kell összekötni a hasáb csúcspontjával. A hasáb csúcspontja végtelen távoli, így annak „helyzetét” a térben a hasáb alkotói árulják el: nagyon könnyed szemléletes megfogalmazással élve: „amerre a hasábalkotók néznek, arra van a végtelen távoli csúcspont”. Ezt a végtelen távoli pontot úgy köthetjük össze a H (véges helyzetű) ponttal, hogy H-ból párhuzamost húzunk a hasáb alkotóival, így adódik a t tartóegyenes.

Szerkesszük meg a t első nyompontját (${}_tN_1$). Kössük össze ezt a nyompontot a hasáb, illetve a gúla alapjainak csúcspontjaival. Vegyük észre, hogy a D és a B pontokkal fölösleges foglalkozni, ugyanis az azok segítségvel kapható lengősíkok nem adnak áthatási pontokat. (Például a $\overleftrightarrow{{}_tN_1D}$ egyenes nem metszi az EFG alaplapot, így a D-ből induló alkotó nem metszi a másik gúlát.)
Az így kapott egyenesek a lengősíkok első nyomvonalai. (Az ábrán hosszú szaggatott vonallal jelöltük.) Az áthatás szempontjából 4 db lényeges lengősíkot (pontosabban azok első nyomvonalait) szerkesztettünk meg: a G, az F, a C és az E csúcspontokat tartalmazó síkokat.

A következő lépésben meghatározzuk az áthatási töröttvonal (vagy töröttvonalak) csúcspontjait. A rajzon az F ponthoz tartozó lengősíkbeli áthatási pontok szerkesztését részleteztük, a fennmaradó 3 lengősíknál ugyanígy kell eljárni.
A $\overleftrightarrow{{}_tN_1F} = n_1$ egyenes az F-hez tartozó lengősík első nyomvonala. Mivel ez a K_1-ben

nyugszik, ezért az $ABCD$ négyszöggel 0,1 vagy 2 db közös pontja van – jelen esetben a T_1 és T_2 pontok. Rajzoljuk meg a T_1 és T_2 pontokhoz tartozó alkotókat, azaz húzzunk párhuzamost ezekből a pontokból a hasáb alkotóival. Ez a két alkotó és a gúla $\overline{FH}$ alkotója közös (lengő)síkban van, a metszéspontjaik a 3 és 4 pontok. (Ezzel megkaptunk két csúcspontot az áthatási töröttvonal(ak)ból.)
A fentieket elvégezve a kimaradt lengősíkokon összesen 8 db áthatási pontot kapunk, amelyeket 1-től 8-ig számoztunk be.
Az áthatási pontok második képei egyszerűen felvetíthetőek a megfelelő alkotókra.



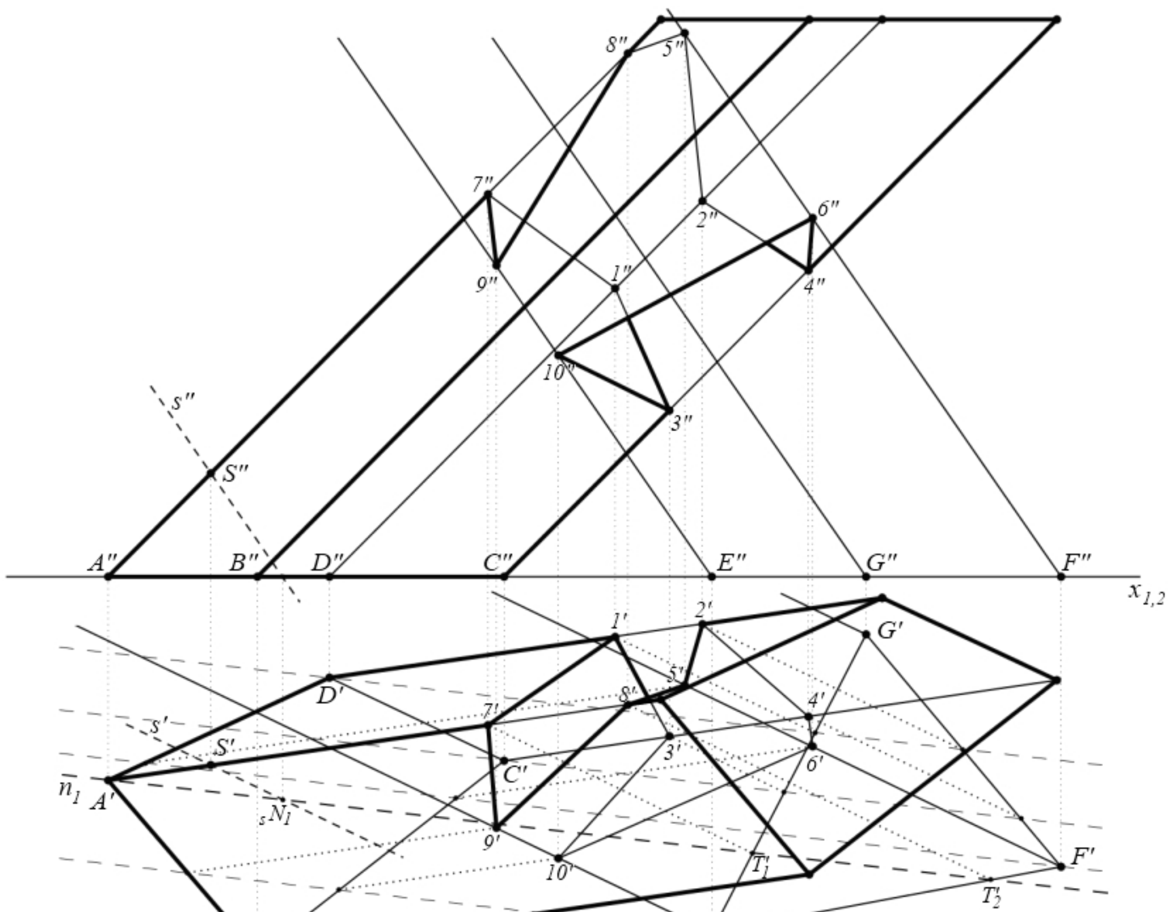
A következő fontos kérdés az, hogy vajon teljes áthatás vagy bemetszés az eredmény. Vizsgáljuk meg a lengősíkok „kezdő" és „záró" elemét, ezek a G és E pontokhoz tartoznak. Mivel ez a két pont egy gúlához tartozik, ezért a gúla átfúródik a hasábon – azaz *teljes áthatás*t kapunk. Ez fontos információ, mivel ez egyúttal azt is jelenti, hogy az áthatási töröttvonal két (zárt) részből áll!
A töröttvonal(ak)at úgy kaphatjuk meg, hogy az egyik testen, egy adott irányban elindulva keressük az összeköthető pontokat. Ekkor figyelembe kell venni, hogy két pont csak akkor köthető össze, ha mindkét(!) test esetén egy lapon vannak.
Induljunk ki az 1-es pontból, amely a G-ből induló (gúla)alkotón van. Haladjunk például az F pont irányába. Az F-ből induló alkotón két áthatási pont szerepel: a 3-as és 4-es pontok. Az 1-es a 4-essel nem köthető össze, mert bár mindkettő rajta van a gúla GFH oldalán, de(!) a hasáb esetén az 1-es pont az $\overline{AD}$-hez tartozó lapon, míg a 4-es a $\overline{CD}$-hez tartozó lapon van. Hasonló gondolatmenettel látszik, hogy az 1-es a 3-assal összeköthető, mert a gúlán és a hasábon is egy lapon vannak (GFH lap és AD-hez tartozó lap). – Folytatva ezt a módszert, az 137 töröttvonalat kapjuk. A másik részt például a 2-es pontból elindulva határozhatjuk meg, és 24685 töröttvonalhoz jutunk.

Végül láthatóság szerint kihúzzuk a rajzot. Áthatások esetében többnyire az egyik testet eltávolítva csak a másik (csonkolt) testet hangsúlyozzuk. Az ábrán a két részre csonkolt gúlát ábrázoltuk.

Alapfeladat: Legyen adott két K_1-en álló ferde hasáb. Szerkesztendő az áthatásuk!

Megoldás: Legyen a két hasáb két alaplapja $ABCD$ és EFG.
Ismét emlékeztetünk arra, hogy a hasáb speciális gúlának tekinthető, amely esetén a csúcspont végtelen távoli. A két hasáb két csúcspontja végtelen távoli, ezért a lengősíkok tartóegyenese is a végtelen távolban van. Továbbá a véges helyzetről tudjuk, hogy a lengősíknak a hasáb alkotóival párhuzamosnak kell lennie (lásd előző feladat). Itt két hasáb van, így mindkét hasábalkotóval párhuzamos síkokat keresünk! Ez azt is jelenti számunkra, hogy a lengősíkok első nyomvonalai egymással párhuzamosak.

Első lépésként szerkesszünk meg egy lengősíkot (a többi lengősík első nyomvonala ennek az első nyomvonalával párhuzamos). Tekintsük az A pontot és az abból kiinduló alkotót. Legyen az alkotó egy tetszőleges pontja az S segédpont. Húzzunk párhuzamost S–ből a másik hasáb alkotóival, így kapjuk az s segédegyenest. Határozzuk meg az A-ból induló alkotó és az s síkjának első nyomvonalát: n_1. Ez a sík tartalmazza az A pontot és mindkét hasábalkotóval párhuzamos – tehát egy lengősíkhoz jutottunk.



Az ábrán az A-hoz tartozó lengősík segítségével (az előző feladat technikáját felhasználva) a 7-es és 8-as pontokat kapjuk.

A G és B pontokhoz nem kell lengősíkokat fektetni, mivel az így kapott lengősíkok első nyomvonalai nem metszik a másik hasáb alaplapját. Összesen 5 db lengősík játszik fontos szerepet az áthatásban, amelyek „felülről lefelé” haladva a D, C, F, A és E pontokhoz tartoznak.
A „első” és „utolsó” lengősík különböző hasábhoz tartozik (D és E), így mindkét hasáb belemar a másikba – ez a *bemetszés* esete.

A lengősíkokban lévő alkotók metszéspontjai összesen 10 db áthatási pontot adnak, amelyeket ugyanazzal logikával köthetünk össze, mint amit az előző feladatban is alkalmaztunk.

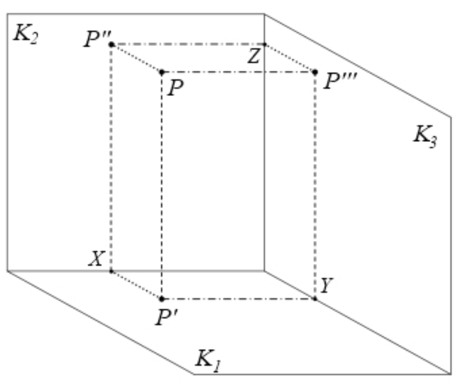
Az áthatási pontok második képeinek meghatározása és a láthatóság is az előző példával analóg.

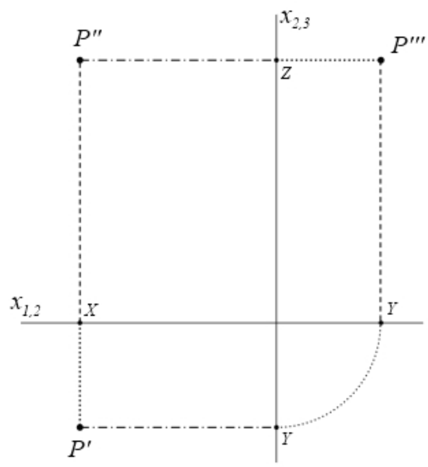
Megjegyzés: A lengősíkok módszere alkalmazható hengerek és kúpok esetére is.

2.13. Ábrázolás 3 képsíkon

Pont ábrázolása

A műszaki életben a leggyakoribb ábrázolási mód, ha egy objektumról (legyen például egy csavar vagy egy épület) három képet adnak meg: egy elölnézetet, egy felülnézetet és egy oldalnézetet.
Ez annyit jelent, hogy a szokásos Monge-projekció rendszerében egy újabb képsíkot kell felvenni: egy profilsíkot, amelyet K_3-mal jelölünk. Így egy P pontnak 3 képe (P', P'', P''') lesz. A P pontnak a P' pont a felülnézete, a P'' az elölnézete, míg a P''' az oldalnézete.





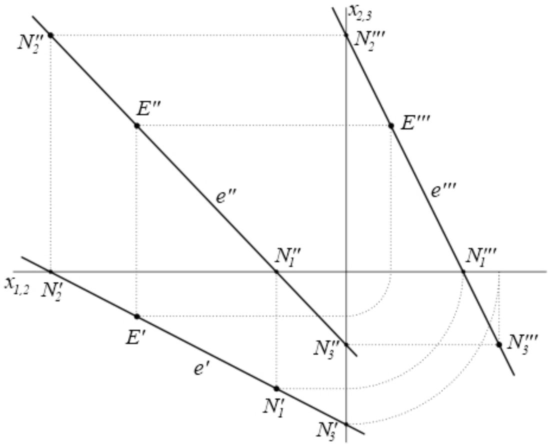
A K_3 harmadik képsíkot a K_2 képsíkba „forgatjuk”, ezért a P' és a P''' képeket összekötő rendezőegyenes „meghajlik” – az ábrán a $\overrightarrow{YP'}$ félegyenes, az Y pontot tartalmazó negyedkör és az $\overrightarrow{YP'''}$ félegyenes együttese a „hajlított” rendező.

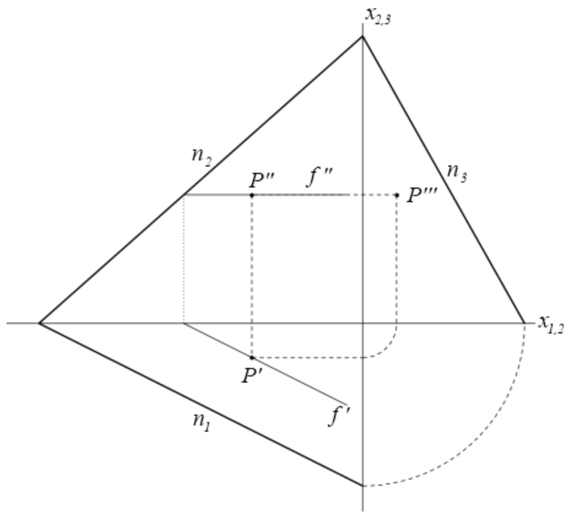
Egyenes és sík ábrázolása

Mivel az új, harmadik képsík merőleges mind K_1-re, mind K_2-re, ezért (K_1, K_3), valamint (K_2, K_3) egy-egy „új” Monge-rendszernek fogható fel, és így a K_3-ra minden korábban megtanult szerkesztési módszer használható.

Ez annyit jelent, hogy (általában) egy egyenesnek értelmezhető az N_3 harmadik nyompontja, és egy síknak létezik n_3 harmadik nyomvonala.

Figyeljük meg egy egyenes és egy sík ábrázolását 3 képsíkos rendszerben:





Gyakorló feladatok

1. Készítsük el a 2. feladatlapon található csonkolt kocka három vetületét!

2. Készítsük el a 3. feladatlapon található csonkolt kocka három vetületét!

3. Rajzoljuk meg a 4. feladatlapon található csonkolt kocka szemléltető ábráját a vetületei segítségével!

4. Rajzoljuk meg az 5. feladatlapon található csonkolt kocka szemléltető ábráját a vetületei segítségével!

5. Rajzoljuk meg a 6. feladatlapon található csonkolt kocka szemléltető ábráját a vetületei segítségével!

3. fejezet

Axonometria

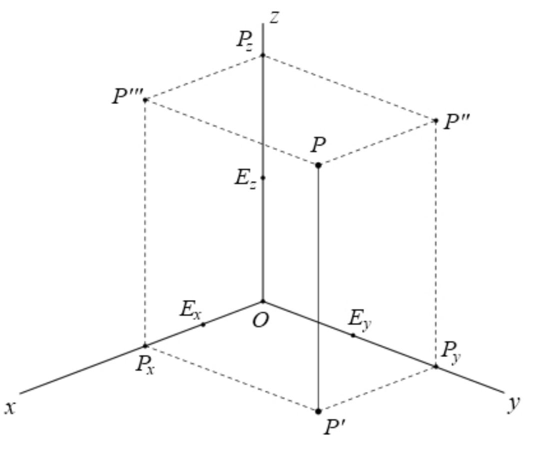
3.1. Az axonometria fajtái és alapvető tételei

Mint azt már korábban is említettük, az ábrázoló geometria célja, hogy geometriai alakzatokról vagy bármilyen tárgyról úgynevezett „képies képet” alkossunk. Az ilyen szemléletes rajzok elkészítése során legtöbbször axonometriában ábrázolunk.

Az axonometria egy párhuzamos vetítést használó ábrázolási eljárás, ahol 1(+3) képsíkra vetítünk. Így az axonometria párhuzamosság- és osztóviszonytartó.

Vegyünk fel a rajz síkjában három egymást metsző egyenest O közös ponttal, amelyekre úgy tekintünk mint egy derékszögű koordinátarendszer tengelyegyeneseinek vetületei. Adjuk meg a tengelyeken (x, y, z) az egységpontok képeit is: $E_x = (1, 0, 0)$, $E_y = (0, 1, 0)$, $E_z = (0, 0, 1)$.
(A későbbiekben kimondott *Pohlke-tétel* biztosítja, hogy mindig létezik olyan derékszögű koordinátarendszer a térben, amelynek ez a rendszer a párhuzamos vetülete.)

Legyen $P = (P_x, P_y, P_z)$ a tér tetszőleges pontja, amelynek az $[x, y]/[y, z]/[x, z]$-koordinátasíkra eső merőleges vetülete $P'/P''/P'''$. (Az elnevezések rendre első/második/harmadik kép.) A *rajz síkjában* ábrázoljuk a P pontot úgy, hogy osztóviszony-tartással felvesszük a tengelyeken a P_x, P_y, P_z pontokat, majd ezekből meghatározzuk a P', P'', P''' képeket. Így kapjuk egy olyan hasáb képét, amelynek csúcsai P, P', P'', P''', P_x, P_y, P_z és O. Ezt a P ponthoz tartozó *axonometrikus vetítőhasáb*nak nevezzük, a P *axonometrikus képe* a rajzon szintén P-vel jelölt pont.



Az axonometria alaptétele: *A tárgy axonometrikus képe mindig affin a tárgy egy jól meghatározott párhuzamos vetületéhez.*

Pohlke tétele: (1853) *A rajz síkjának bármely* $\underline{O}$ *pontjából kiinduló* $\overline{\underline{OE}_x}$, $\overline{\underline{OE}_y}$, $\overline{\underline{OE}_z}$ *szakaszai – hasonlóság erejéig – mindig tekinthetőek egy* $O(E_xE_yE_z)$ *ortonormált bázis párhuzamos vetületének, amennyiben a szakaszok különböző egyenesre esnek.*

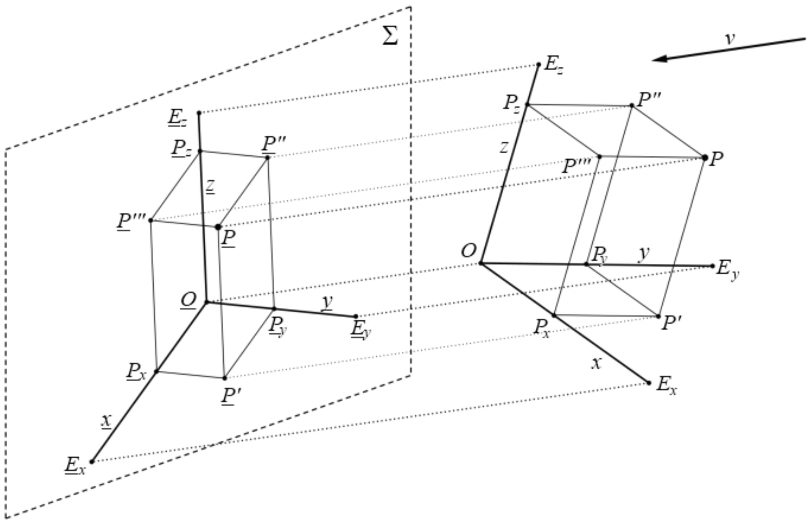
Más megfogalmazásban: Egy tárgy axonometrikus képe mindig hasonló a tárgy egy jól meghatározott párhuzamos vetületéhez.

A bevezetőben elmondottakat a Pohlke-tétel segítségével pontosíthatjuk:

Tegyük fel, hogy az O origójú x, y, z tengelyekkel megadott térbeli derékszögű koordinátarendszert egy tetszőleges síkra vetítjük – így kapjuk az $\underline{O}$, $\underline{x}$, $\underline{y}$ és $\underline{z}$ (továbbá $\underline{E}_x$, $\underline{E}_y$ és $\underline{E}_z$) vetületeket. Ezzel megadtunk egy axonometriát, amelyben a P pont $\underline{P}$-vel jelölt vetülete a pont axonometrikus képe.

A P *pontot a* $\underline{P}$, $\underline{P}'$, $\underline{P}''$ *és* $\underline{P}'''$ *pontok közül kettő egyértelműen meghatározza.*

A térbeli $O(E_xE_yE_z)$ pontnégyest *főtéralakzat*nak, a $\underline{O}\left(\underline{E}_x\underline{E}_y\underline{E}_z\right)$ vetületét *főkép-alakzat*nak nevezzük.



A $q_i = \dfrac{d(O, E_i)}{d(\underline{O}, \underline{E}_i)} \in \mathbb{R}$ számot az i-tengely *rövidülés*ének nevezzük, ahol $i = x, y, z$.

Megjegyzés: A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az axonometrikus képeket aláhúzás nélkül jelöljük.

Ortogonális axonometria

Egy axonometria *ferdeszögű/klinogonális*, ha a vetítés iránya a képsíkkal hegyesszöget zár be. Amennyiben a vetítés iránya merőleges a képsíkra, úgy **merőleges/ortogonális axonometriá**ról beszélünk.

(Érdekességként jegyezzük meg, hogy ferdeszögű axonometriában gömb kontúrja ellipszis, míg ortogonális axonometriában egy gömb kontúrja kör.)

Egy ortogonális axonometriát általában úgy veszünk fel, hogy a tengelyeknek és a képsíknak a metszésponjait láthassuk. A három tengely képsíkkal alkotott metszéspontjai egy háromszöget adnak, amelyet *nyomháromszög*nek nevezünk.

Tétel: *Ortogonális axonometriában a nyomháromszög hegyesszögű, továbbá a tengelyek képei e háromszög magasságvonalai és így az origó képe a nyomháromszög magasságpontja.*

Tétel: *Minden hegyesszögű háromszöghöz létezik olyan térbeli derékszögű koordinátarendszer, amelynek a megadott háromszög a nyomháromszöge.*

Állítás: *Ortogonális axonometriában* $q_x = \cos\alpha$, $q_y = \cos\beta$, $q_z = \cos\gamma$ *, ahol* α, β, γ *rendre az* x, y, z *tengelyek képsíkszöge.*

Tétel (Gauss)**:** *Megtartva az előző állítás jelöléseit,*

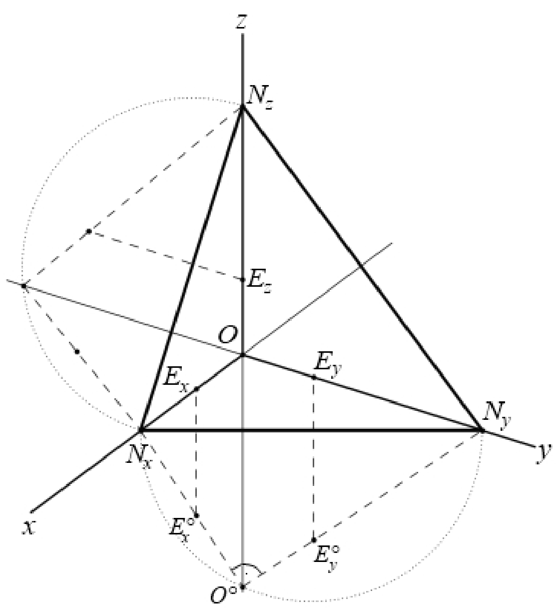
$$q_x^2 + q_y^2 + y_z^2 = 2 \ .$$

A fenti tételek segítségével *tetszőleges* ortogonális axonometriát könnyen felvehetünk.

Adjuk meg az $N_xN_yN_z\triangle$ nyomháromszöget, majd szerkesszük meg a magasságvonalait (x, y, z) és a magasságpontját (O). Így kapjuk meg az origó és a tengelyek axonometrikus képét.

Az egyértelműséghez szükség van még a tengelyek egységpontjaira.
Az x- és y-tengely E_x és E_y egységpontjait a következőképpen kapjuk: Forgassuk be az $N_xON_y\triangle$ derékszögű háromszöget a képsíkba az $\overline{N_xN_y}$ szakasz körül. Egyrészt az $\overline{N_xN_y}$ fölé írt Thalész-körön rajta van az O forgatott képe. Másrészt mivel a vetítés merőleges, ezért az O forgatott képe illeszkedik egy O-ból kiinduló $\overline{N_xN_y}$-ra merőleges egyenesre. Ezen egyenes és a Thalész-kör metszéspontja az $O°$. Itt felmérhető $O°$-ból az egység mindkét (leforgatott) tengelyre: E_x° és E_y°. Ezeket szintén merőleges iránnyal vihetjük vissza az axonometrikus képre.

Az ábrán az E_z-t analóg módon, az $E_xOE_z\triangle$ leforgatásával kaptuk.

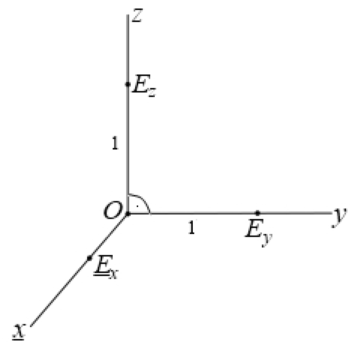


A szerkesztés akkor sem bonyolult, ha először a tengelyegyeneseket vesszük fel, és ahhoz határozunk meg egy nyomháromszöget. Ebben az esetben a nyomháromszög egyik csúcsát tetszőlegesen megválaszthatjuk, a nyomháromszög oldalait a megfelelő tengelyekre állított merőlegesekkel kapjuk.

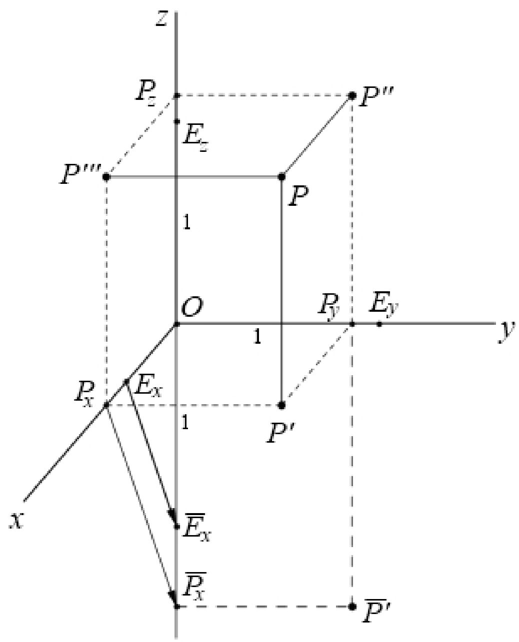
Megjegyzés: Megadható egy ortogonális axonometria tengelykeresztje akkor is, ha a rövidülések adottak, ennek szerkesztését lásd például a *Gyarmathi László: Ábrázoló geometria 2.* jegyzetben.

Kavalier-axonometria

Ferdeszögű axonometriák közül az egyik legfontosabb az ún. **kavalier-axonometria**. Ebben a vetítési rendszerben a képsík az $[y, z]$-koordinátasík, így $[y, z]$-ben minden valódi nagyságban látszik. A térbeli $\overline{OE_x}$ szakasz vetülete az $\overline{O\underline{E}_x}$ szakasz.



Ezen axonometria egyik fő erejét az adja, hogy kavalier-axonometriából könnyű áttérni Monge-projekcióra. Figyeljük meg a következő ábrát, amelyben az $[x, y]$-koordinátasíkot K_1 képsíknak tekintjük és „lehajtjuk” az $[y, z]$-koordinátasíkba (mint K_2 képsíkba).



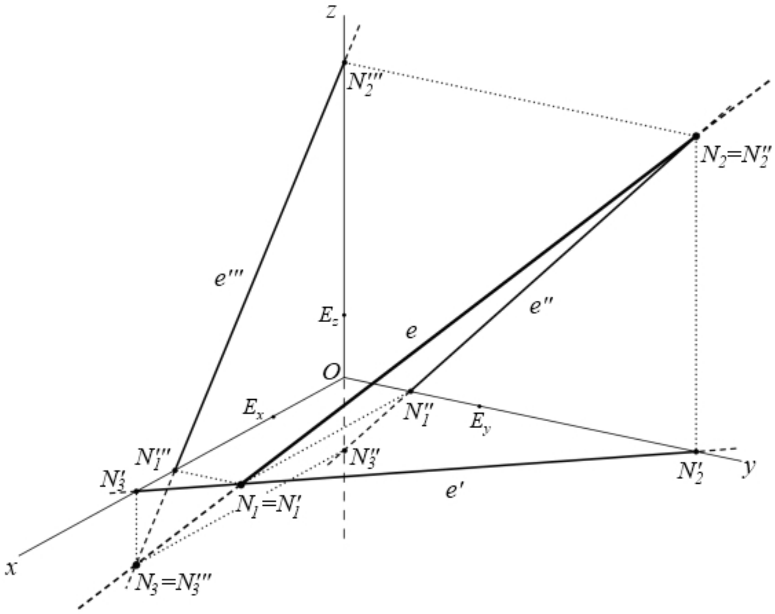
3.2. Térelemek ábrázolása

(A pont ábrázolását a bevezetőben már tárgyaltuk.)

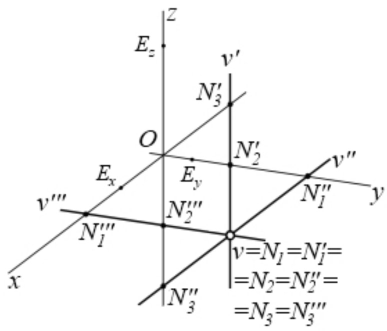
Egyenes ábrázolása

Ahogyan egy pontnak is négy képe van, úgy egy egyenesnek is megadható első, második, harmadik és az axonometrikus képe. A pont ábrázolásával megegyezően, egy e egyenest is egyértelműen megadhatunk két képével: az e', e'', e''' és e képek közül kettővel. (Ebből a kettőből a fennmaradó másik két kép már meghatározható.)

Az elnevezések a Monge-projekció mintájára történnek. Így az $[x, y]$-koordinátasíkkal való metszéspont az N_1 *első nyompont*, az $[y, z]$- illetve $[x, z]$-koordinátasíkkal alkotott metszéspontok az N_2 és N_3 *második, illetve harmadik nyompontok*.

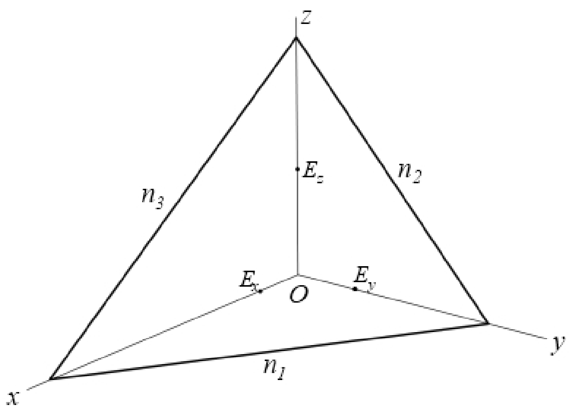


Érdekességként mutatjuk be egy ún. *axonometrikus vetítőegyenes* képeit. A v vetítőegyenes (szintén) v-vel jelölt axonometrikus képe ponttá fajul, és így minden pontjának ugyanez a pont az axonometrikus képe. Ezt figyelembe véve a három nyompontját ábrázoljuk, amikkel előáll a keresett v', v'' és v''' kép is.



Sík ábrázolása

A Monge-projekcióval mutatott hasonlóság miatt a sík ábrázolása sem hoz sok újdonságot. Egy tetszőleges síknak általában három *nyomvonal*a van, amelyek a megfelelő koordinátasíkokkal alkotott metszésvonalak.
Egy síkot két nyomvonalával ábrázolhatjuk, amelyekből a harmadik nyomvonal szerkeszthető.



Fontos megjegyzés: Vessük össze az egyenes és a sík ábrázolását a Monge-projekcióban tárgyalt három képsíkos vetítési eljárással, és figyeljük meg a hasonlóságot!

3.3. Illeszkedési és metszési feladatok

Mivel az axonometria egy párhuzamos vetítésen alapuló ábrázolási rendszer, ezért minden eddig (kótás- és Monge-projekcióban) megtanult térgeometriai meggondolás felhasználható. Erre az erős analógiára tekintettel, a következőkben csupán néhány alapfeladatot mutatunk be rövid indoklással.
Javasoljuk, hogy az Olvasó a Monge-projekcióban kitűzött illeszkedési és metszési feladatokat szerkessze meg axonometriában is.

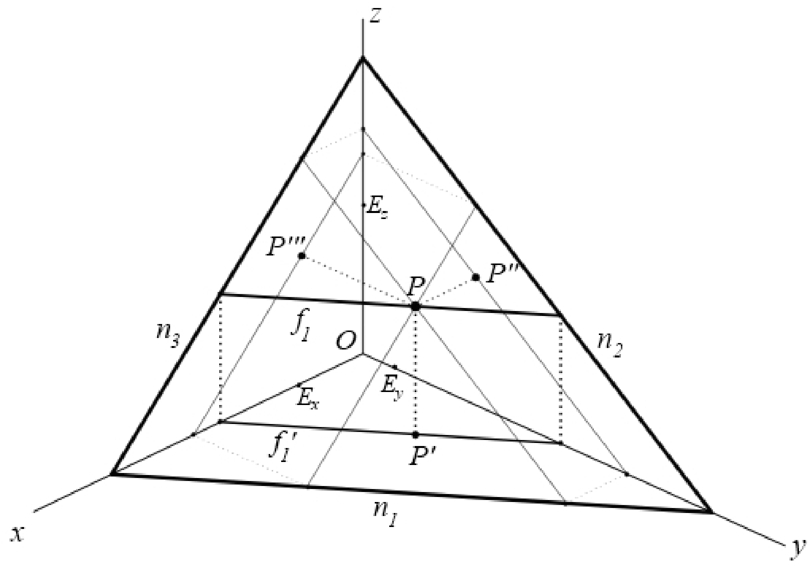
Minden feladatban a térelemeket tetszőleges ferdeszögű axonometriában ábrázoljuk.

Alapfeladat: Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy P pont axonometrikus képe. Szerkesszük meg a P egy további képét (P', P'' vagy P''') úgy, hogy a P illeszkedjen a síkra!

Megoldás: Tekintsük a sík egy olyan f_1 *első fővonal*át, amelynek axonometrikus képe áthalad P-n. A fővonalakról tanultak miatt f_1' szerkeszthető. A z-tengellyel párhuzamosan „vetítjük” a P-t az $[x, y]$-koordinátasíkra (mint első képsíkra). Ahol ez a vetítőegyenes elmetszi f_1'-t, ott találjuk a P' pontot.
Így a P pont adott, mert ismerjük két képét: a P axonometrikus képet és a P' első képet. (A rajzon megszerkesztettük a P'' és P''' képet is.)

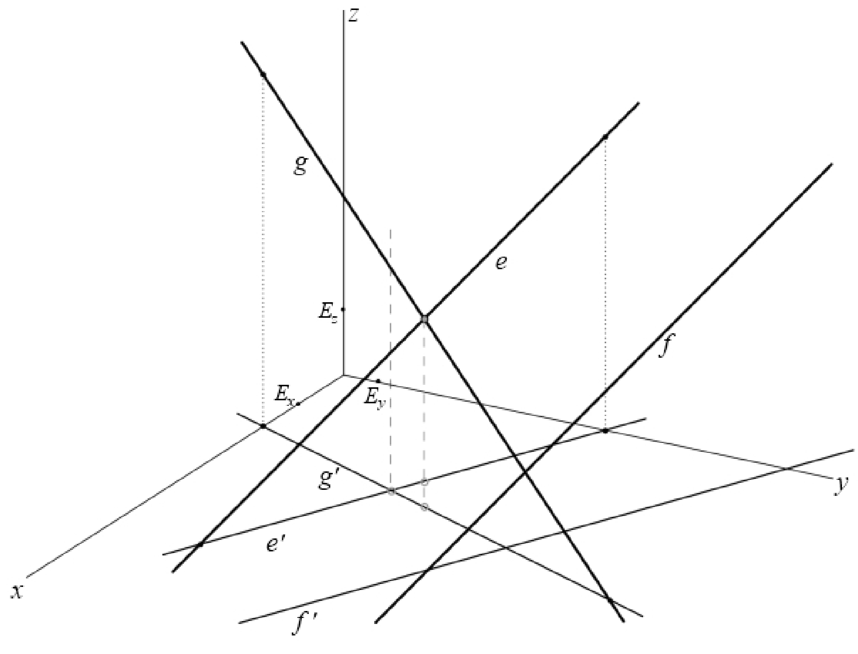
Vegyük észre, hogy a végeredményt tekinthető úgy is, mint egy Monge-projekcióban adott sík fővonalának egy szemléletes képe.

(Az ábrán a P-re illeszkedő második és harmadik fővonalat is megrajzoltuk.)



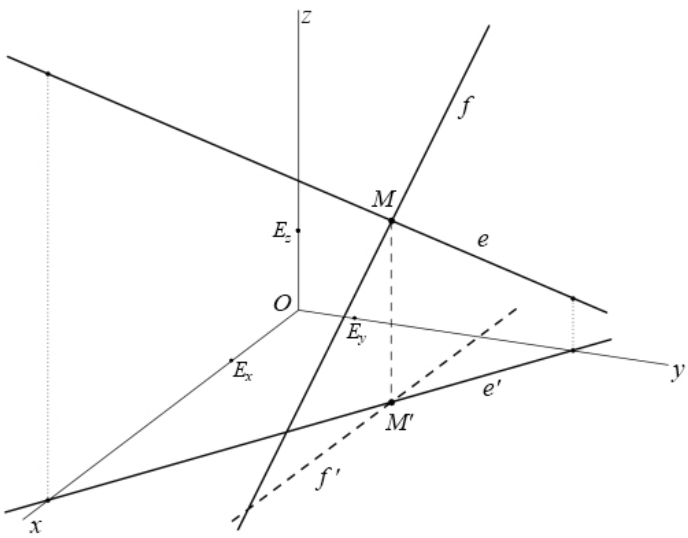
Alapfeladat: Határozzunk meg olyan e, f és g egyeneseket, amelyekre teljesül, hogy $e \| f$, továbbá e és g kitérő!

Megoldás: Az $e \| f$, ha minden megfelelő képük párhuzamos (az ábrán az axonometrikus és az első képek).
Az e és a g kitérő, ha a megfelelő képek metszéspontjai *nem* határoznak meg egy pontot („a metszéspontok nincsenek egy rendezőn"). A rajzon e és g axonometrikus képek metszéspontjának $[x, y]$-ra eső „vetülete" nem esik egybe az e' és g' metszéspontjával.



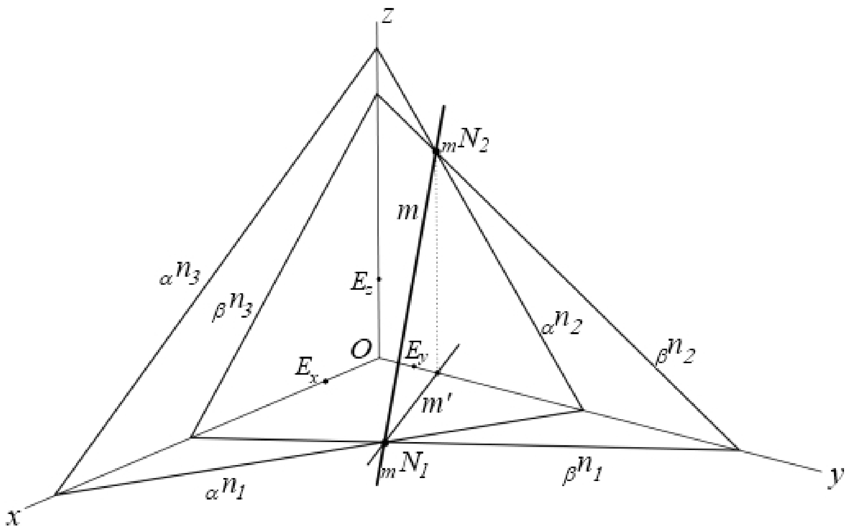
Alapfeladat: Legyen adott egy e egyenes axonometrikus és első képével, és egy f egyenes axonometrikus képe. Szerkesztendő f' úgy, hogy e és f metsző legyen!

Megoldás: A kitérő egyeneseknél elmondott elv alapján a megoldás evidens.



Alapfeladat: Legyen adott két sík nyomvonalaikkal. Szerkesztendő a metszésvonaluk!

Megoldás: Tekintsük a két sík megfelelő nyomvonalainak metszéspontjait – az ábrán az első és a második nyomvonalak metszéspontjai ${}_mN_1$ és ${}_mN_2$. Ezek a pontok már a metszésvonal első és második nyompontjai, amelyekkel a metszésvonal axonometrikus képe (m) és első képe (m') könnyen szerkeszthető.

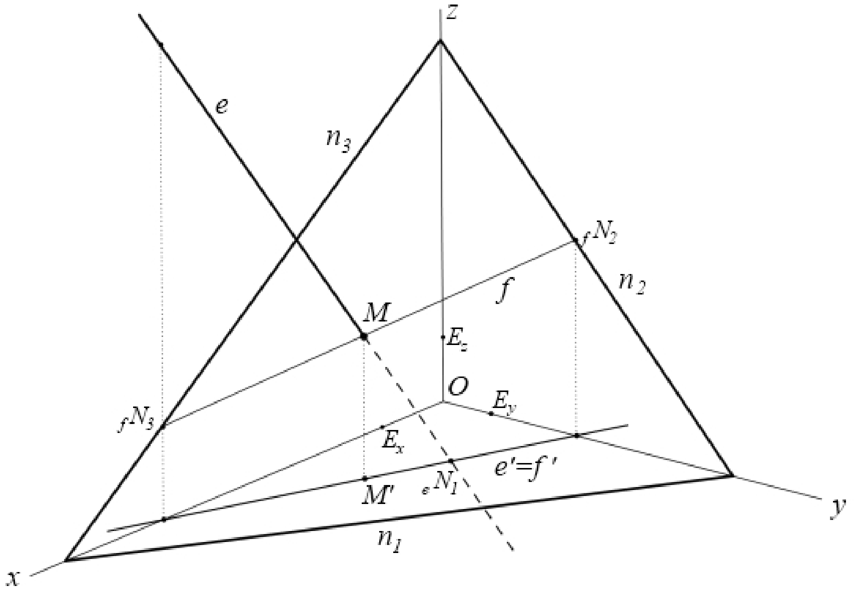


Alapfeladat: Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy egyenes két képével. Szerkesztendő a sík és az egyenes metszéspontja!

Megoldás: A korábban megtanult *fedőegyenespárok módszere* itt is használható.

Legyen adva az egyenes e axonometrikus és e' első képével. Legyen f olyan egyenes, amelynek első képe egybeesik e első képével ($e' = f'$ első fedőegyenesek) és f benne van a nyomvonalakkal adott síkban.

Az f egyenes axonometrikus képe nyilvánvaló, ha benne van a síkban: f. Az $e \cap f = \{M\}$ a metszéspont első képe, ezt „levetítve" az első képekre adódik M' is.



Érdekesség:

Bár a metrikus feladatok többségéhez leforgatás szükséges, egy egyenes és sík merőlegességét egy apró trükkel meg tudjuk szerkeszteni.

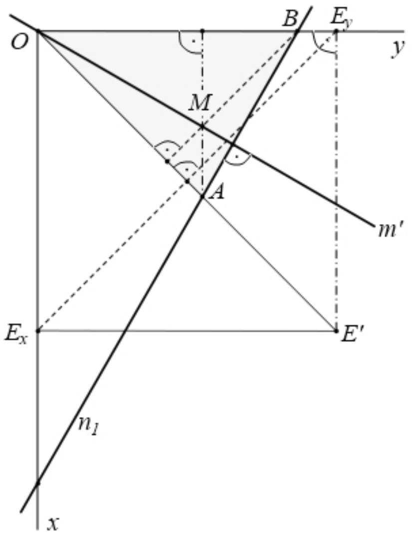
Szerkesszünk O-ból merőlegest egy nyomvonalaival megadott tetszőleges síkra!

Monge-projekcióból ismert, hogy sík és egyenes merőlegességének képi feltétele, hogy az egyenes megfelelő képe merőleges legyen a sík megfelelő nyomvonalára. – Ezt felhasználva, előállítjuk a képi feltételt két koordinátasíkon, így az egyenesnek megkapjuk két képét, amelyből a hiányzó másik két képet is meg tudjuk majd határozni.
A probléma nyilvánvalóan az, hogy egyik koordinátasíkot sem látjuk valódi nagyságban, így merőlegest sem tudunk állítani. Ezért úgy kell megszerkeszteni a merőleges egyenes képeit, hogy csak párhuzamosokat használunk (azt ugyanis a vetítés megőrzi).

Vegyük például az $[x, y]$-koordinátasíkot (mint „első képsíkot"), és benne az O origó, az E_x és E_y által meghatározott négyzetet. Vegyünk fel egy n_1 nyomvonalat. A feladat az, hogy merőlegest állítsunk az O-ból az n_1-re, csak és kizárólag párhuzamosok felhasználásával.

Tekintsük az $AOB\triangle$ háromszöget, és szerkesszük meg a magasságpontját. Az $\overline{OA}$ oldalhoz tartozó magasság B csúcsból indul és párhuzamos(!) az $\overline{E_xE_y}$-nal. Az $\overline{OB}$ oldalhoz tartozó magasság A-ból indul és párhuzamos(!) az $\overline{OE_x}$-szel. E két magasság metszéspontja a keresett M magasságpont.
Az $\overleftrightarrow{OM} = m'$ egyenes az $\overline{AB}$ oldalhoz tartozó magasságvonal egyenese, így pusztán párhuzamosok húzásával elértük, hogy $m' \perp n_1$.

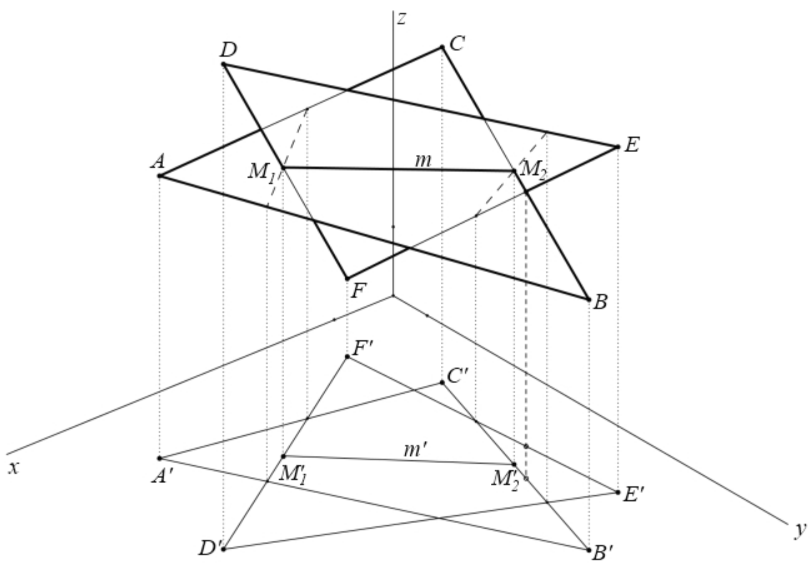
(Hasonlóan eljárva egy másik képen, az m merőleges egy másik képe is szerkeszthető.)



Gyakorló feladatok

(A feladatokat tetszőleges ferdeszögű axonometriában oldjuk meg.)

1. Szerkesszünk tetszőleges ponton át egy adott síkkal párhuzamos egyenest!
2. Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy rá nem illeszkedő pont. Szerkesszünk a pontra illeszkedő, az adott síkkal párhuzamos síkot!
3. Legyen adott egy háromszög két képével és egy egyenes. Szerkesztendő a háromszög és az egyenes metszéspontja!
4. Legyen adva két háromszög. Szerkesszük meg a metszésvonalukat!
   Útmutató: Segítségképpen szerkesztési menet nélkül bemutatjuk a kész ábrát:



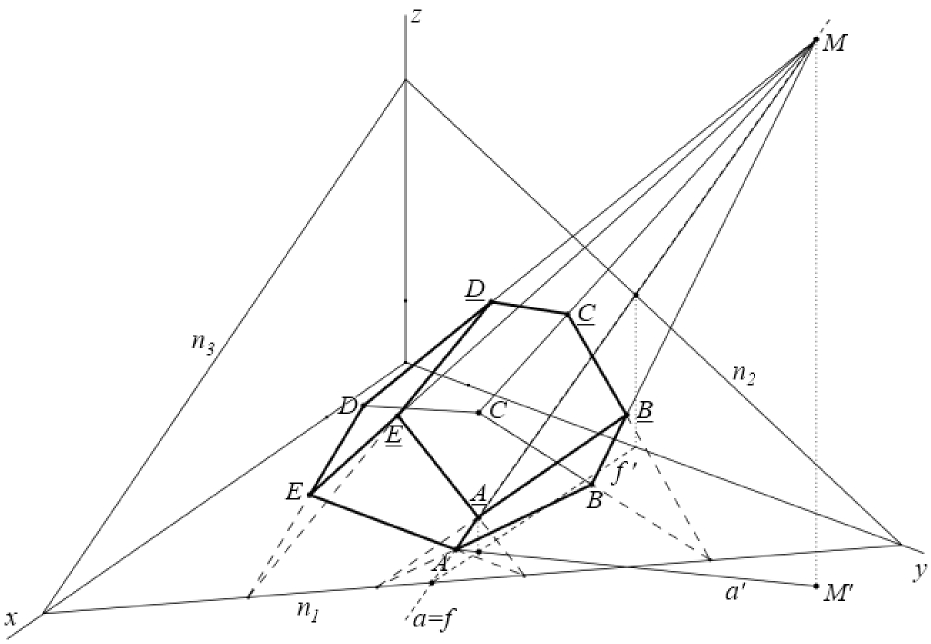
(A láthatóságot itt az axonometrikus vetítőirányból nézve rajzoltuk meg, lásd például a $\overline{BC}$ és $\overline{EF}$ szakaszok fedőpontjait.)

5. Legyen adva egy háromszög két képével, és egy fényirány két képével. Szerkesztendő a háromszög koordinátasíkokra vetett árnyéka!

6. Tekintsünk egy olyan hatszög alapú ferde gúlát, amelynek alapja az $[x, y]$-koordinátasíkban fekszik, valamint egy rá nem illeszkedő egyenest. Szerkesztendőek a gúla és az egyenes közös pontjai!

7. Oldjuk meg az előbbi feladatot ferde gúla helyett ferde hasábbal!

8. Tekintsünk egy olyan ötszög alapú ferde gúlát, amelynek alapja az $[x, y]$-koordinátasíkban fekszik, és egy azt metsző síkot. Szerkesztendő a síkmetszet!
   Útmutató: Segítségképpen szerkesztési menet nélkül bemutatjuk a kész ábrát:



9. Oldjuk meg az előbbi feladatot ferde gúla helyett ferde hasábbal!

10. Legyen adott egy sík nyomvonalaival és egy pont. Szerkesztendő a ponton átmenő, a síkra merőleges egyenes!

4. fejezet

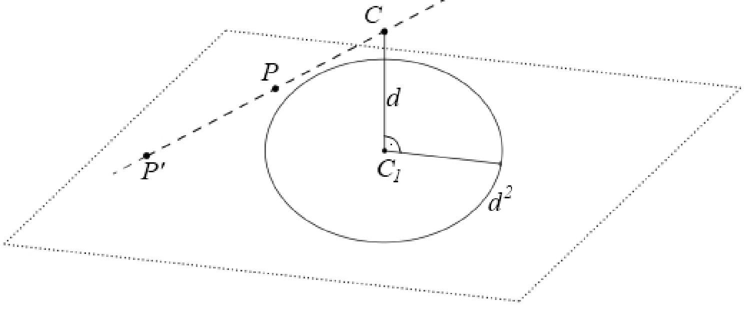
Centrális vetítések

Az eddig tárgyalt ábrázolási eljárások mindegyike párhuzamos vetítéseken alapszik. Azonban ha az emberi látást szeretnénk reprodukálni, centrumból történő vetítés(eke)t kell használni. – A következőkben két centrális vetítéssel ismerkedünk meg: a centrális projekcióval, illetve az arra épülő perspektívával.

A továbbiakban a végtelen távoli síkkal kibővített euklideszi térben dolgozunk.
Könnyed megfogalmazásban a végtelen távoli sík pontjai a következők: Vegyük a tér egy egyenesét és minden ezzel párhuzamos egyenest. Ekkor úgy tekintjük, hogy ezek a párhuzamos egyenesek egy közös pontban találkoznak a végtelen távoli síkon. (A végtelen távoli sík egy másik pontja egy másik, egymással párhuzamos egyenessereghez tartozik.) Így a tér minden egyeneséhez hozzárendeltünk egy *végtelen távoli pont*ot, és minden párhuzamos egyenesnek közös a végtelen távoli pontja. Az is könnyen belátható, hogy egy sík összes egyeneséhez tartozó végtelen távoli pontok a végtelen távoli síkon egy egyenest alkotnak. (Részletes és precíz tárgyalását lásd *Projektív geometria*.)

4.1. Centrális projekció alapjai

Tekintsük a tér egy (végesben fekvő) C pontját mint *centrum*ot és egy arra nem illeszkedő síkot mint *képsík*ot. A (végtelen távoli pontokkal kibővített) tér minden pontját vetítsük a C centrumon keresztül a képsíkra. Ezt az ábrázolási módot a tér egy *centrális projekció*jának nevezzük.
A centrális projekció egyenes- és kettősviszony-tartó.

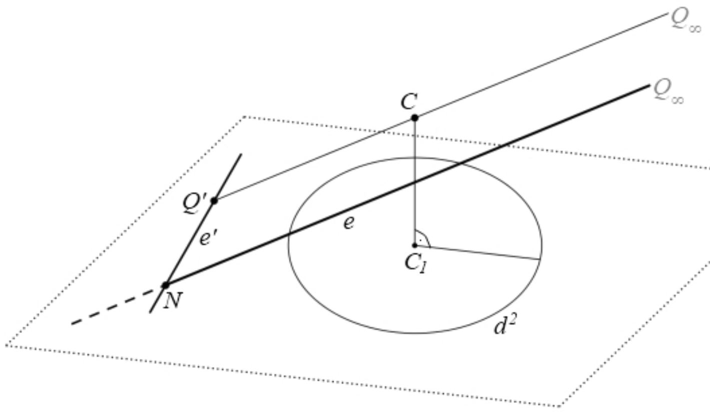


A képsíkon (a rajz síkjában) a C centrum C_1-gyel jelölt merőleges vetületét *főpont*nak

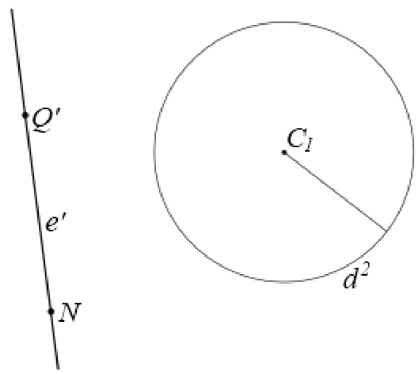
nevezzük. A centrum képsíktól való távolságát d-vel jelöljük, és ezt a távolságot a képsíkban egy C_1 középpontú, d sugarú körrel, a d^2 *distanciakör*rel adjuk meg.
Az előállításból nyilvánvaló, hogy egy P pont a képével nem határozható meg egyértelműen, ezért *az ábrázolás alapeleme az egyenes*!

Egyenes ábrázolása

Legyen e egy tetszőleges egyenes, amelynek végtelen távoli pontja Q_∞. Az egyenes képsíkkal alkotott metszéspontját *nyompont*nak nevezzük (N). Vetítsük az egyenes pontjait a C centrumon keresztül. Ekkor a Q_∞ pont képe véges helyzetűvé válik, amelyet Q'-vel jelölünk és az egyenes *iránypont*jának nevezzük. – Egy egyenest általában nyompontjával és iránypontjával adjuk meg.



Egy pont képét úgy határozzuk meg, hogy tekintjük a pont és a centrum által meghatározott egyenesnek a nyompontját. A Q_∞ végtelen távoli pontnál is ugyanez történik, szükségünk van a $\overleftrightarrow{CQ_\infty}$ egyenesre. A Q_∞ vetítése során valójában az e egyenessel húzunk párhuzamost C-n keresztül, majd meghatározzuk ennek a párhuzamos egyenesnek a nyompontját. Így tudunk egy végtelen távoli pontot „bevetíteni” a képsíkba.



A Q' segít abban, hogy az egyenest visszaállíthassuk a térben. A centrum merőleges vetülete és a Q' ismeretében az egyenes állását kaphatjuk meg – ez indokolja az „iránypont” elnevezést. Ezt az egyenesállást kell eltolni az N nyompontba.

Az is könnyen átgondolható, hogy a Q' helyzetéből következtethetünk az egyenes *képsíkszögé*re. Ha a Q' a distanciakörön kívül van, a képsíkszög 0° és 45° közötti; ha illeszkedik a distanciakörre, akkor éppen 45°; végül ha a distanciakörön belül helyezkedik el, a képsíkszög 45° és 90° között van.

Megjegyzés: Speciális helyzetű egyenesek a képsíkkal párhuzamos és arra merőleges egyenesek, továbbá a *vetítőegyenes*ek.

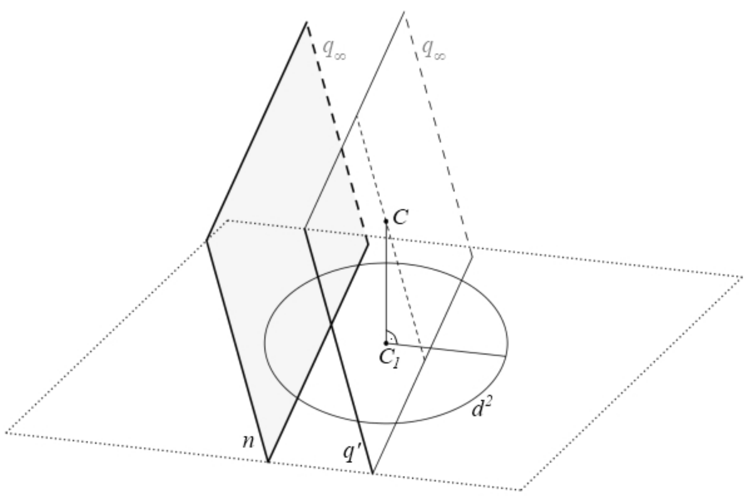
Képsíkkal párhuzamos egyenes esetében a nyompont végtelen távoli és egybeesik az iránryponttal. Az egyenes állását a vetületével adjuk meg, amely párhuzamos az eredeti egyenessel. A képsíktól való távolságát pedig úgy, hogy egy tetszőleges állású (véges nyom- és irányponttal rendelkező) egyenes adott magasságú pontjának vetületén át húzzuk meg a képét.

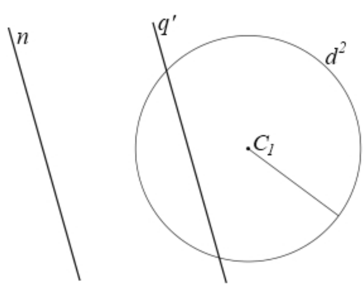
Képsíkra merőleges egyenesek iránypontja éppen a C_1 pont.

A vetítőegyenesek nyom- és iránypontja, valamint minden pontjának képe egybeesik.

Sík ábrázolása

Az egyenes megadásához hasonlóan járhatunk el sík ábrázolásánál is. Tekintsünk egy síkot, amelynek képsíkkal alkotott metszésvonala n, a q_∞ végtelen távoli egyenesének C által vetített képe q'. A sík *nyomvonal*a n, *irányvonal*a q'.
Azonnal látható, hogy *a sík nyomvonala és irányvonala egymással párhuzamos.* – Egy általános helyzetű síkot főként ezzel a két egyenesével adjuk meg.





Általánosítva az egyenes ábrázolásánál elmondottakat, a sík esetében is az irányvonal segít megadni a sík állását, a nyomvonala pedig a „konkrét helyét”.

A sík képsíkszöge 45°-nál kisebb, ha a q'-nek nincs közös pontja a distanciakörrel; 45°, ha érinti azt; míg 45° és 90° között van, ha a q' irányvonal metszi a distanciakört.

Megjegyzés: Speciális helyzetű síkok a képsíkkal párhuzamos és a képsíkra merőleges síkok, illetve a vetítősíkok.

Képsíkkal párhuzamos síkot két metsző vagy két párhuzamos egyenesével adhatjuk meg. (lásd: képsíkkal párhuzamos egyenesek ábrázolása) – Ezek között is speciális az ún. *eltűnési sík* (egyenesei az *eltűnési egyenes*ek), amely illeszkedik a centrumra és párhuzamos a képsíkkal. Ezen sík képe a sík végtelen távoli egyenese.

Képsíkra merőleges síkok irányvonala áthalad a centrum C_1 merőleges vetületén.

A vetítősíkok nyom- és irányvonala egybeesik, továbbá minden pontjának képe ezen az egyenesen van.

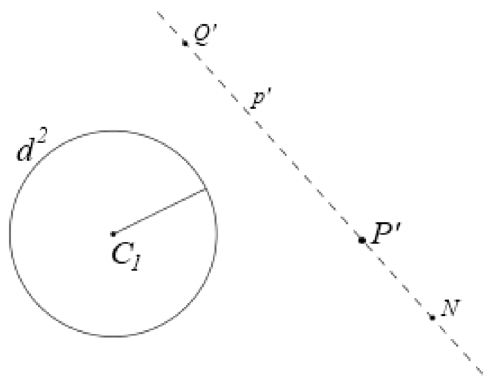
Helyzetgeometriai feladatok

A következőkben áttekintünk néhány alapvető illeszkedési- és metszési feladatot.

Vegyük észre, hogy *a centrális projekció szoros kapcsolatban áll a kótás projekcióval*, és így az ott megismert módszerek jelentős részét ebben az ábrázolási eljárásban is alkalmazhatjuk. (Ennek oka az, hogy mind a kótás projekció, mind a centrális projekció úgynevezett nyomelemes eljárás. A kótás projekciót úgy is felfoghatjuk, mint egy olyan speciális centrális projekciót, ahol megengedjük, hogy a centrum egy bizonyos végtelen távoli pont legyen.)

Alapfeladat: Ábrázoljuk egy tetszőleges P pont képét!

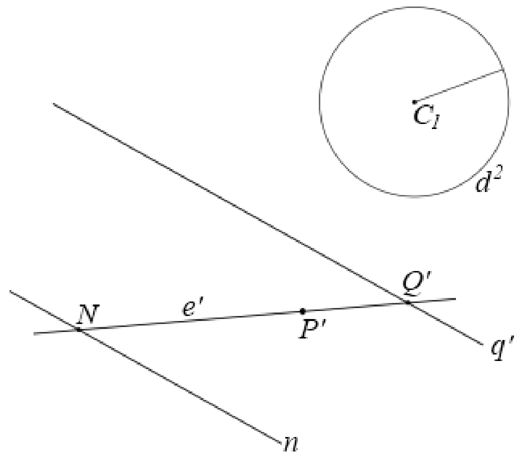
Megoldás: Mivel a pont a centrális vetületéből nem rekonstruálható egyértelműen, ezért vegyünk fel egy P-n átmenő tetszőleges p egyenest, amelyet a pont *tartójá*nak is nevezünk. Az egyenes képe egyértelmű, így a rajta fekvő P' kép is egy és csakis egy pont képe lehet.



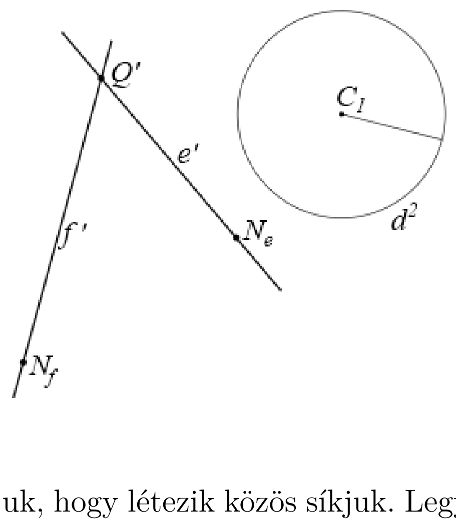
Alapfeladat: Legyen adott egy sík nyom- és irányvonalával. Adjunk meg ezen a síkon egy tetszőleges egyenest, és egy tetszőleges pontot!

Megoldás: Az illeszkedéstartásból nyilvánvaló, hogy egy síkbeli egyenes nyompontja

illeszkedik a sík nyomvonalára, és(!) az iránypontja az irányvonalra.
Az ábrán e a tetszőleges síkbeli egyenes, amelynek nyom- és iránypontja kielégíti az előbb elmondott feltételeket.
Pont ábrázolásáról (az előző feladatból) tudjuk, hogy egy rá illeszkedő egyenes segítségével ábrázoljuk, ezért az e' felhasználásával kapjuk egy olyan P képét, amely illeszkedik e-re és így a síkra is.

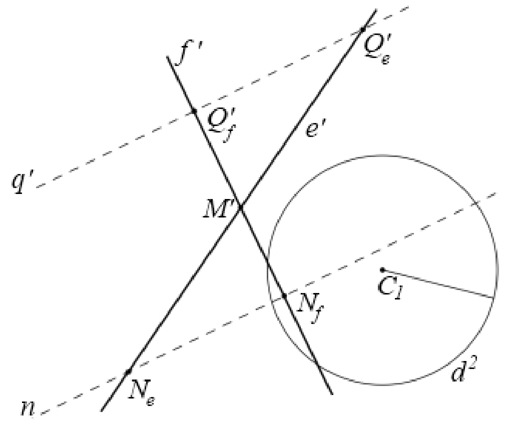


Alapfeladat: Ábrázoljunk centrális projekcióban párhuzamos, illetve metsző egyeneseket!
Megoldás: Először ábrázoljunk párhuzamos egyeneseket. Az e és f párhuzamos egyeneseknek a térben közös végtelen távoli pontjuk van (Q_∞), a nyompontjuk különböző. A Q_∞ képe legyen Q', amely mindkét egyenes iránypontja. Ezért e' és f' a képsíkon metsző(!) helyzetű, metszéspontjuk Q'.



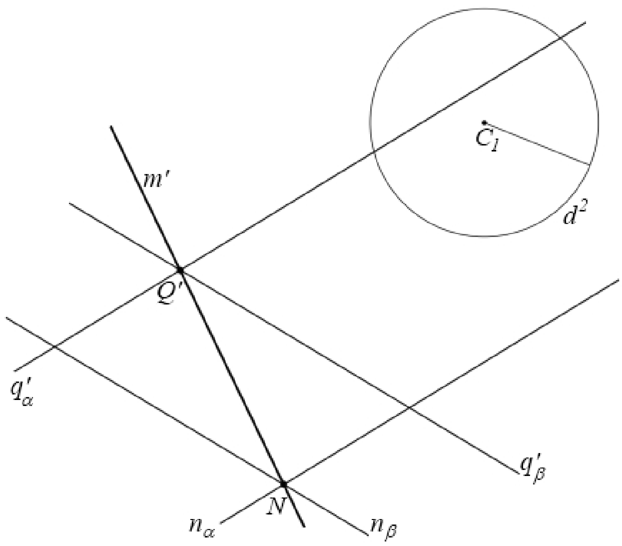
Metsző egyenesekről tudjuk, hogy létezik közös síkjuk. Legyen e és f egymást metsző egyenesek.
Az egyik egyenes képét tetszőlegesen felvehetjük: e', N_e és Q'_e. A másik egyenes centrális vetülete tetszőleges, és egy pontja is felvehető még tetszőlegesen: f' és N_f. A két egyenes közös síkjának nyomvonalát megadja az $\overleftrightarrow{N_eN_f} = n$ egyenes, ezzel párhuzamos a q' irányvonal, amely áthalad a Q'_e ponton.

Ahol a q' metszi az f' képet, ott található az f egyenes Q'_f iránypontja. Ezzel már adott f is, és a konstrukcióból világos, hogy metszi az e-t.



Alapfeladat: Határozzuk meg két sík metszésvonalát!

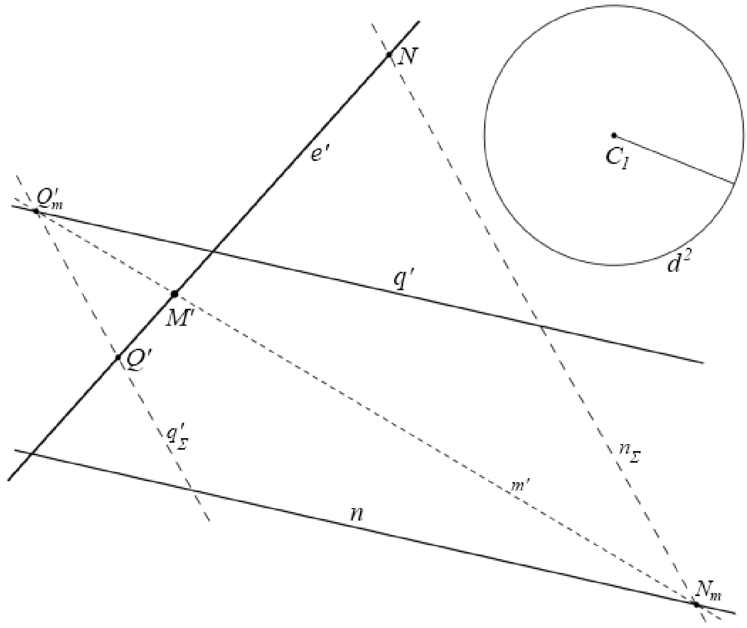
Megoldás: Legyen α és β két, egymást metsző sík. A keresett m metszésvonal mindkét síkban benne van, ezért az m nyompontja (N) illeszkedik mindkét sík nyomvonalára; az iránypontja (Q') illeszkedik mindkét sík irányvonalára. Innen már következik, hogy $\{N\} = n_\alpha \cap n_\beta$ és $\{Q'\} = q'_\alpha \cap q'_\beta$.
Az N és Q' pontok már megadják a metszésvonal képét: $\overleftrightarrow{NQ'} = m$.



Alapfeladat: Legyen adott egy sík nyom- és irányvonalával és egy azt metsző e egyenes nyom- és iránypontjával. Szerkesztendő a metszéspontjuk!

Megoldás: A megoldási módszert a kótás projekcióból „emeljük át”.
Vegyünk fel egy tetszőleges Σ síkot, amely illeszkedik az e-re. Határozzuk meg a Σ segédsík és az eredeti sík metszésvonalát: m.
Az m és az e egy síkban van, így a képen az M metszéspontjuk M' képe kijelölhető.

Ez az M azonban az eredeti síknak is eleme, hiszen az m (mint metszésvonal) benne volt abban a síkban.
Az M tehát a sík és az egyenes közös pontja, azaz a keresett metszéspont.



Egyenes képsíkba forgatása

Centrális vetítéseknél a párhuzamosságtartás hiánya és az a tény, hogy osztóviszony-tartás helyett csak kettősviszony-tartás áll fenn, megnehezítheti a metrikus feladatok végrehajtását. Éppen ezért egy egyenes képsíkba forgatása során megpróbálunk áttérni kótás projekcióba, ahol egy egyenes leforgatása könnyű feladat.

Legyen adott a centrális projekció (C_1, d^2), és abban egy tetszőleges e egyenes nyom- és iránypontjával (N és Q'). Határozzuk meg az e egy tetszőleges P pontjának távolságát a képsíktól, és az egyenes valódi nagyságát is!

Az e kótás projekcióbeli e_k képének meghatározása több lépésben történik. (A kótás projekció képsíkja megegyezik a centrális projekció képsíkjával, a kótás projekcióban fellépő egységet a d távolság helyettesíti.)

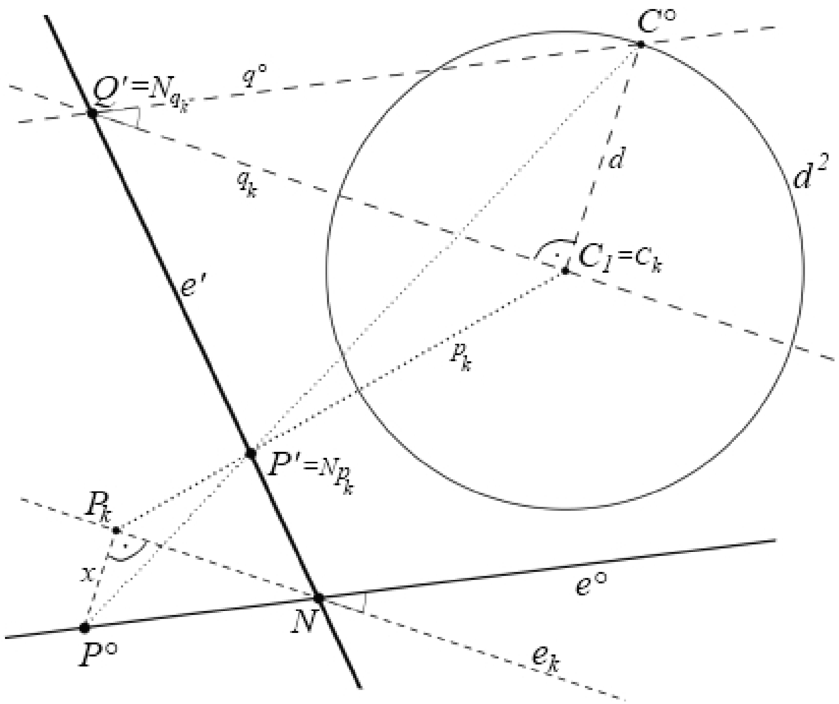
Határozzuk meg először annak az egyenesnek a képét kótás projekcióban, amely az egyenes Q_∞ végtelen távoli pontját centrálisan vetíti, azaz a $\overleftrightarrow{CQ_\infty}$ vetítőegyenest. Ennek a – q-val jelölt – vetítőegyenesnek a nyompontja éppen a Q'. A C merőleges vetülete C_1, kótája d, így a q egyenes merőleges vetülete: $\overleftrightarrow{Q'C_1} = \overleftrightarrow{N_{q_k}C_k} = q_k$.

Forgassuk le (kótás projekcióban) a q egyenest a q_k képe körül, a $C_k(d)$ pont segítségével: q°.

Mivel a kótás projekció párhuzamosságtartó, így az e egyenes N nyompontjába eltolva a q_k és q° egyeneseket, az e egyenes kótás projekcióbeli képéhez és annak leforgatottjához jutunk: e_k és e°. – Azonban még nem tudunk „mérni” ezen az egyenesen, mert hiányzik a P pont P_k merőleges vetülete.

Tekintsük most azt a p vetítőegyenest, amely a P pontot centrálisan vetíti. Ha a kótás projekció felől közelítjük meg a p ábrázolását, akkor ismerjük két pontját: a $C_k(d)$ pontot (a centrumot mint „tetszőleges” pontot) és a p-nek az N_{p_k} nyompontját, ami éppen a P' pont. (Ugyanezt a meggondolást használtuk fel a Q_∞ pont esetében is.) A $\overleftrightarrow{C_1P'} = p_k$ képre illeszkedik a P pont P_k kótás képe (hiszen p a P vetítőegyenese), és(!) a P_k rajta van az e_k-n is, ezért $p_k \cap e_k = \{P_k\}$.

A P_k kótás kép ismeretében P° már meghatározható, és x a képsíktól vett távolsága. Az e egyenes leforgatottja pedig a centrális projekcióban is az e° egyenes.
Az e° forgatott képen a mérés már lehetséges, egy forgatott pont centrális képe pedig a C_1 kép felhasználásával azonnal megkapható.



Megjegyzés: Vegyük észre, hogy p_k tekinthető úgy is, mint a P pontot merőlegesen(!) vetítő egyenes centrális(!) képe (aminek az iránypontja C_1).
Az is könnyen igazolható, hogy C°, P' *és* P° *egy egyenesre illeszkedik.*

Megjegyzés: Sík leforgatásához, valamint sík és egyenes merőlegességének képi feltételéhez projektív geometriai ismeretek szükségesek. (Például: Egy egyenesre merőleges sík irányvonala az egyenes iránypontjának a distanciakörre vonatkozó antipolárisa.)

Gyakorló feladatok

1. Ábrázoljunk párhuzamos síkokat!

2. Ábrázoljunk képsíkkal párhuzamos és képsíkra merőleges egyeneseket!

3. Ábrázoljunk képsíkkal párhuzamos és képsíkra merőleges síkokat!

4. Legyen adott egy sík nyom- és irányvonalával. Szerkesztendő a síkra nem illeszkedő, a síkkal párhuzamos egyenes!

5. Ábrázoljuk az eltűnési sík egy pontját!

6. Léteznek-e olyan metsző egyenesek, amelyeknek képei a centrális projekcióban párhuzamosak?

7. Léteznek-e olyan párhuzamos egyenesek, amelyeknek képei a centrális projekcióban párhuzamosak?

8. Legyen adott egy pont (tartója felvételével) és egy egyenes nyom- és iránypontjával. Szerkesztendő a pont és az egyenes síkja!

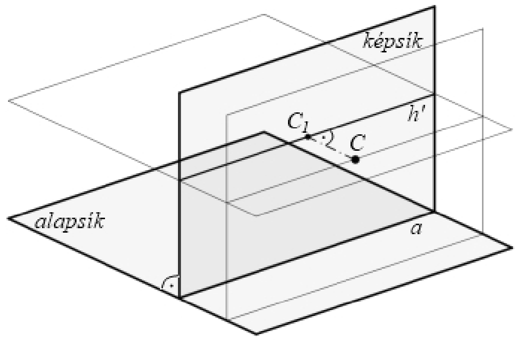
9. Legyen adott egy pont (tartójával) és egy egyenes nyom- és iránypontjával. Szerkesztendő a ponton átmenő, az egyenessel párhuzamos egyenes!

10. Legyen adott egy egyenes nyom- és iránypontjával. Vegyünk fel ezen az egyenesen egy 4 cm hosszúságú szakaszt!

4.2. A perspektíva alapjai

A *perspektíva* egy olyan speciális centrális projekció, ahol a képsíkot függőleges helyzetűnek tekintjük, és az ábrázolandó objektumokat egy arra merőleges síkra helyezzük. Ezt a „vízszintes” síkot *alapsík*nak nevezzük.
Az alapsík végtelen távoli egyenesének képe a képsíkon a *horizontvonal* (h'), az alapsík és a képsík metszésvonala az *alapvonal* (a).

Az előállításból nyilvánvaló, hogy a horizont- és alapvonal távolsága megegyezik a C centrum alapsíktól való távolságával. A C merőleges vetülete a képsíkon a C_1 pont.

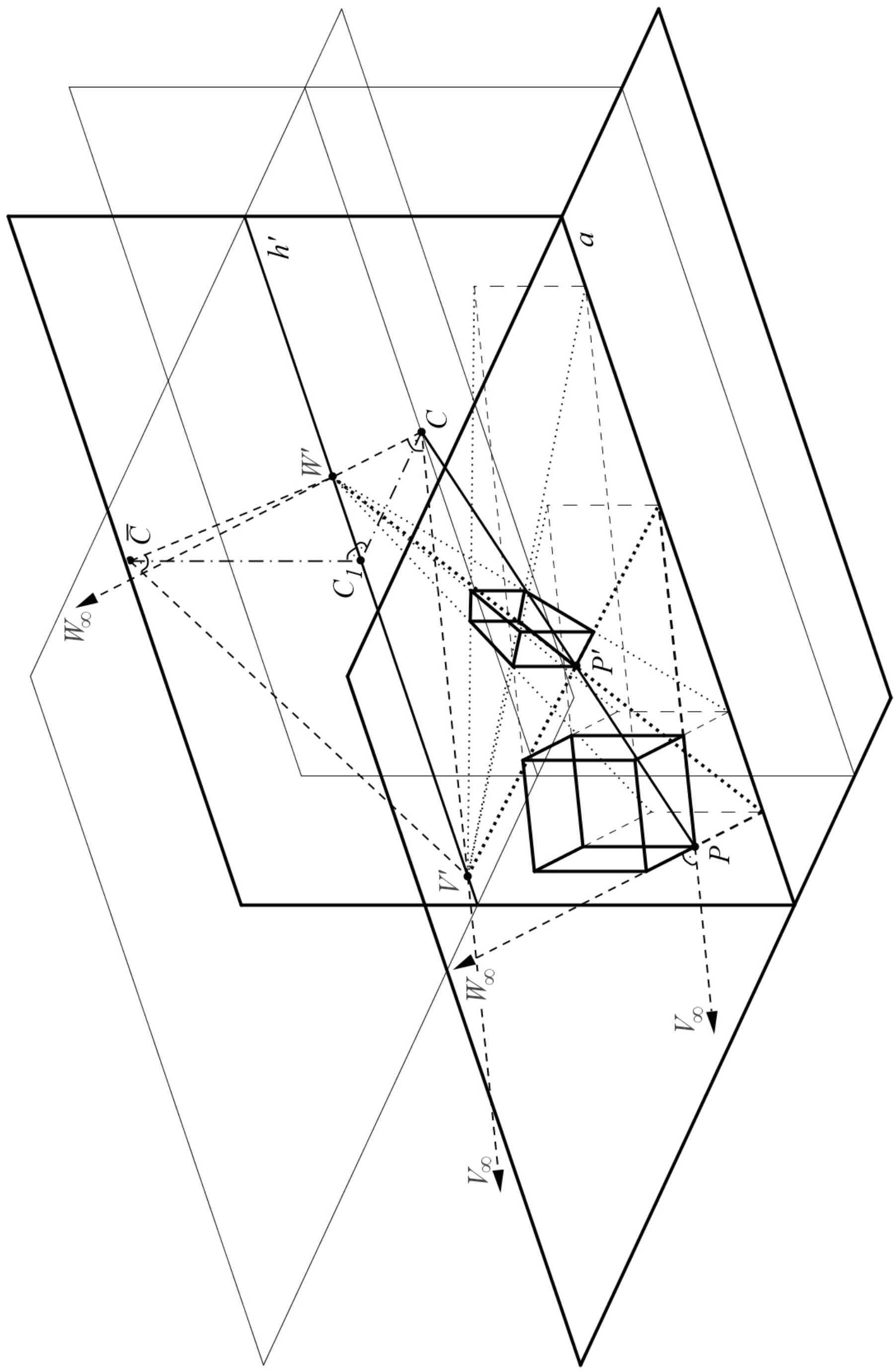


Az is nyilvánvaló, hogy az alapsíkra merőleges egyenesek képei szintén merőlegesek az alapsíkra; míg az alapsíkban fekvő, vagy azzal párhuzamos egyenesek képei a horizontvonalon találkoznak.

A tárgyakat általában a képsík „mögött”, a centrumot nem tartalmazó féltérben helyezzük el. Ennek oka az, hogy a perspektíva célja az emberi látás reprodukálása.

Kocka ábrázolása

A fentiek szemléltetésére tekintsük a következő ábrát, amelyen egy alapsíkon álló kocka képének meghatározását mutatjuk be. A kocka egyik csúcsa a P pont, amelynek képe a P'.



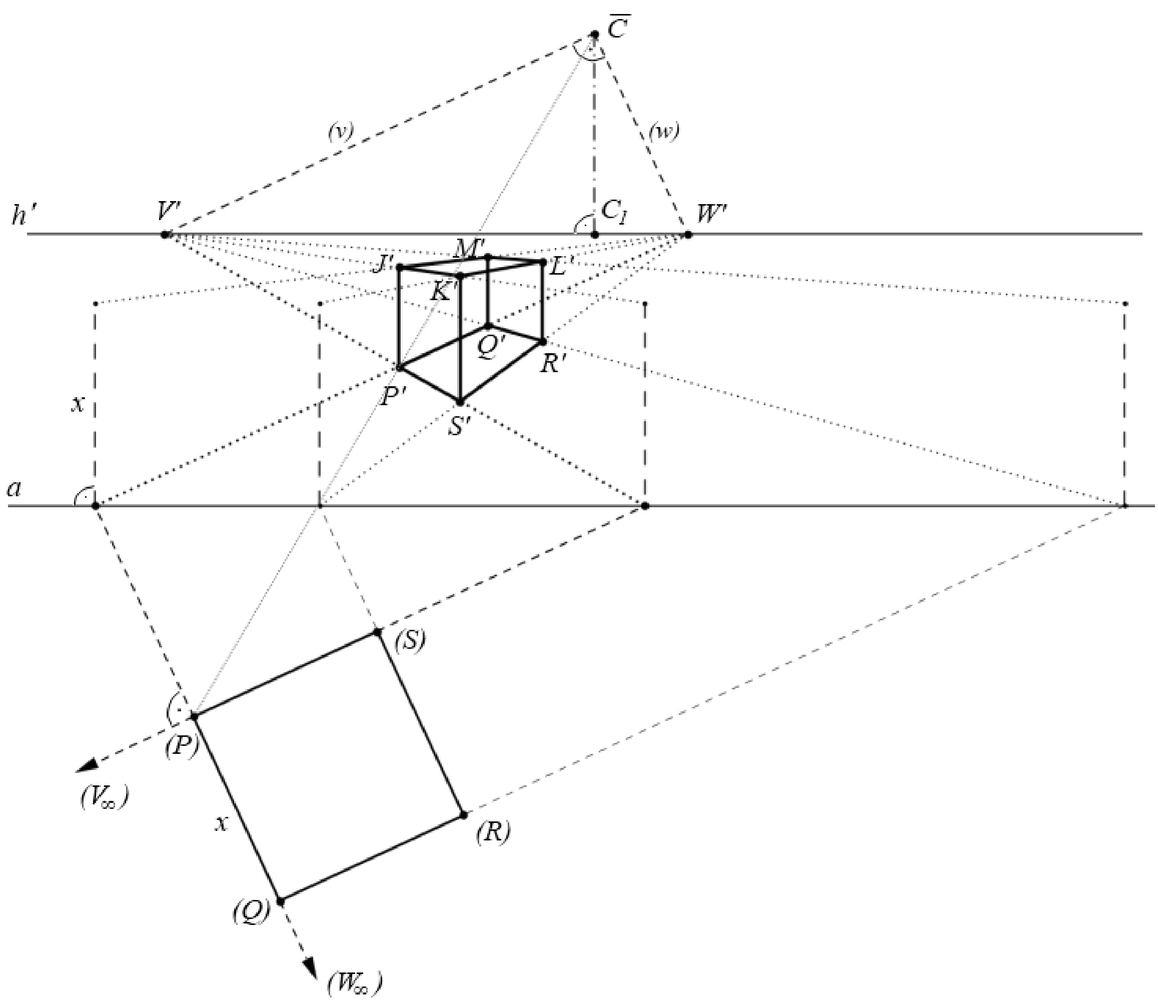
Az ábrán látható, hogy a kocka függőleges élei a képen is függőlegesek maradtak, illetve a kocka képsíkon fekvő vagy azzal párhuzamos élegyeneseinek képei a horizontvonalon találkoznak. Ezeknek az éleknek ugyanis közös a végtelen távoli pontjuk – V_∞ és W_∞ –, a horizontvonal pedig az alapsík végtelen távoli egyenesének a képe.

Szerkesszük meg a fenti kockát a megadott perspektívában!

„Hajtsuk össze" a perspektíva rendszerét: a C centrumot a h' horizontvonal fölé, az alapsíkot pedig (az alapvonal körül) az alapvonal alá hajtjuk be.

Szerkesszük meg az alapsíkon a kocka $PQRS$ alapját: $(P)(Q)(R)(S)$. (Az élek hossza x.) Az alap élegyenesei egy-egy végtelen távoli pontban találkoznak: a V_∞ és W_∞ pontokban. E két pontot a C centrum véges helyzetbe hozza (a horizontvonalon). A $\overleftrightarrow{CV_\infty}$ és $\overleftrightarrow{CW_\infty}$ vetítőegyenesek forgatott képei a (v) és (w) egyenesek. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy $\overline{C}$-ből párhuzamost húzunk a kocka alapéleivel. A (v) és (w) egyenesek metszéspontja a h'-vel adja a végtelen távoli pontok képeit: V' és W'.

Most meghatározzuk az alapnégyzet képét. A négyzet oldalegyenesei elmetszik az alapvonalat 4 pontban. Ezek a pontok fixpontok, hiszen az alapvonal az alapsík és a képsík metszésvonala. Ezeket a pontokat összekötve a V' vagy W' képekkel kirajzolódik az alapnégyzet képe is: $P'Q'R'S'$.



Már csak a fedőlap pontjai hiányoznak. Tekintsük a $\overleftrightarrow{PQ}$ egyenes forgatott és perspektív képeit. Szeretnénk megszerkeszteni a P fölött elhelyezkedő J pontot, amelynek távolsága P-től x. A $\overleftrightarrow{PQ}$ alapvonalon lévő pontja fölé (az alapvonalra merőlegesen,

azaz „függőlegesen”) vegyük fel az x élhosszúságot. Ha a $\overline{PJ}$ kockaélt a $\overleftrightarrow{PQ}$ mentén közelítenénk a képsíkhoz (az alapvonalhoz), akkor éppen az imént megszerkesztett x szakaszhoz jutnánk. Így ha az x szakasz másik végpontját összekötjük a W' ponttal, megkapjuk annak az egyenesnek a képét, amelyen rajta van a J pont és párhuzamos a $\overleftrightarrow{PQ}$-val (tehát a $\overleftrightarrow{PQ}$-val párhuzamos J-n átmenő élegyenest). Ezzel megtaláltuk egy olyan egyenes képét, amelyen J' rajta van.
Mivel függőleges egyenesek képei függőlegesek, ezért a P'-ből induló, az alapvonalra merőleges egyenes kimetszi az előbbi egyenesből a J'-t.

Hasonlóan kell eljárni a hiányzó K', L' és M' képeknél is.
Egy másik lehetőség a hiányzó 3 pont képének meghatározására, ha a V' és W' pontokat használjuk fel, és az alaphoz hasonlóan az azokból kiinduló egyenesek metszéspontjait határozzuk meg.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy tulajdonképpen az alapsík egy képsíkba forgatását hajtottuk végre; továbbá *az alapsík beforgatottja és a képe között centrális kollineáció van*, ahol a centrum $\bar{C}$, a tengely az a alapvonal, egyik ellentengely a h'.

Metszési átviteli eljárás

A *metszési átviteli eljárás* lényege, hogy egy objektum Monge-projekcióban adott képeiből kiindulva perspektív (szemléletes) képet állítsunk elő.

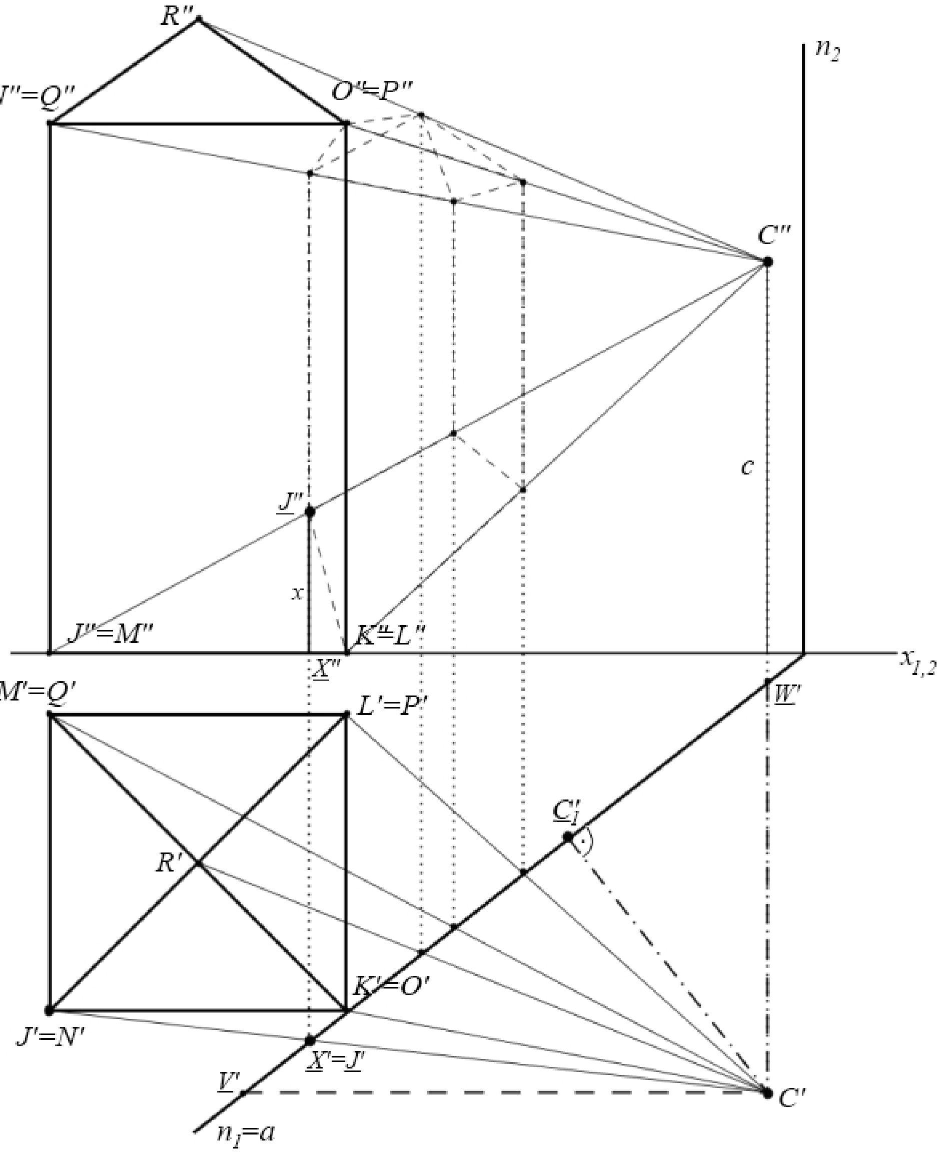
Az alapsík legyen a K_1 képsík, a perspektíva képsíkja egy első vetítősík.

Tekintsük például egy torony *Monge-projekció*beli két képét, és vegyünk fel egy első vetítősíkot (mint a perspektíva képsíkját). Az egyszerűség kedvéért a torony egyik oldaléle illeszkedjen erre a síkra. Legyen továbbá adott a perspektíva C centrumának két képe is.
Világos, hogy ekkor az első vetítősík n_1 első nyomvonala az a alapvonal.

A torony $J - R$ pontjait kössük össze a C centrummal.
Ahol ezek az egyenesek (mint vetítőegyenesek a perspektívában) metszik az adott első vetítősíkot (a leendő perspektíva képsíkját), ott találjuk a torony pontjainak perspektív képeit Monge-projekcióban ábrázolva. (A perspektív képeket itt aláhúzással jelöltük.)

A perspektív képek a Monge-projekcióban egy kivétellel jelöletlenül szerepelnek. Elegendő ugyanis egyetlen pont átvitelét megmutatni, a többit ugyanolyan szerkesztéssel kapjuk.
Válasszuk ki a J pontot, amelynek „perspektív vetítőegyenese” a $\overleftrightarrow{JC}$ egyenes. Keressük a vetítősíkkal alkotott metszéspontját. Az első vetítősíkokra igaz, hogy minden egyes pontjuk első képe éppen az n_1-en nyugszik. Ezért $\overleftrightarrow{J'C'} \cap n_1 = \{\underline{J}'\}$. Rendezővel kapjuk a $\overleftrightarrow{J''C''}$-n a $\underline{J}''$ pontot.
A $\underline{J}$ K_1-től (mint alapsíktól!) való távolsága x, ezt a második képen olvashatjuk le.

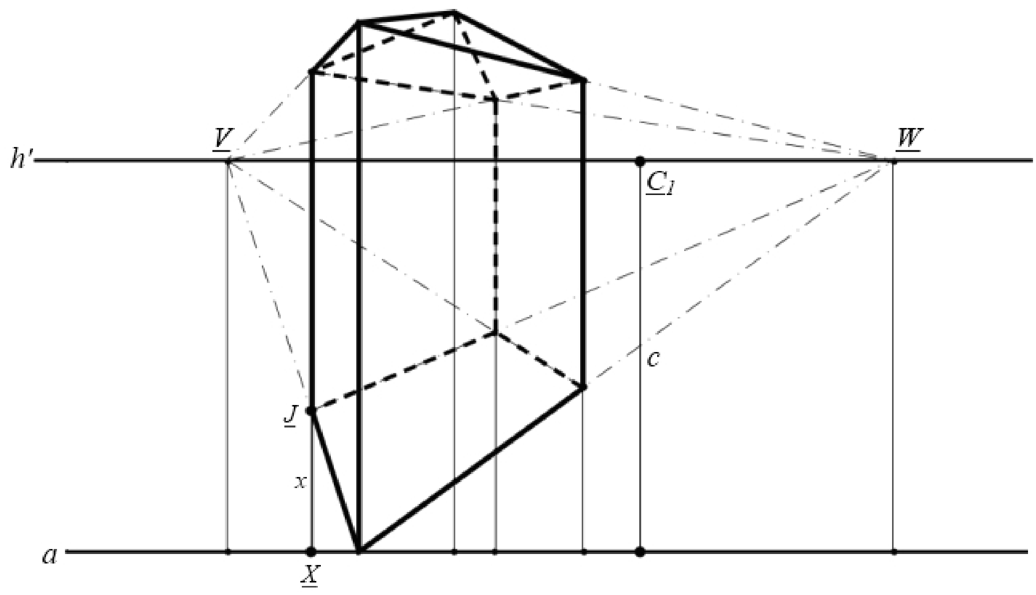
Végezzük el ezt a szerkesztést az összes többi pont esetében is. (A második képen szaggatott vonallal jelöltük a toronyról kapott perspektív kép Monge-projekcióbeli második képét.)
A torony alapéleinek egyeneseinek végtelen távoli pontjai legyenek a V_∞ és W_∞ pontok, amelyeket a C centrum a perspektíva képsíkjára bevetít. Ezeket felülnézetben (az első képeken) könnyen szerkeszthetjük: $\underline{V}'$ és $\underline{W}'$, ahol $\overleftrightarrow{C\underline{V}}\|\overleftrightarrow{JK}$ és $\overleftrightarrow{C\underline{W}}\|\overleftrightarrow{JM}$.



Most vegyük fel a *perspektíva* rendszerét. Az alapvonal és a horizontvonal közötti távolság az alapsík és a centrum távolságával egyezik meg – ez a második képen leolvasható c szakasz.
A perspektív kép már a Monge-projekcióban „elkészült”, az adott első vetítősíkban nyugszik. Ezért ezt a vetítősíkot minden pontjával együtt, bármilyen módszer segítségével valódi nagyságban kell látnunk.

Mérjük át az n_1-en (mint alapvonalon) található összes szakaszt, a perspektíva a alapvonalára – például $\underline{C}'_1$-ből kiindulva. A $\underline{J}$ pont n_1-re eső merőleges vetülete legyen $\underline{X}$, amelyet a szakaszok átmásolása során feltüntettünk a perspektíva rendszerében is.
Az biztos, hogy a $\underline{J}$ perspektív kép rajta van az $\underline{X}$-ből kiinduló, a-ra merőleges egyenesen. Másrészt ismerjük a $\underline{J}$ alapvonaltól való távolságát is: x. Ezért az $\underline{X}$-ből induló egyenesre mérjük fel ($\underline{X}$-ből) az x szakaszt, és megkapjuk a keresett $\underline{J}$ perspektív képet.

Elvégezve ezt az átmérést a többi pont esetében is, kirajzolódik a torony perspektív képe.
Ha átmásoljuk a $\underline{V}$ és $\underline{W}$ iránypontokat is, az átmérések száma csökkenthető.



Gyakorló feladatok

1. Szerkesszük meg perspektívában egy 4 cm alapélű, 8 cm magasságú négyzet alapú egyenes hasáb képét!

2. Szerkesszük meg perspektívában egy 4 cm alapélű, 6 cm magasságú szabályos háromszög alapú egyenes hasáb képét!

3. Legyen adott Monge-projekcióban egy K_1-en álló szabályos hatszög alapú ferde gúla, valamint egy azt metsző sík. Szerkesszük meg a gúla síkmetszetét, majd készítsen a csonka gúláról szemléletes képet (perspektívában) a metszési átviteli eljárás segítségével!

5. fejezet

Kiegészítések

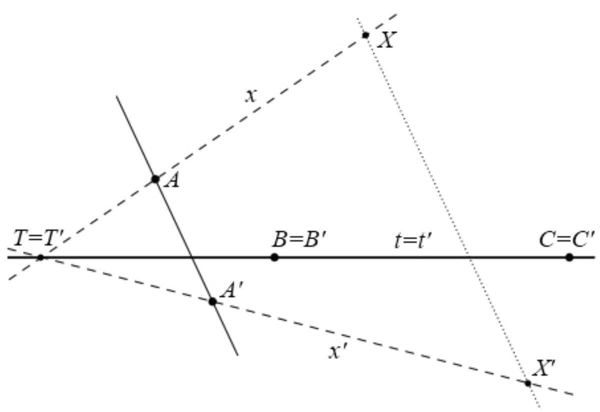
5.1. Tengelyes affinitás és centrális kollineáció

Tengelyes affinitás

Két (nem feltétlenül különböző) sík közötti **affinitáson** bijektív, egyenestartó és osztóviszony-tartó leképezést értünk. Egy affinitás *tengelyes affintás*, ha van egy pontonként fix egyenese, amelyet *tengely*nek nevezünk. Belátható, hogy ekkor a tengelyes affinitásnak van iránya is. Egy tengelyes affinitás *irány*án egy olyan egyenesállást értünk, amellyel minden pontot és a pont képét összekötő egyenes párhuzamos.
Egy síkok közötti affinitást egyértelműen meghatároz 3 általános helyzetű pont és azok képei. Tengelyes affinitás esetén általában megadjuk a tengelyt és egy tetszőleges pontot a képével együtt.

Alapfeladat: Legyen adott egy tengelyes affinitás tengelyével és egy megfelelő pontpárral. Határozzuk meg egy tetszőleges pont képét!

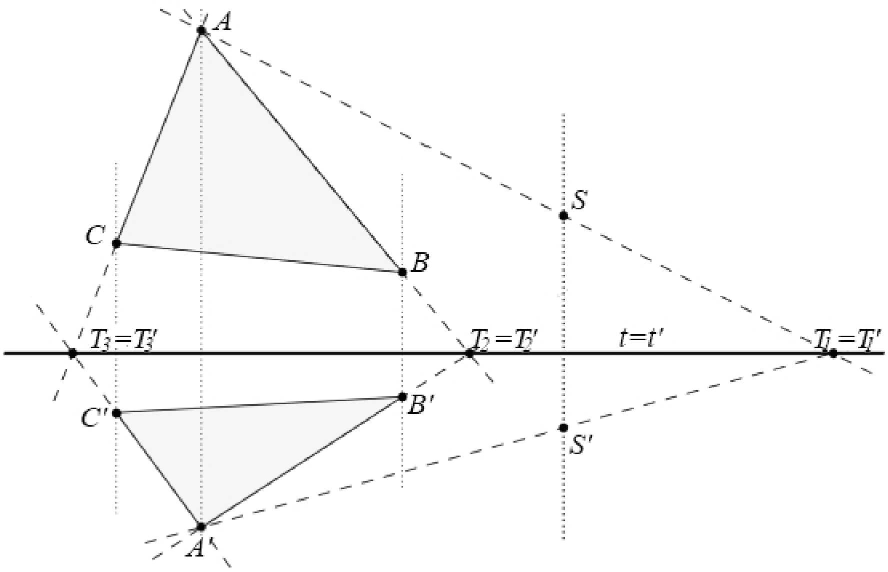
Megoldás: Legyen adott a $t = t'$ tengely ($B = B'$ és $C = C'$ tetszőleges fixpontok a tengelyen) és az A pont az A' képével. (Ekkor a tengelyes affinitás – mint affinitás – egyértelműen adott, mert ismerjük 3 általános helyzetű pontot a képeikkel együtt.) Az $\overleftrightarrow{AA'}$ egyenes adja a tengelyes affinitás irányát; bármilyen másik pont esetén, a pont és képe által meghatározott egyenes párhuzamos $\overleftrightarrow{AA'}$-vel.
Legyen X tetszőleges pont, keressük az X' pontot.



Tekintsük az $\overleftrightarrow{AX} = x$ egyenest. Az x egyenes elmetszi a tengelyt egy T pontban. Mivel a T rajta van a tengelyen, így $T = T'$.
Így az x egyenes képéből ismerünk két pontot: A'-t és T'-t, ezért $x' = \overleftrightarrow{A'T'}$. Az illeszkedéstartás miatt ezen az x' egyenesen fekszik az X' pont is.
Húzzunk párhuzamost a tengelyes affinitás irányával $\left(\overleftrightarrow{AA'}\right)$ az X-en keresztül – ezen az egyenesen szintén rajta van az X' pont. Ahol ez a párhuzamos metszi az x'-t, ott találjuk az X' pontot.

A fenti módszer komplexebb feladatok esetén is alkalmazható.
Feladat: Adott egy merőleges (irányú) tengelyes affinitás a $t = t'$ tengelyével és egy (S, S') megfelelő pontpárral. Legyen adott egy $ABC\triangle$ háromszög. Szerkesztendő a háromszög $A'B'C'\triangle$ képe!

Útmutató: Az (S, S') pontpár segítségével először határozzuk meg például az A' pontot. Az A' ismeretében a B' és C' pár (ugyanolyan módon) szerkeszthető.



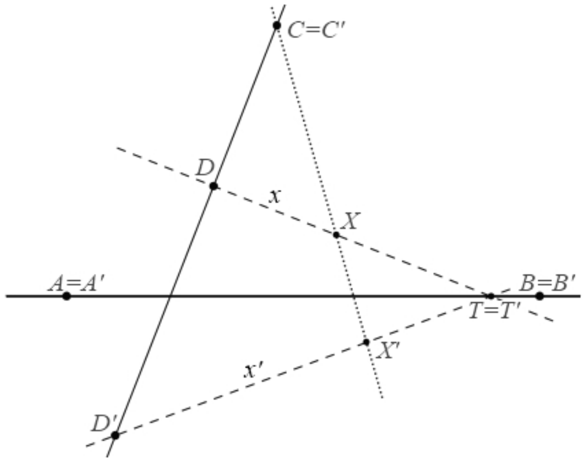
Centrális kollineáció

Két (nem feltétlenül különböző) sík közötti **kollineáción** – a végtelen távoli pontokkal kibővített síkok közötti – bijektív, egyenestartó és kettősviszony-tartó leképezést értünk. Ha a kollineációnak van egy pontonként fix egyenese(*tengely*e), akkor *centrális kollineáció*ról beszélünk. Ekkor létezik egy olyan fixpont, amelyre illeszkedő minden egyenes invariáns, ezt a pontot *centrum*nak nevezünk.
Egy síkok közötti kollineációt egyértelműen meghatároz 4 általános helyzetű pont és azok képei. Egy centrális kollineációt legtöbbször tengelyével, centrumával és egy megfelelő pontpárral adunk meg.

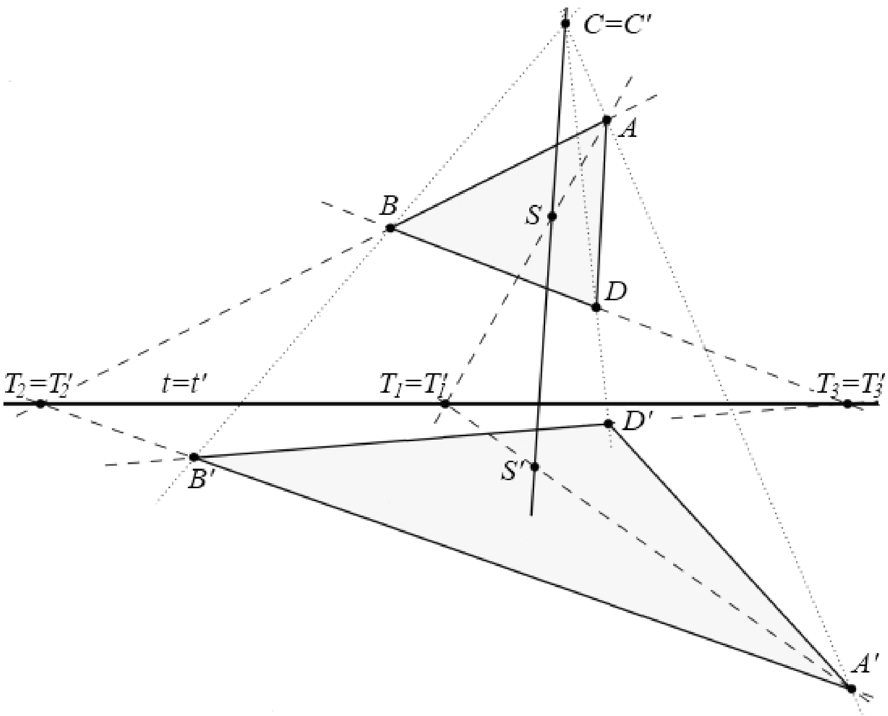
Vegyük észre, hogy a tengelyes affinitás tulajdonképpen egy speciális centrális kollineáció, ahol a centrum „végtelen távoli".

Alapfeladat: Adott egy centrális kollineáció C centrumával, $\overleftrightarrow{AB}$ tengelyével és egy (D, D') megfelelő pontpárral. Szerkesszük meg egy tetszőleges X pont képét!

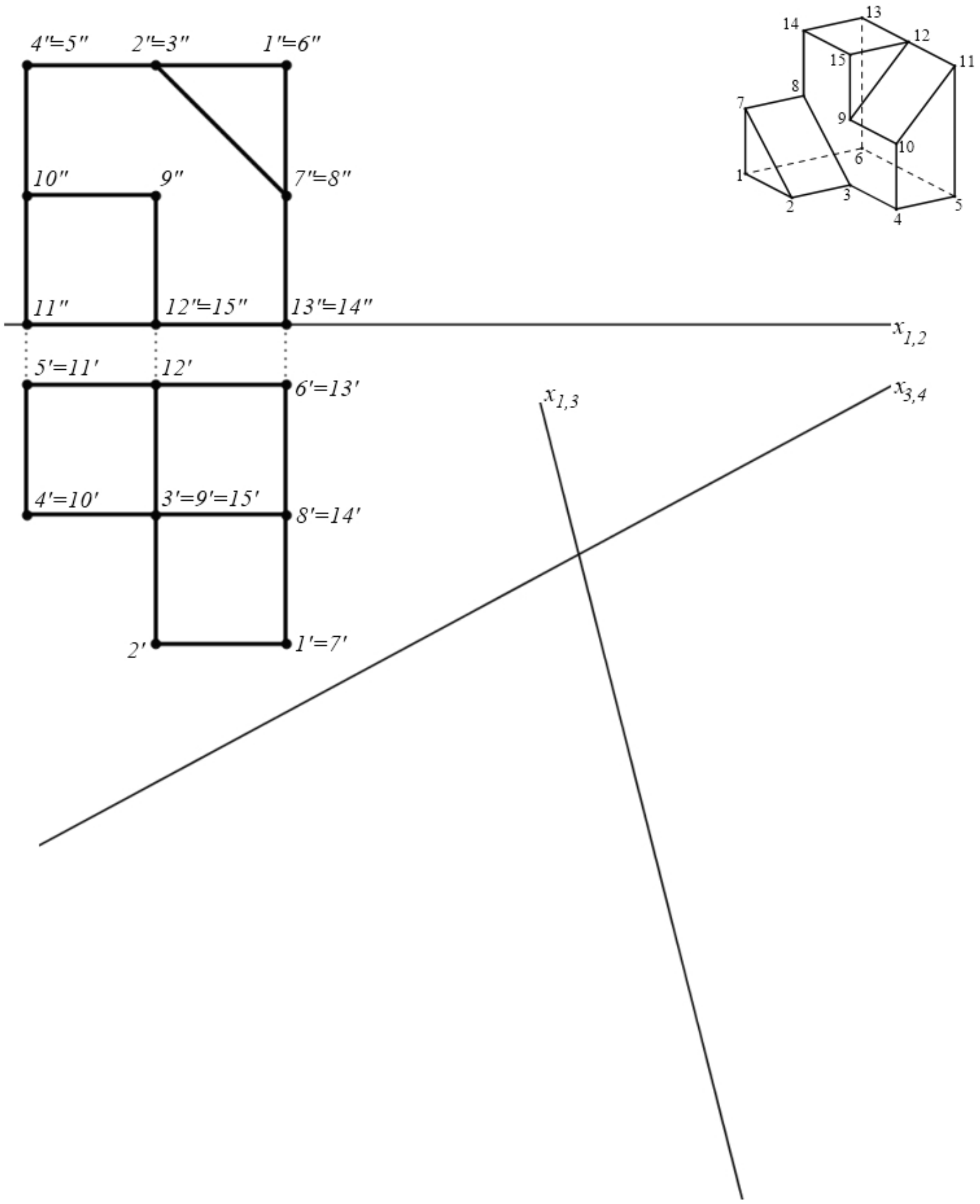
Megoldás: A szerkesztés teljesen analóg a tengelyes affinitásnál látottakkal – a különbség annyi, hogy a párhuzamos irányok helyett most a C centrumon áthaladó (invariáns) egyenesek kötik össze a pontokat a képeikkel.



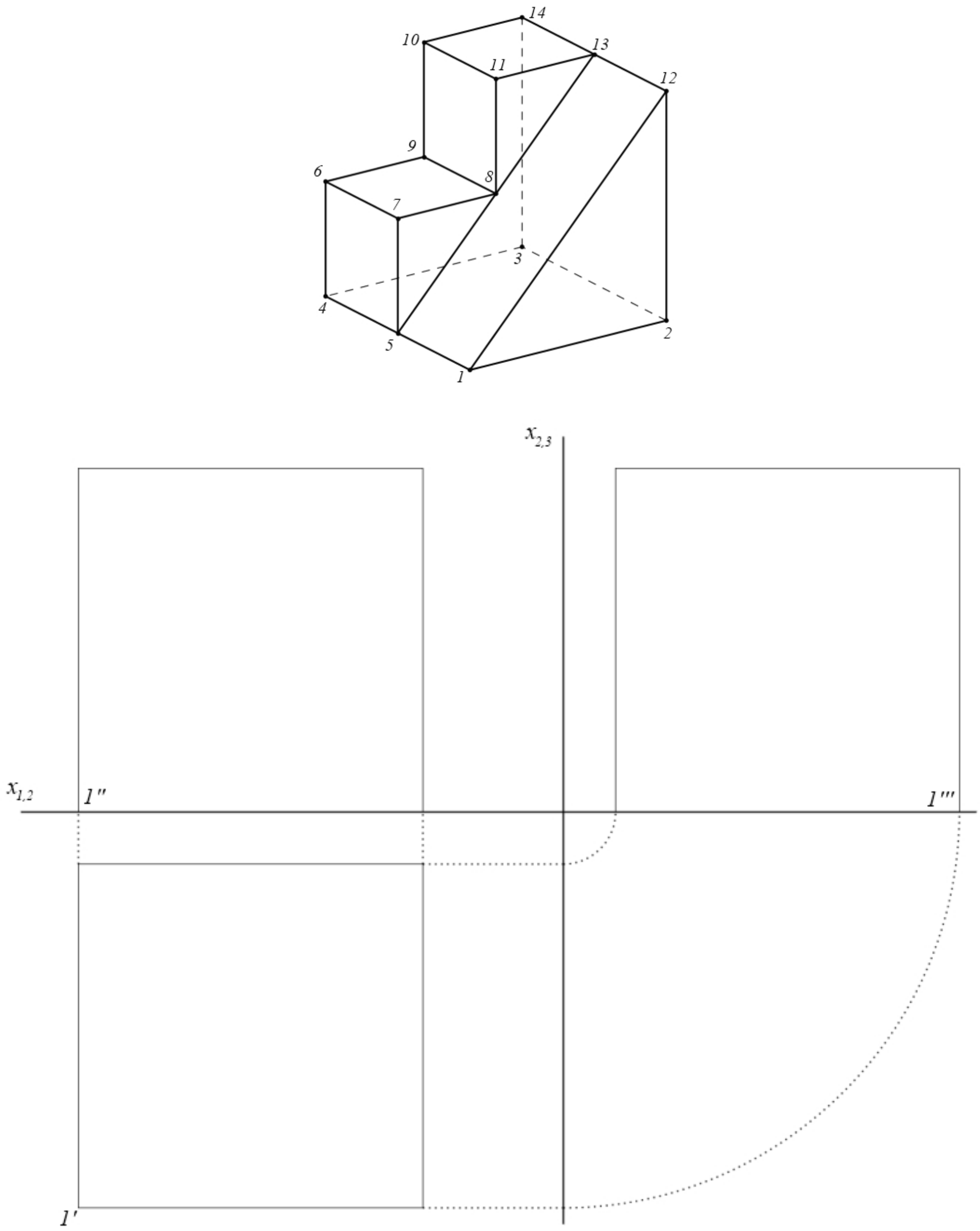
Feladat: Adott egy centrális kollineáció $C = C'$ centrumával, $t = t'$ tengelyével és egy (S, S') megfelelő pontpárral. Legyen adott egy $ABD\triangle$ háromszög. Szerkesztendő a háromszög $A'B'D'\triangle$ képe!



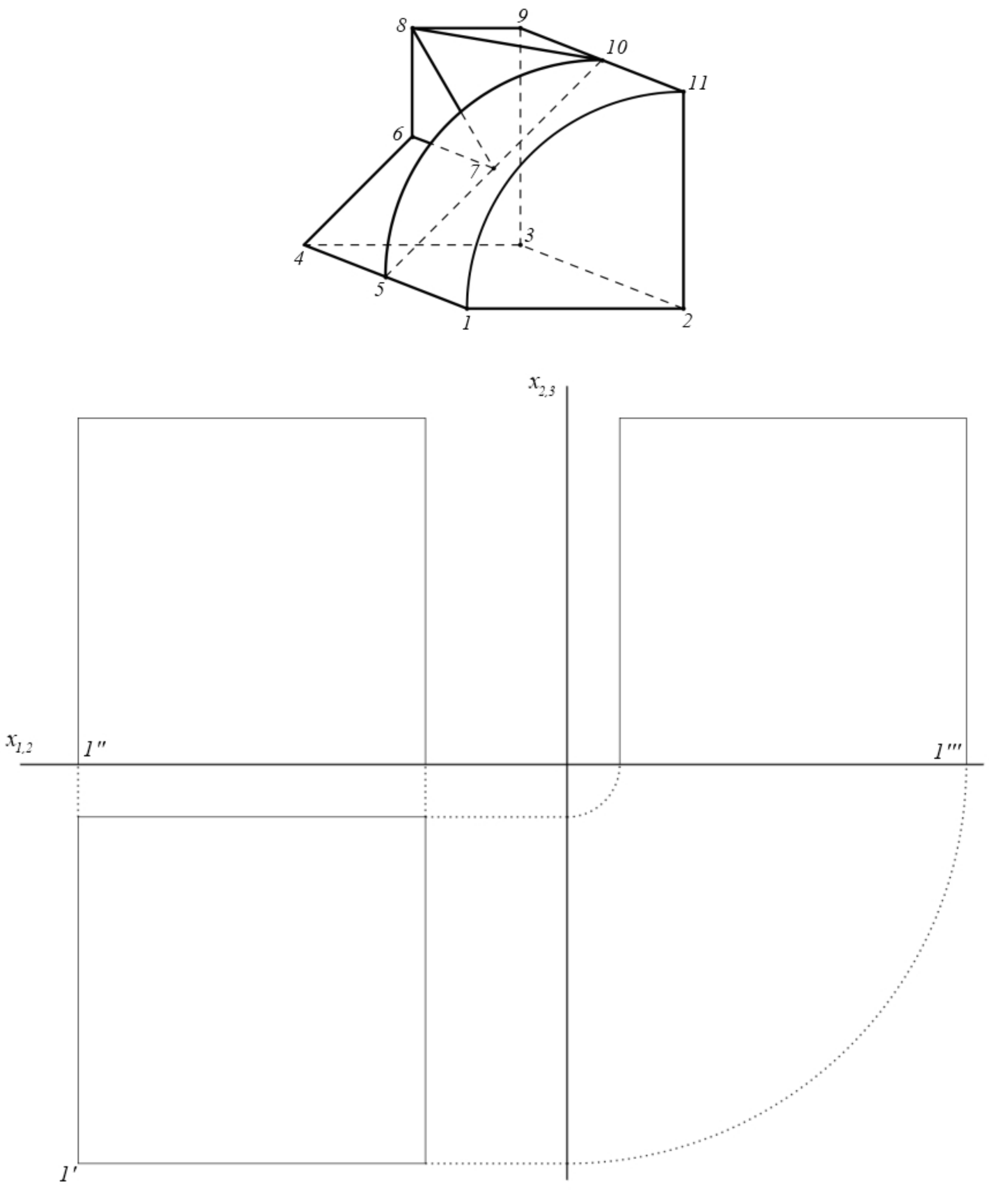
5.2. Feladatlapok



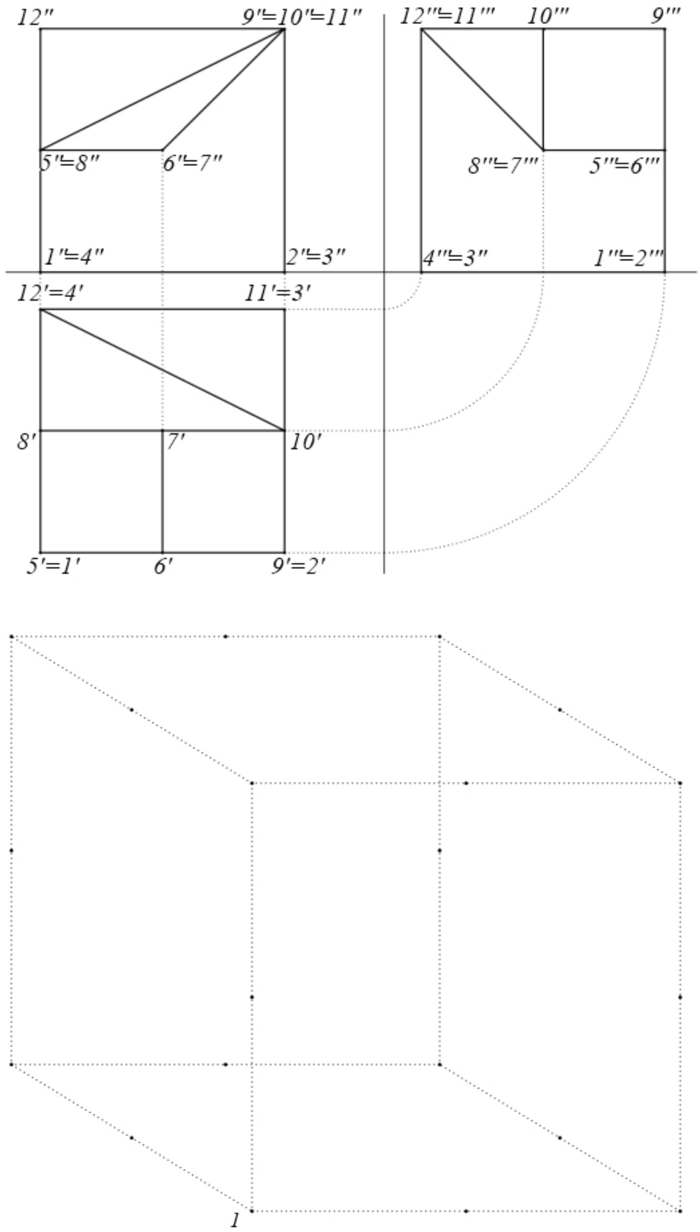
1. feladatlap: Képsíktranszformáció



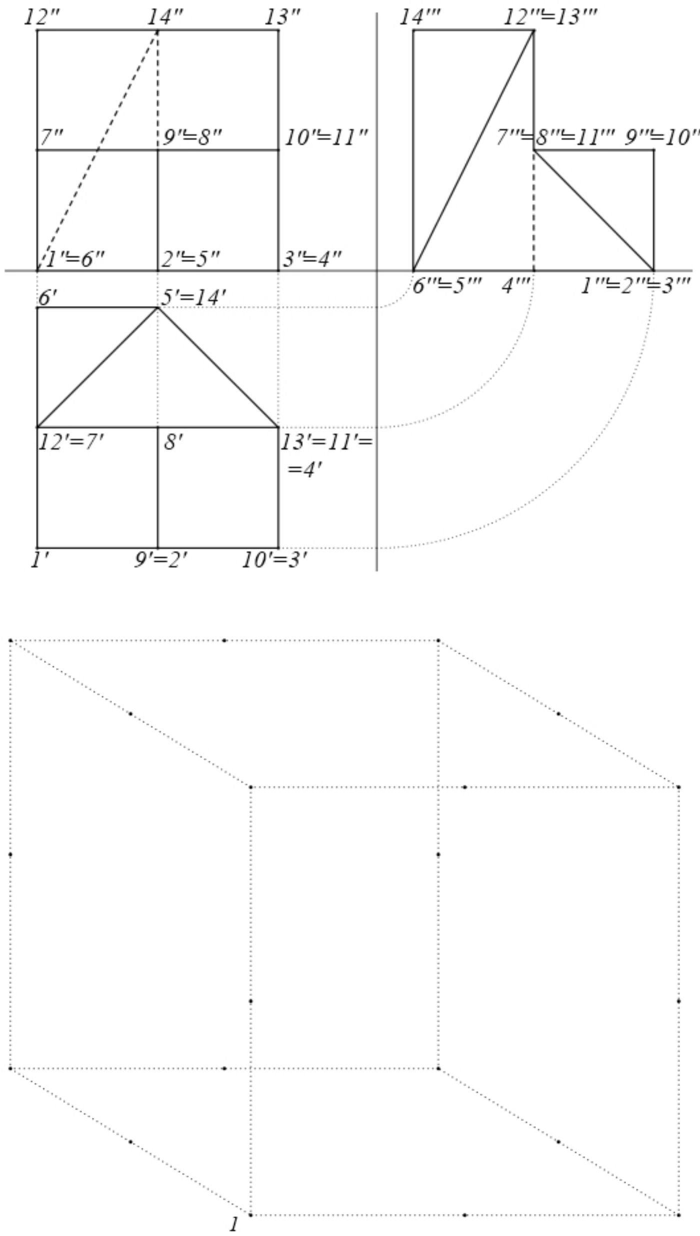
2. feladatlap: Csonkolt kocka vetületei 1.



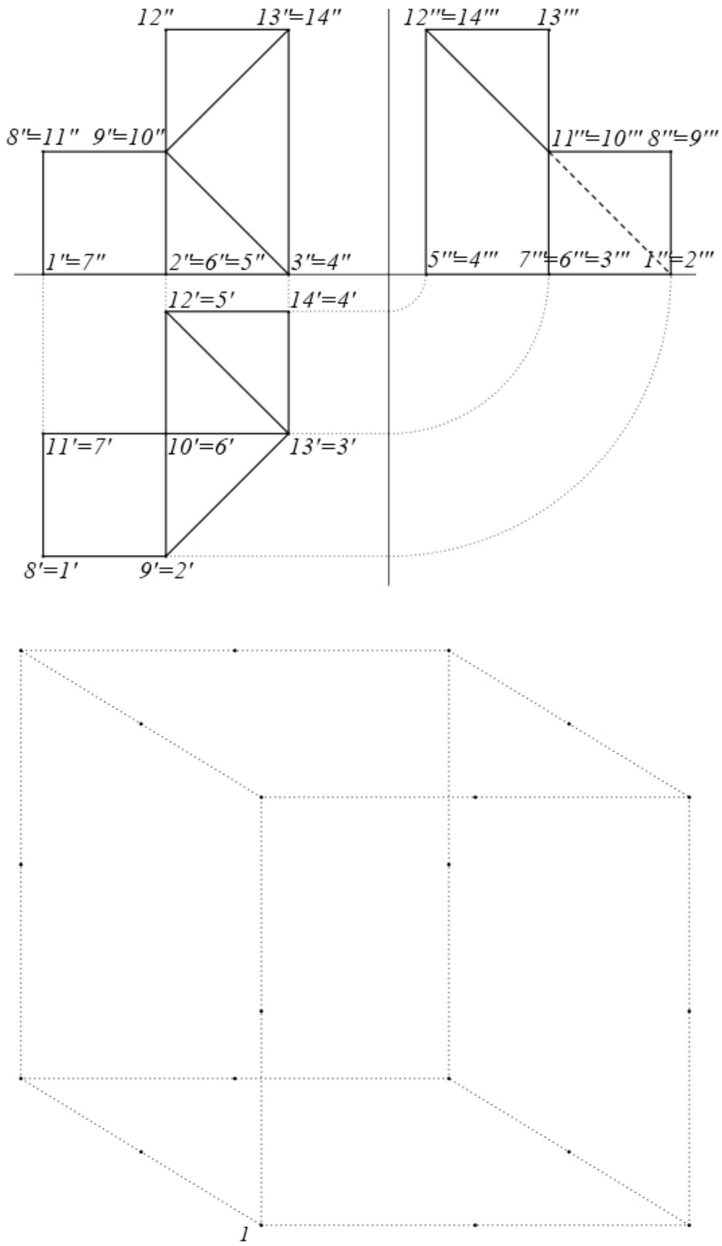
3. feladatlap: Csonkolt kocka vetületei 2.



4. feladatlap: Csonkolt kocka ábrázolása 1.



5. feladatlap: Csonkolt kocka ábrázolása 2.



6. feladatlap: Csonkolt kocka ábrázolása 3.