Pék Johanna

MATEMATIKA FELADATGYŰJTEMÉNY

Nem matematika alapszakos hallgatók számára

Tartalomjegyzék

Előszó

E jegyzet elsősorban nem matematika szakos hallgatók számára készült gyakorló példatár.

A feladatgyűjtmény célja, hogy a matematikának a természettudományokban gyakran alkalmazott fejezeteit (pontosabban azok alapjait) minél egyszerűbben tárgyalja és a kapcsolódó feladatokat/algoritmusokat begyakoroltassa.
Így a szükséges elméleti alapokat igyekeztünk könnyed stílusban megfogalmazni, még akkor is, ha ez olykor a matematikában kívánatos precizitás rovására megy.

További gyakorláshoz számtalan könyv, feladatgyűjtemény és jegyzet szerezhető be. Ezekből egy rövid lista a jegyzet végén található.

A feladatgyűjteménnyel kapcsolatos észrevételeket, felbukkanó hibákat és elírásokat a pekj@arch.bme.hu e-mailre lehet elküldeni.

Pék Johanna

1. fejezet

Lineáris algebra

1.1. Mátrixok

Rövid elméleti összefoglaló

Egy $n \times m$ típusú *mátrix*on egy n db sorból és m db oszlopból álló számtáblázatot értünk:

$$A = (a_{ij})_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Két mátrix összegét, illetve szorzatát is értelmezhetjük, ennek kiszámítását lásd a gyakorlati példáknál.

Ha egy mátrixnak ugyanannyi sora van, mint ahány oszlopa, akkor négyzetes/kvadratikus mátrixnak nevezzük. Legyen A egy 2×2 vagy 3×3 típusú mátrix. Ekkor az A mátrix *determinánsa* az alábbi módon kapható szám:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Az itt bemutatott módszert *Sarrus-szabály*nak nevezzük, amely csak 2×2 vagy 3×3 típusú mátrixok esetében működik. Ha $n \geq 3$, akkor az $n \times n$-es négyzetes mátrix determinánsát ún. aldeterminánsok segítségével is kiszámíthatjuk (*Kifejtési tétel*):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots \pm$$

$$\pm\, a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

A számítás elve tehát a következő: Kiválasztunk egy tetszőleges sort (itt az elsőt), tekintjük annak az első elemét, és a hozzá tartozó sort és oszlopot töröljük. Így egy $(n-1) \times (n-1)$-es négyzetes mátrixot kapunk, amelynek a determinánsát kiszámítjuk és megszorozzuk a kiválasztott sor első elemével. A kiválasztott sor második eleméhez tartozó sort és oszlopot ismét kitöröljük, így megint kiszámítjuk az így kapott kisebb mátrix determinánsát és megszorozzuk a kiválasztott sor második elemével. A kiválasztott sor minden egyes tagjához tartozik egy ilyen ún. aldetermináns, amelyet az adott elemmel megszorzunk. Az így kapott számokat pedig úgy adjuk össze, hogy a páratlan sorszámú elemekhez tartozó szorzat pozitív előjelű, míg a páros sorszámú elemekhez tartozó szorzat negatív előjellel vesz részt az összeadásban. Páros indexű sor kiválasztásakor az előjelek felcserélődnek.
Az előjelek sorrendjét könnyen megjegyezhetjük az ún. „sakktábla-módszerrel”:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots & - \\ - & + & - & + & \dots & + \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ - & + & - & + & \dots & + \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: A kifejtési tétel nem csupán sorokra, de oszlopokra is igaz.
A könnyebb megértés érdekében lásd a kidolgozott példákat.

Feladatok

1. Legyen A és B két 3×4-es mátrix. Számítsuk ki a $3A + B$ mátrixot, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az $A+B$, $A-B$, $3A-2B$, AC, CA, $(A+B)C$ és $AC+BC$ mátrixokat!

3. Határozzuk meg az AB mátrixot, ha

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Határozzuk meg az alábbi determinánsok értékét:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & -1 \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} i & 2 \\ 3 & i \end{vmatrix}, \quad \text{d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix},$$

$$\text{e)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \text{f)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \text{g)} \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\text{h)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{i)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. *Csak olyan mátrixokat tudunk összeadni (vagy egymásból kivonni), amelyek azonos típusúak!*
   Tekintsük tehát a $3A + B$ mátrixot. A $3A$ azt jelenti, hogy az A mátrix minden elemét meg kell szorozni 3-mal. A mátrixok összeadásánál a két mátrix megfelelő soraiban és oszlopaiban lévő elemeket összeadjuk, így kapjuk meg az „összegmátrixot”:

$$\begin{aligned} 3A + B =& 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ =& \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 6 & 3 & 3 & -3 \\ 6 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \\ =& \begin{pmatrix} 3+1 & 6+2 & 3+3 & 0+1 \\ 6+0 & 3+0 & 3+1 & -3+1 \\ 6+1 & 0+5 & -3+(-2) & 3+2 \end{pmatrix} = \\ =& \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 4 & -2 \\ 7 & 5 & -5 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3/c *Az A és B mátrixok szorzatát csak akkor értelmezhetjük, ha az A mátrixnak ugyanannyi oszlopa van, mint amennyi sora van B-nek.* Innen azonnal látható az is, hogy *a mátrixok szorzása nem kommutatív*! Az A egy 2×3-as, míg B egy 3×4-es mátrix. Ekkor az $A\cdot B$ mátrix 2×4 típusú lesz, és az i-edik sorban és j-edik oszlopban lévő elemét úgy kapjuk, hogy az A i-edik sorának és B j-edik oszlopának elemeit „sorszámok szerint" összeszorozzuk, majd a kapott szorzatokat összeadjuk:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&3&0\end{pmatrix}\quad \text{és}\quad B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&0&0&1\\3&-1&-2&1\end{pmatrix}\quad ,$$

és így a szorzat:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&0&0&1\\3&-1&-2&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0+3\cdot(-1) & 1\cdot3+2\cdot0+3\cdot(-2) & 1\cdot4+2\cdot1+3\cdot1\\ (-1)\cdot1+3\cdot1+0\cdot3 & (-1)\cdot2+3\cdot0+0\cdot(-1) & (-1)\cdot3+3\cdot0+0\cdot(-2) & (-1)\cdot4+3\cdot1+0\cdot1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}12&-1&-3&9\\2&-2&-3&-1\end{pmatrix}$$

Példa az AB elemeinek meghatározására: szorzatmátrix második sorában és harmadik oszlopában lévő elem -3, mert az A mátrix második sorának elemei -1, 3, 0, a B mátrix harmadik oszlopának elemei 3, 0, -2, és így az AB megfelelő eleme: $(-1)\cdot 3+3\cdot 0+0\cdot(-2)=-3$.
„Szemléletes" módszer két mátrix szorzására:

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{pmatrix}1&2&\mathbf{3}&4\\1&0&\mathbf{0}&1\\3&-1&\mathbf{-2}&1\end{pmatrix}\\ & & \downarrow\\ \begin{pmatrix}1&2&3\\\mathbf{-1}&\mathbf{3}&\mathbf{0}\end{pmatrix} & \rightarrow & \begin{pmatrix}12&-1&-3&9\\2&-2&\mathbf{-3}&-1\end{pmatrix}\end{array}$$

4/a Ha az A mátrix 2×2-es, akkor a Sarrus-szabály alapján:

$$|A|=\begin{vmatrix}5&2\\10&-1\end{vmatrix}=5\cdot(-1)-2\cdot 10=-5-20=-25$$

4/f Ha az A mátrix 3×3-as, akkor a Sarrus-szabály alapján:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\3&2&4\end{vmatrix}=$$
$$=1\cdot0\cdot4+2\cdot2\cdot3+3\cdot(-1)\cdot2-1\cdot2\cdot2-2\cdot(-1)\cdot4-3\cdot0\cdot3=10$$

Az előbbi A mátrix determinánsa a kifejtési tétellel:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&2\\3&2&4\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}0&2\\2&4\end{vmatrix}-2\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\3&4\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}-1&0\\3&2\end{vmatrix}=$$
$$=1\cdot(-4)-2\cdot(-10)+3\cdot(-2)=10$$

4/g Ha az A mátrix 4×4-es (vagy nagyobb négyzetes), akkor a kifejtési tétel vezet eredményre:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

(Használható még az ún. eliminációs módszer is.)

4/h A számolásunkat jelentősen megkönnyíti, ha a kifejtési tételt nem a mátrix 1. sorára, hanem a 4. oszlopára alkalmazzuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Végeredmények

2.

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & -1 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad 3A - 2B = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 7 & 22 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$$

$$AC = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)C = \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 6 \\ 45 & 63 & 81 \end{pmatrix} = AC + BC$$

3.

$$\text{a)} \ AB = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)} \ AB = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. b) -2, c) -7, d) 0, e) 0, i) 0

1.2. Lineáris egyenletrendszerek

Rövid elméleti összefoglaló

Tekintsük a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned}$$

*lineáris egyenletrendszer*t, ahol $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ismeretlenek. Az

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$n \times m$ típusú mátrixot az egyenletrendszer *alapmátrixá*nak, a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} & b_n \end{array}\right)$$

$n \times (m+1)$ típusú mátrixot az egyenletrendszer *kibővített mátrixá*nak nevezzük.

Gauss-féle eliminációs módszer: A következő átalakítások a lineáris egyenletrendszert vele ekvivalens egyenletrendszerbe viszik át (azaz a megoldások száma és értéke változatlan marad):
1. Egyenlet szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
2. Egyenlethez hozzáadni egy másik egyenlet λ-szorosát.
3. El lehet hagyni olyan egyenletet, amely a többi egyenlet lineáris kombinációja.
4. Egyenletek sorrendjének felcserélése.
5. Az ismeretlenek sorrendjének felcserélése együtthatóikkal együtt minden egyenletben.

A fent leírt lépéseket az egyenletrendszer kibővített mátrixán is végrehajthatjuk. A cél az, hogy a mátrixot *trapéz alakú*ra hozzuk, amelyből már leolvasható az is, hogy az egyenletrendszernek 0, 1 vagy végtelen sok megoldása van. (vö. mátrix inverzének meghatározása, valamint vektorrendszer rangjának meghatározása)

Cramer-szabály: Ha a lineáris egyenletrendszer A alapmátrixa négyzetes, és(!) a determinánsa nem nulla (a mátrix reguláris), akkor a lineáris egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van, és a megoldások alakja:

$$x_k = \frac{|A_k|}{|A|} \ ,$$

ahol A_k azt a mátrixot jelöli, amelyet úgy kapunk, hogy az A alapmátrix k-adik oszlopába a $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ számokat írjuk.

Feladatok

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket Gauss-eliminációval:

   (a)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 &= -1 \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 8x_2 &= 10 \end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 3 \end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

   (e)
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 &= 17 \\ 3x_1 + x_2 - 6x_3 &= -14 \end{aligned}$$

   (f)
$$\begin{aligned} -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 &= 17 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= 10 \end{aligned}$$

   (g)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 7x_3 &= 6 \end{aligned}$$

   (h)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 &= -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 14 \end{aligned}$$

(j)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 &= -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= -4 \end{aligned}$$

(k)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 5 \\ x + 2y + 3z &= 6 \\ 3x + 5y + 6z &= 14 \\ 2x + 4y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

(l)

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 13 \\ x + 2y + 4z &= 10 \\ 2x + y + 3z &= 11 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + 2y + z &= 5 \end{aligned}$$

2. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszerek megoldását Cramer-szabállyal:

   (a)

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

3. Tekintsük a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \lambda \cdot x_2 + 4x_3 &= 5 \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= k \end{aligned}$$

   (a) Legyen $k = 0$. Milyen λ értékre nincs megoldása az egyenletrendszernek?
   (b) Legyen $\lambda = -2$. Milyen k értékre van megoldása az egyenletrendszernek?

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/l Írjuk fel a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát, és hozzuk trapéz alakúra:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 1 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

A trapéz alakra hozás során alulról felfelé és balról jobbra haladva próbáljuk meg a mátrix elemeit kinullázni. Vegyük észre, hogy a 2. és 4. sor összege éppen az első sor, ezért:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel az 1. és a 4. sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 10 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a 4. sorból a 3. sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 11 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a 2. sorból a 3. sor kétszeresét:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel a 2. és 3. sorokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki az 1. sorból a 2. sor háromszorosát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel az 1. és 2. sort, valamint szorozzuk meg az 1. sort (-1)-gyel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array}\right)$$

Adjuk hozzá a 4. sorhoz a 3. sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Adjuk hozzá a 3. sorhoz a 2. sort:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{array}\right)$$

Osszuk el a 3. sort 3-mal, a 4. sort 4-gyel, és vegyük észre, hogy a két sor ugyanaz, így a 4. sor kihúzható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Sikerült trapéz alakúra hozni a kibővített mátrixot. Ez a mátrix a következő eredményt hozta:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ y + 2z &= 4 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Ez az egyenletrendszer pedig már azonnal megoldható. Ha $z = 3$, akkor a 2. egyenletbe helyettesítve $y = -2$-t kapunk. E két eredményt az 1. egyenletbe helyettesítve $x = 2$-höz jutunk. Így tehát az egyenletrendszer megoldható, és egyetlen megoldása az $x = 2, y = -2, z = 3$ számhármas, vagy más szavakkal az $v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektor.

1/d Az előző példához hasonlóan hozzuk trapéz alakúra a lineáris egyenletrendszer kibővített mátrixát:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{(2)=(1)+(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \end{array}\right) \overset{(2)-(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -7 \end{array}\right)$$

Elértük a trapéz alakot, írjuk tehát fel az egyenletrendszer jelenlegi alakját:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 6 \\ 3x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

A $3x_2 - 3x_3 = -7$ egyenletet végtelen sok (x_2, x_3) számpár kielégíti (pl.: $\left(0, \frac{7}{3}\right)$, $\left(1, -\frac{10}{3}\right)$). Szeretnénk leírni az összes (végtelen sok) megoldást, ezért azt mondjuk, hogy legyen $x_3 = t$, ahol t tetszőleges valós szám. (Ettől a t paramétertől függ majd az x_2 és x_3 is.) Ekkor a második egyenletből $x_2 = t - \frac{7}{3}$. Az első egyenletbe helyettesítve x_3-at és x_2-t $x_1 = \frac{11}{3}$-ot kapunk. Az egyenletrendszer összes megoldása:

$$x_1 = \frac{11}{3},\ x_2 = t - \frac{7}{3},\ x_3 = t\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$

vagy ugyanezt vektorosan írva:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\ , \qquad t \in \mathbb{R}\ .$$

Megjegyzés: A feladat szemléletes tartalma a következő: Adott három sík a térben (azaz $\mathbb{R}^3$-ban) és keressük a közös pontjaikat. Itt 3 eset fordulhat elő: 0 db megoldás (0 db közös pont), 1 db megoldás (a három síknak 1 db közös pontja van) vagy végtelen sok megoldás (a három síknak 1 db közös egyenese van vagy a három sík egybeesik). Itt végtelen sok megoldást kaptunk, és a vektoros felírásból azt is nyilvánvaló, hogy a megoldások egy egyenesen helyezkednek el. Ez az egyenes illeszkedik a $\left(\frac{11}{3}, -\frac{7}{3}, 0\right)$ pontra, irányvektora a $(0, 1, 1)$ vektor.

2/a Tekintsük a lineáris egyenletrendszer alapmátrixát:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy a Cramer-szabályt alkalmazhassuk, meg kell vizsgálni, hogy az alapmátrix determinánsa nem nulla:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \ldots = -7 \neq 0$$

Az alapmátrix négyzetes és nem tűnik el a determinánsa, így egyetlen megoldása van az egyenletrendszernek. Számítsuk ki a Cramer-szabály képletében található A_k mátrixok determinánsait:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14$$

Az egyenletrendszer megoldása pedig:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-7}{-7} = 1$$
$$x_2 = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{0}{-7} = 0$$
$$x_3 = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-14}{-7} = 2$$

Vektorosan: $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tekintsük először a feladat *a)* részét.
Írjuk fel az egyenletrendszerhez tartozó mátrixot, és hozzuk azt trapéz alakra:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & \lambda & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right) \overset{(3)-\frac{7}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & \lambda & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & -7 \end{array}\right) \overset{(2)-\frac{3}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & \lambda-\frac{9}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & -7 \end{array}\right)$$

Az utolsó két sort tekintve látható, hogy az egyenletrendszer csak akkor nem oldható meg, ha ez a két sor ellentmondásos. Ezt akkor áll fenn, ha az x_2 együtthatói megegyeznek, azaz $\lambda - \dfrac{9}{2} = -\dfrac{13}{2}$. Ennek az egyenletnek a $\lambda = -2$ megoldása. Így az egyenletrendszer nem megoldható, ha $\lambda = -2$.
A feladat *b)* része esetén is írjuk fel az egyenletrendszer mátrixát, és próbáljuk meg trapéz alakra hozni:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 7 & 4 & 2 & k \end{array}\right) \overset{(3)-\frac{7}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & k-7 \end{array}\right) \overset{(2)-\frac{3}{2}(1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{13}{2} & \frac{11}{2} & k-7 \end{array}\right)$$

Ez az egyenletrendszernek pontosan akkor van megoldása, ha az utolsó két sor nem mond ellent egymásnak. Ez azt jelenti, hogy $k - 7 = 2$ feltételnek teljesülnie kell. Ebből pedig következik, hogy az egyenletrendszer $k = 9$ esetén megoldható (és ekkor végtelen sok megoldása van).

Végeredmények

1/a) $x_1 = -7$, $x_2 = 3$, 1/b) $x_1 = -4t + 5$, $x_2 = t$, 1/c) $x_1 = \frac{11}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{8}{3}$ 1/e) $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, 1/f) nincs megoldása, 1/g) $x_1 = \frac{1}{3}t + \frac{5}{3}$, $x_2 = -\frac{5}{3}t - \frac{2}{3}$, $x_3 = t$; 1/h) $x_1 = 1 + 2t - u$, $x_2 = t$, $x_3 = u$; 1/i) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$; 1/j) $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$; 1/k) $x = y = z = 1$; 2/b) $x_1 = -\frac{5}{23}$, $x_2 = -\frac{3}{23}$, $x_3 = \frac{38}{23}$

1.3. Mátrix inverze

Rövid elméleti összefoglaló

Egy A négyzetes mátrix ($|A| \neq 0$) *inverzén* azt az A^{-1}-gyel jelölt (négyzetes) mátrixot értjük, amelyre teljesül, hogy $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, ahol E az egységmátrix.

Egy mátrix inverzét elemi sorátalakításokkal (vagy elemi oszlopátalakításokkal) határozhatjuk meg.

Egy mátrix soraival végzett elemi átalakítások:
1. Egy sor szorzása egy $\lambda \neq 0$ számmal.
2. Egy sor λ-szorosának hozzáadása egy másik sorhoz.
3. A sorok sorrendjének felcserélése.
(Ugyanez teljesül egy mátrix oszlopaira is.)
Egy mátrix inverzének meghatározásához lásd a kidolgozott példát.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi mátrixok inverzét!

$$1.\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad 2.\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 3.\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad 5.\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 6.\ \begin{pmatrix} -1 & -4 & -6 \\ 2 & 6 & 9 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$7.\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad 8.\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

5. Jelöljük el a kérdéses mátrixot A-val.
1. lépés: Írjuk fel az $(A|E)$ mátrixot:

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2. lépés: Alakítsuk át úgy ezt a mátrixot elemi sorátalakításokkal úgy, hogy az első három sor és első három oszlop az egységmátrix legyen. Ekkor a fennmaradó második három oszlopban az A mátrix A^{-1} inverzét látjuk, azaz $(E|A^{-1})$ lesz az eredmény.
Elemi átalakítások során elsőként az alsó sor legelső elemét alakítjuk a kívánt értékre, majd a felette lévő sor első elemét; ezután a rákövetkező sor első elemét; azt követően az alsó sor második elemét, azutána felette lévő sor második elemét stb.
A példát tekintve (minden lépésnél zárójelben jelezzük, hogy melyik elemet hozzuk az adott lépésben a kívánt értékre):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Cseréljük fel a 2. és 3. sorokat (az utolsó sor első eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a második sorból az első sor felét (az utolsóelőtti sor első eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Osszuk el 2-vel az első sort (az első sor első eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a harmadik sorból a második sor 4-szeresét (az utolsó sor második eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Szorozzuk meg a második sort 2-vel (utolsóelőtti sor második eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Vonjuk ki az első sorból a második sor $\frac{3}{2}$-szeresét (első sor második eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & 2 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

Osszuk el az utolsó sort -11-gyel (utolsó sor utolsó eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right)$$

Vonjuk ki a második sorból a harmadik sor 5-szörösét (utolsóelőtti sor utolsó eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right)$$

Adjuk hozzá az első sorhoz a harmadik sor 7-szeresét (első sor utolsó eleme):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{8}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{array}\right)$$

Az A mátrix inverze tehát:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{11} & -\frac{7}{11} & -\frac{5}{11} \\ -\frac{1}{11} & \frac{5}{11} & \frac{2}{11} \\ -\frac{2}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{4}{11} \end{pmatrix} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} -8 & 7 & 5 \\ 1 & -5 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: Természetesen többféle úton is megkaphatjuk ugyanezt az inverzmátrixot. (Jelenlegi megoldásunkban arra törekedtünk, hogy minden elemi átalakításra lássunk példát.)

Végeredmények

$$1.\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & \frac{1}{4} \\ -1 & 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad 2.\ \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad 3.\ \frac{1}{7}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ -4 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$4.\ \text{nincs inverze} \quad 6.\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 7 & -3 \\ -4 & -5 & 2 \end{pmatrix} \quad 7.\ \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$8.\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1.4. Vektorterek bázisa, mátrix és vektorrendszer rangja, altér

Rövid elméleti összefoglaló

Egy V vektortérben a $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorok *lineárisan független*ek, ha a nullvektort csak úgy lehet belőlük előállítani, hogy minden vektort 0-val szorzunk:

$$0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots 0 \cdot v_n = \underline{0}$$

Egy V vektortér egy *bázis*án egy lineárisan független generátorrendszerét értjük. A bázisok közös elemszáma a V vektortér *dimenzió*ja.

Egy V vektortér $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektorrendszerének *rang*ja r, ha a vektorok között található r db lineárisan független, de r-nél több nem. Egy A mátrix *rang*ján oszlopvektorai (vagy sorvektorai) által alkotott vektorrendszer rangját értjük.
Legyen a V vektortérben $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ egy vektorrendszer. A vektorokat V valamely bázisában előállítva írjuk fel azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a vektorrendszer elemeinek kombináló együtthatói állnak. Ekkor a vektorrendszer rangja éppen ennek a mátrixnak a rangja.

Eliminációs módszer egy mátrix rangjának meghatározásához: A következő, ún. elemi átalakítások nem változtatnak egy mátrix rangján:
1. Egy sor szorzása $\lambda \neq 0$ számmal.
2. Egy sorhoz hozzáadni egy másik sor λ-szorosát.
3. El lehet hagyni olyan sort, amely a többi sor lineáris kombinációja.
4. Sorok sorrendjének felcserélése.

A fenti mátrixot trapéz alakúra hozzuk, és a kapott mátrix sorainak száma éppen a keresett rang.
(Ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, akkor a nullvektort elhagyhatjuk.)

Megjegyzés: Amennyiben csak azt szeretnénk meghatározni, hogy $\mathbb{R}^n$-ben bázist alkot-e n db vektor, akkor elegendő megvizsgálni, hogy az általuk alkotott mátrix determinánsa nulla-e vagy sem. Amennyiben nulla, úgy a vektorrendszer nem lineárisan független és így nem bázis.

Egy V vektortérnek *altere* a W, ha $W \subset V$ és W maga is vektortér. Belátható, hogy W pontosan akkor altere a V vektortérnek, ha $v_1 + v_2 \in W$ és $\lambda v \in W$, ahol $v_1, v_2, v \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő vektorrendszerek rangját!

   (a) $\{(0,0),(0,1),(1,1),(2,2),(3,7)\}$

   (b) $\{(0,0,1),(0,1,1),(0,1,2),(0,2,4),(0,0,0)\}$

   (c) $\{(1,1,1,1),(0,1,1,0),(0,0,1,1),(1,1,0,0),(1,2,3,4)\}$

2. Ellenőrizzük le, hogy a megadott vektorrendszer lineárisan független-e és határozzuk meg a rangját!

   (a) $v_1 = (1,3,-4)$, $v_2 = (-3,0,2)$, $v_3 = (-1,6,-6)$

   (b) $v_1 = (-1,-2,-4)$, $v_2 = (2,6,9)$, $v_3 = (1,6,6)$

   (c) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (-1,0,1)$, $v_3 = (1,1,0)$

3. Bázist alkotnak-e a $\{v_1, v_2, v_3\}$ vektorok $\mathbb{R}^3$-ban? Ha igen, írjuk fel az w vektort ebben a bázisban!

   (a) $v_1 = (2,1,-3)$, $v_2 = (3,2,-5)$, $v_3 = (1,-1,1)$ és $w = (1,2,2)$

   (b) $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,1,2)$, $v_3 = (1,2,3)$ és $w = (6,9,14)$

   (c) $v_1 = (0,0,1)$, $v_2 = (0,1,1)$, $v_3 = (1,1,1)$ és $w = (2,0,4)$

   (d) $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (2,3,4)$ és $w = (1,-2,5)$

4. Alteret alkotnak-e $\mathbb{R}^5$-ben a következő vektorok?

   - $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_5, x_2 = x_3\}$
   - $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0\}$
   - $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_i \text{ páros }, i = 1,\dots,5\}$
   - $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 \text{ és } x_5 \text{ racionális}\}$
   - $W = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0\}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/c Írjuk be a vektorrendszer tagjait oszlopként egy mátrixba:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Elemi átalakításokkal trapéz alakúra hozzuk a mátrixot, és sorainak száma a keresett rang lesz.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{(4)-(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{(3)-(2)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{(2)-(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{(4)-(3)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sikerült trapéz alakúra hozni a mátrixot. Egyetlen sort sem lehet elhagyni, azaz egyik sort sem lehet a többiből előállítani (lineárisan függetlenek). A sorok száma 4, így a mátrix rangja: $\mathrm{rg}A = 4$.

2/a Egy vektorrendszer lineárisan független, ha a nullvektort belőlük csak triviálisan lehet kikombinálni. Ez azt jelenti, hogy $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = \underline{0}$ csak úgy lehetséges, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Írjuk be az egyenletbe a v_1, v_2, v_3 vektorokat:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Látható, hogy a feltétel azt jelenti, hogy az

$$\begin{aligned} \alpha - 3\beta - \gamma &= 0 \\ 3\alpha + 6\gamma &= 0 \\ -4\alpha + 2\beta - 6\gamma &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek egyedüli megoldása az $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
A lineáris függetlenség meghatározásához tehát azt kell látni, hogy a fenti egyenletrendszernek egyetlen(!) megoldása van. A korábban tanultak alapján meg kell próbálni trapéz alakra hozni az egyenletrendszer mátrixát úgy, hogy egyetlen sort se húzhassunk ki.
Amennyiben az összes sor megmarad, úgy az egyenletrendszer megoldható, és mivel az egyenletrendszer homogén, ezért a megoldás biztosan az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ számhármas. Ebből már az is következik (lásd az előző kidolgozott példát), hogy a vektorrendszer rangja 3.
Ha az egyenletrendszer mátrixából egy vagy több sor kihúzható, az azt jelenti, hogy az a sor a többi lineáris kombinációja, azaz a vektorrendszer nem lineárisan független. Ebben az esetben a rangot az előző kidolgozott feladat mintájára határozhatjuk meg.
Tekintsük tehát az egyenletrendszer mátrixát. Mivel az egyenletrendszer homogén, ezért az utolsó sor – az eliminációs lépésektől függetlenül – mindig csupa 0, így

azt a felírásból elhagyhatjuk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ -4 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix} \overset{(3)+4(1)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \overset{(2)-3(1)}{\sim}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 9 \\ 0 & -10 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Egy sort kihúzhattunk a mátrixból, ami azt jelenti, hogy az egyenletrendszernek (nem csak 1, hanem) végtelen sok megoldása van. Ezért a vektorrendszer lineárisan függő, a rangja 2.

3/a *1. lépés:* Ellenőrizzük, hogy a megadott vektorrendszer bázis!
A bázis egy lineárisan független generátorrendszer (itt $\mathbb{R}^3$-ban). Egy generátorrendszer elemeiből a vektortér minden vektora előállítható, így könnyű látni, hogy a 3-dimenziós $\mathbb{R}^3$-ban *legalább* 3 tagú vektorrendszer lehet csak generátorrendszer. A 3-dimenziós vektortérben lineárisan független vektorrendszerek 1,2 vagy 3 (azaz *legfeljebb* 3) eleműek. A vizsgált vektorrendszer 3 elemű (és ennyi dimenziós a vektortér), ezért elegendő azt ellenőrizni, hogy ez a 3 vektor lineárisan független-e.
Ha egy vektorrendszer lineárisan független, akkor a nullvektor csak triviálisan kombinálható ki belőle (lásd 2/a. feladat megoldását). Írjuk fel ezt a feltételt a vektorok koordinátáit is felhasználva:

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez pedig nem más, mint az alábbi homogén lineáris egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2\alpha + 3\beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma &= 0 \\ -3\alpha - 5\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

Ha ennek az egyenletrendszernek csakis az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ a megoldása, akkor a megadott vektorrendszer bázis. Érdemes ennek ellenőrzése előtt előre haladni a feladatban...
2. lépés: Határozzuk meg a w vektort az új bázisban!
A w vektor felírása az új bázisban egyszerű feladat, ha végiggondoljuk, hogy a kérdést úgy is feltehettük volna: „Milyen együtthatókkal kell kombinálni a v_1, v_2 és v_3 vektorokat, hogy w-t kapjuk?”, azaz

$$a\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vegyük észre, hogy éppen a már korábban is felírt egyenletrendszer inhomogén változatához jutottunk! Oldjuk meg ezt az inhomogén egyenletrendszert. Ha a kibővített mátrix trapéz alakúra hozásakor az alapmátrix háromszög alakú lesz,

akkor a megadott vektorrendszer bázis; továbbá az egyenletrendszer megoldásával a w vektor koordinátáit is megkapjuk.
Írjuk fel az inhomogén egyenletrendszer kibővített mátrixát és eliminációval hozzuk trapéz alakúra:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -2 \end{array}\right) \underset{(3)+3(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{2(2)-(1)}{\sim}$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{array}\right) \underset{(3)-(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az alapmátrix háromszög alakú, ezért a megadott vektorrendszer bázis.
A kibővített mátrix a következő lineáris egyenletrendszerre vezetett:

$$\begin{aligned} 2a + 3b + c &= 1 \\ b - 3c &= 3 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

Az utolsó egyenletet felhasználva $b = 6$, míg ezeket az adatokat az első egyenletbe helyettesíve $a = -9$ adódik.
A w vektor koordinátái az új bázisban: $w = (-9, 6, 1)$.

4/a Ellenőrizzük le, hogy L két tetszőleges $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ és $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$ vektorára (és egy $\lambda \in \mathbb{R}$ számra) teljesül-e, hogy $a + b \in L$ és $\lambda \cdot a \in L$.
Mivel $a, b \in L$, ezért $a = (a_1, a_2, a_2, a_4, a_1)$ és $b = (b_1, b_2, b_2, b_4, b_1)$. Így egyrészt:

$$a + b = (a_1, a_2, a_2, a_4, a_1) + (b_1, b_2, b_2, b_4, b_1) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_2 + b_2, a_4 + b_4, a_1 + b_1)$$

Az $a + b$ vektorra szintén teljesül, hogy az 1. és az 5., valamint a 2. és a 3. koordinátája megegyezik, ezért $a + b \in L$. Másrészt:

$$\lambda \cdot a = \lambda \cdot (a_1, a_2, a_2, a_4, a_1) = (\lambda \cdot a_1, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_2, \lambda \cdot a_4, \lambda \cdot a_1)$$

A $\lambda \cdot a$ vektorra is teljesül, hogy az 1. és 5., továbbá a 2. és 3. koordinátája ugyanaz, így $\lambda \cdot a \in L$.
Teljesült a két kívánt feltétel, így az L altere az $\mathbb{R}^5$ vektortérnek.

Végeredmények

1/a) 2, 1/b) 2
2/b) a vektorrendszer lineárisan függő, rangja 2,
2/c) a vektorrendszer lineárisan független, így rangja 3
3/b) $w = (1, 2, 3)$, 3/c) $w = (0, -2, 2)$, 3/d) a vektorrendszer nem bázis
4/b) igen, 4/c) nem, 4/d nem, 4/e nem

1.5. Lineáris leképezések

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen V k-dimenziós, W n-dimenziós valós vektortér.
Egy $\varphi\colon V \to W$ leképezést *lineáris*nak nevezünk, ha
– additív ($\forall v_1, v_2 \in V$: $\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$) és
– homogén ($\forall v \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \varphi(v)$).

- φ *képtere*: $\mathrm{Im}\varphi := \{w \in W \mid \exists v \in V : \varphi(v) = w\}$ (φ képtere altér W-ben.)
- φ *nulltere/magja*: $\mathrm{Ker}\varphi := \{v \in V \mid \varphi(v) = \underline{0}_W\}$ ($\underline{0}_W$ – W nullvektora) (φ nulltere altér V-ben.)
- φ *rangja*: $\mathrm{rg}\varphi := \dim(\mathrm{Im}\varphi)$
- φ *defektusa*: $\mathrm{def}\varphi := \dim(\mathrm{Ker}\varphi)$
- φ *mátrixa adott $\mathcal{B}_V$ és $\mathcal{B}'_W$ bázisokra vonatkozóan*:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} (\varphi(b_1))_1 & \dots & (\varphi(b_i))_1 & \dots & (\varphi(b_k))_1 \\ (\varphi(b_1))_2 & \dots & (\varphi(b_i))_2 & \dots & (\varphi(b_k))_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ (\varphi(b_1))_n & \dots & (\varphi(b_i))_n & \dots & (\varphi(b_k))_n \end{pmatrix}$$

ahol $\mathcal{B}_V = \{b_1, \dots, b_k\}$ bázisa V-nek, $\mathcal{B}'_W = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ bázisa W-nek. (Tehát a mátrix i-edik oszlopában a b_i V-beli bázisvektor képének koordinátái állnak a $\mathcal{B}'_W$ bázisra vonatkozóan.)

Nullitás+rang tétel:

$$\dim(\mathrm{Ker}\varphi) + \dim(\mathrm{Im}\varphi) = \dim V\ .$$

Feladatok

1. Tekintsük a φ leképezést, ha

   (a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x, y) := (x + 2y, xy)$
   (b) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \varphi(x, y) := x + 2y$
   (c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x, y, z) := (x + 2y, x - y, 3z)$

   Állapítsuk meg, hogy φ lineáris leképezés-e. Amennyiben igen, úgy határozzuk meg

   A) a nullterét, defektusát, képterét, rangját;
   B) a leképezés mátrixát $\mathbb{R}^n$ természetes bázisára vonatkozóan;
   C) a mátrix segítségével döntsük el, hogy a leképezés invertálható-e, és adjuk meg az inverz-leképezés mátrixát!

2. Tekintsünk a

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \varphi(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$$

   lineáris leképezést. Határozzuk meg a mátrixát az alábbi bázisra vonatkozóan:

   (a) $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ($\mathbb{R}^3$ természetes bázisa)
   (b) $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/c *1. lépés: Linearitás ellenőrzése.*
Additív a leképezés? Tetszőleges $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ vektorokat tekintve:

$$\begin{aligned}\varphi(v_1+v_2) &= \varphi\left((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\right) = \varphi\left(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2\right) = \\ &= (x_1+x_2+2(y_1+y_2), x_1+x_2-(y_1+y_2), 3(z_1+z_2)) = \\ &= ((x_1+2y_1)+(x_2+2y_2), (x_1-y_1)+(x_2-y_2), 3z_1+3z_2) = \\ &= (x_1+2y_1, x_1-y_1, 3z_1)+(x_2+2y_2, x_2-y_2, 3z_2) = \\ &= \varphi(x_1,y_1,z_1)+\varphi(x_2,y_2,z_2) = \varphi(v_1)+\varphi(v_2)\ ,\end{aligned}$$

tehát φ additív.
Homogén a leképezés? Tetszőleges $v \in \mathbb{R}^3$ vektort és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalárt véve:

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda v) &= \varphi(\lambda(x,y,z)) = \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \\ &= (\lambda x+2\lambda y, \lambda x-\lambda y, 3\lambda z) = (\lambda(x+2y), \lambda(x-y), \lambda(3z)) = \\ &= \lambda(x+2y, x-y, 3z) = \lambda\varphi(x,y,z) = \lambda\varphi(v)\ ,\end{aligned}$$

tehát φ homogén. Így a φ lineáris leképezés.
2. lépés: A képtér, nulltér, rang és defektus meghatározása.
Célszerű először a nullteret meghatározni:

$$\mathrm{Ker}\varphi = \left\{v \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(v) = \underline{0}\right\}\ .$$

Keressük tehát azokat a vektorokat, amelyek képe a nullvektor. A fenti feltétel egy homogén lineáris egyenletrendszerhez vezet a következőképpen:

$$\begin{aligned}\varphi(v) &= \underline{0} \\ \varphi(x,y,z) &= (0,0,0) \\ (x+2y, x-y, 3z) &= (0,0,0)\end{aligned}$$

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ x-y=0 \\ 3z=0 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=-2y \\ x=y \\ z=0 \end{cases}$$

Az egyenletrendszer első két sora pontosan akkor teljesülhet egyszerre, ha $x = y = 0$. Az egyenletrendszernek csak triviális megoldása van: x=y=z=0, azaz a $\underline{0} = (0,0,0)$ nullvektor. $\mathrm{Ker}\varphi = \{\underline{0}\}$. Ez egy 0-dimenziós vektortér, így $\mathrm{def}\varphi = \dim(\mathrm{Ker}\varphi) = 0$.
A nullitás+rang tételt felhasználva a következőt írhatjuk:

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ker}\varphi)+\dim(\mathrm{Im}\varphi) &= \dim\mathbb{R}^3 \\ 0+\dim(\mathrm{Im}\varphi) &= 3 \\ \dim(\mathrm{Im}\varphi) &= 3\end{aligned}$$

A képtér tehát 3-dimenziós, így $\mathrm{rg}\varphi = 3$. Egyetlen kérdés maradt még hátra, hogy milyen vektorok alkotják a képteret. Azt tudjuk, hogy a képtér altere $\mathbb{R}^3$-nak (hiszen φ $\mathbb{R}^3$-ba képez). Az $\mathbb{R}^3$ 3-dimenziós, a képtér is 3-dimenziós, így a képtér

csak a teljes $\mathbb{R}^3$ lehet: $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}^3$.
3. lépés: A leképezés mátrixának meghatározása.
(Megjegyzés: A mátrix felírásához nyilvánvalóan nincs szükség a 2. lépésre.)
A definíció szerint a mátrix oszlopaiba a kanonikus/természetes bázis elemeinek képei kerülnek. $\mathbb{R}^3$ kanonikus bázisa: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Ezek képei:

$$\varphi(1,0,0) = (1,1,0)$$
$$\varphi(0,1,0) = (2,-1,0)$$
$$\varphi(0,0,1) = (0,0,3)$$

Ebből φ mátrixa:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

4. lépés: A leképezés inverzének meghatározása, és mátrixának felírása.
Az eddigiekből sejthető, hogy a mátrixok és a lineáris leképezések között szoros kapcsolat van. Belátható, hogy *egy leképezésnek létezik inverze, ha a leképezés mátrixa invertálható.* Azt is fontos tudni, hogy *egy leképezés mátrixának inverze éppen az inverz-leképezés mátrixa*:

$$(A_\varphi)^{-1} = A_{\varphi^{-1}} .$$

Ellenőrizni kell, hogy az A_φ mátrix invertálható. Amennyiben a determinánsa nem nulla, úgy létezik az inverzmátrix:

$$A_\varphi = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 6 = -9 \neq 0 .$$

A mátrix invertálható, inverzét (az egységmátrixszal kibővített) mátrix soraival végzett elemi átalakítások segítségével kaphatjuk meg:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\frac{1}{3}\cdot(3)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{(2)-(1)}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{-\frac{1}{3}\cdot(2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right) \underset{(1)-2\cdot(2)}{\sim}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

(Emlékeztetőül, a célunk az, hogy a bal oldali 3×3-as mátrixot egységmátrixszá alakítsuk, a jobb oldalon pedig megkapjuk az inverzmátrixot: Első lépésben a harmadik sort $\frac{1}{3}$-dal szoroztuk. A második lépésben a második sorból kivontuk az elsőt. A harmadik lépésben a második sort szoroztuk meg $(-\frac{1}{3})$-dal. A negyedik lépésben az első sorból kivontuk a második sor kétszeresét.)
A φ^{-1} inverz-leképezés mátrixa:

$$A_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} .$$

2/b Elsőként számítsuk ki a bázisvektorok φ általi képeit:

$$\varphi(0,0,1) = (0,0,1) \; ; \qquad \varphi(0,1,1) = (0,1,2) \; ; \qquad \varphi(1,1,1) = (1,2,3)$$

Ezeket a vektorokat kell a megadott bázis tagjaival kifejezni:

$$\begin{aligned}(0,0,1) &= 1\cdot(0,0,1) + 0\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,1,1)\\ (0,1,2) &= 1\cdot(0,0,1) + 1\cdot(0,1,1) + 0\cdot(1,1,1)\\ (1,2,3) &= 1\cdot(0,0,1) + 1\cdot(0,1,1) + 1\cdot(1,1,1)\end{aligned}$$

A kapott együtthatók a bázisvektorok képeinek koordinátái a megadott bázisban, ezért a leképezés mátrixát az adott bázisra vonatkozóan úgy kapjuk, hogy a kapott együtthatókat a megfelelő oszlopba írjuk:

$$A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Végeredmények

1/a. A leképezés nem lineáris.;

1/b. φ lineáris. $\mathrm{Ker}\varphi = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid v = (-2a, a), a \in \mathbb{R}\}$, $\mathrm{def}\varphi = 1$; $\mathrm{rg}\varphi = 1$, $\mathrm{Im}\varphi = \mathbb{R}$; $A_\varphi = (1\ 2)$, a leképezés nem invertálható.

2/a. $A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1.6. Sajátértékek, sajátvektorok, diagonalizálhatóság

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen V n-dimenziós valós vektortér, és legyen $\varphi\colon V \to V$ lineáris transzformáció. φ *sajátértéke* $\lambda \in \mathbb{R}$, ha $\varphi(v) = \lambda v$ valamely $v \in V$ vektorra. Ekkor a v vektor a φ transzformáció λ sajátértékhez tartozó *sajátvektora*. Egy λ sajátértékhez tartozó összes sajátvektor alteret alkot, ezt a λ-hoz tartozó *sajátaltér*nek nevezzük. Ha A_φ a φ mátrixa (valamely bázisra vonatkozóan), és E a megfelelő egységmátrix, akkor φ *karakterisztikus polinomja*

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & \dots & 0\\ \vdots & & \vdots\\ 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

– φ karakterisztikus polinomjának gyökei éppen a φ sajátértékei!

– φ mátrixa pontosan akkor diagonalizálható, ha multiplicitással együtt annyi sajátértéke van, amennyi dimenziós a V vektortér, ÉS egy sajátértékéhez tartozó sajátaltér dimenziója éppen a sajátérték multiplicitása. Ekkor φ mátrixa a sajátvektoraiból álló bázisban diagonális, a főátlóban a megfelelő sajátértékek szerepelnek.

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformáció természetes bázisra vonatkozó mátrixát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit és sajátaltereit! Állapítsuk meg, hogy diagonalizálható-e a transzformáció mátrixa, és ha igen, akkor írjuk fel azt a bázist, amelyben a mátrix diagonális!

1. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (2x, 4y)$
2. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x,y) = (x+y, x-y)$
3. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (x+2y, x+y, 2y+4z)$
4. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (x+2y+3z, 2y+3z, 3z)$
5. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (x+y, x-y, -z)$
6. $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y,z) = (4x-2y+2z, 2x+2z, y+z-x)$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

3. *1. lépés: A leképezés mátrixának felírása a természetes/kanonikus bázisban.* Mivel $\varphi(1,0,0) = (1,1,0)$, $\varphi(0,1,0) = (2,1,2)$ és $\varphi(0,0,1) = (0,0,4)$, így a keresett mátrix:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. lépés: φ karakterisztikus polinomjának meghatározása. A karakterisztikus polinomot az $|A_\varphi - \lambda E| = 0$ képletből kapjuk meg:

$$|A_\varphi - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2(4-\lambda) - 2(4-\lambda) = \left((1-\lambda)^2 - 2\right)(4-\lambda) =$$
$$= \ldots = (\lambda^2 - 2\lambda - 1)(4-\lambda) = 0$$

3. lépés: A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátalterek meghatározása. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$
$$\lambda_3 = 4$$

Egy sajátértékhez tartozó sajátaltérben a $\varphi(v) = \lambda v$ egyenlőséget kielégítő vektorok vannak. Ez az egyenlőség valójában egy lineáris egyenletrendszer. E lineáris egyenletrendszer megoldásai alteret alkotnak; ezt az alteret keressük, ez az adott sajátértékhez tartozó sajátaltér.

$$\varphi(v) = \lambda v \qquad \Rightarrow \qquad (x+2y, x+y, 2y+4z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ x + y = \lambda y \\ 2y + 4z = \lambda z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ x + (1-\lambda)y = 0 \\ 2y + (4-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ esetén az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} (1-(1+\sqrt{2}))x + 2y = 0 \\ x + (1-(1+\sqrt{2}))y = 0 \\ 2y + (4-(1+\sqrt{2}))z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\sqrt{2}x + 2y = 0 \\ x - \sqrt{2}y = 0 \\ 2y + (3-\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

Az első egyenlet a második egyenlet $-\sqrt{2}$-szerese, a második egyenletből $x = \sqrt{2}y$ -t kapjuk. A harmadik egyenletet rendezve $y = \frac{\sqrt{2}-3}{2}z$ -hez jutunk. z-re az egyenletrendszer nem ad megkötést, ezért az tetszőleges valós értéket felvehet:

$$x = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}-3}{2}z\ , \qquad y = \frac{\sqrt{2}-3}{2}z\ , \qquad z \in \mathbb{R}$$

Az egyenletrendszer egy (nem csupa zérus) megoldása ($z = 2$):

$$v_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\sqrt{2}-3) \\ \sqrt{2}-3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

az összes megoldása:

$$S_1 = \{t \cdot v_1 \mid t \in \mathbb{R}\}\ ,$$

ez pedig egy (a v_1 vektor által generált) egydimenziós altér (origón áthaladó, v_1 irányvektorú egyenes).
$\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ esetén az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} (1-(1-\sqrt{2}))x + 2y = 0 \\ x + (1-(1-\sqrt{2}))y = 0 \\ 2y + (4-(1-\sqrt{2}))z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{2}x + 2y = 0 \\ x + \sqrt{2}y = 0 \\ 2y + (3+\sqrt{2})z = 0 \end{cases}$$

A λ_1 esetnél látottak szerint folytatva, ennek az egyenletrendszernek az összes megoldása:

$$S_2 = \{t \cdot v_2 \mid t \in \mathbb{R}\}\ , \quad \text{ahol} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\sqrt{2}+3) \\ -\sqrt{2}-3 \\ 2 \end{pmatrix}\ ,$$

(itt a v_2 vektort $z = 2$ esetben kapjuk), ez szintén egy (a v_2 által generált) egydimenziós altér (origón áthaladó, v_2 irányvektorú egyenes).
$\lambda_3 = 4$ esetén az egyenletrendszer:

$$\begin{cases} (1-4)x + 2y = 0 \\ x + (1-4)y = 0 \\ 2y + (4-4)z = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3x + 2y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Innen $y = 0$ azonnal adódik, és ekkor $x = 0$. A z-koordináta esetében az egyenletrendszer nem követel meg semmit, ezért az tetszőleges valós szám lehet. Így például a $v_3 = (0, 0, 1)$ egy megoldása az egyenletrendszernek, az összes megoldás pedig:

$$S_3 = \{t \cdot v_3 \mid t \in \mathbb{R}\}\ ,$$

ez ismét egy (a v_3 által generált) egydimenziós altér (éppen a z-tengely).
4. lépés: A diagonalizálhatóság megállapítása, a diagonális mátrix felírása. A diagonalizálhatóságra vonatkozó tétel szerint két dolgot kell ellenőriznünk: 1. (multiplicitással együtt) annyi sajátérték van-e, mint amennyi a vektortér dimenziója; 2. egy-egy sajátérték multiplicitása egybeesik-e a hozzá tartozó sajátaltér dimenziójával. Az első kérdésre igen a válasz, hiszen 3 különböző sajátértéket találtunk, mindegyik egyszeres gyök, ezért $1+1+1=3$, és $\mathbb{R}^3$ dimenziója is 3. A második kérdésre is igennel válaszolhatunk, ugyanis minden egyes sajátérték sajátaltere egydimenziós volt, és ez egybeesik azzal, hogy minden egyes sajátérték egyszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak. Tehát a φ mátrixa diagonalizálható, mégpedig a

$$\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)\\ \sqrt{2}-3\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{2}(\sqrt{2}+3)\\ -\sqrt{2}-3\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

sajátvektoraiból álló bázisban, itt a mátrixa

$$A_{\varphi,\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1+\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & 1-\sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

6. *1. lépés: A leképezés mátrixának felírása a természetes/kanonikus bázisban.* A $\varphi(1,0,0)=(4,2,-1)$, $\varphi(0,1,0)=(-2,0,1)$ és $\varphi(0,0,1)=(2,2,1)$, ezért mátrix:

$$A_\varphi=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

2. lépés: φ karakterisztikus polinomjának meghatározása. Az $|A_\varphi-\lambda E|=0$ képlet alapján:

$$\begin{vmatrix}4-\lambda & -2 & 2\\ 2 & -\lambda & 2\\ -1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=-(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$$

3. lépés: A sajátértékek és a hozzájuk tartozó sajátalterek meghatározása. A sajátértékek a karakterisztikus polinom gyökei:

$$\lambda_1=1\ \ \text{(1-szeres)}\qquad\text{és}\qquad\lambda_2=2\ \ \text{(2-szeres)}.$$

Az 1. példában is láttuk, hogy a megfelelő sajátértékekhez tartozó sajátaltereket egy-egy lineáris egyenletrendszer segítségével határozhatjuk meg:

$$\varphi(v)=\lambda v\quad\Rightarrow\quad(4x-2y+2z,2x+2z,y+z-x)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z)\quad\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}4x-2y+2z=\lambda x\\ 2x+2z=\lambda y\\ -x+y+z=\lambda z\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l}(4-\lambda)x-2y+2z=0\\ 2x-\lambda y+2z=0\\ -x+y+(1-\lambda)z=0\end{array}\right.$$

$\lambda_1=1$ esetén az egyenletrendszer a következő:

$$\left\{\begin{array}{l}3x-2y+2z=0\\ 2x-y+2z=0\\ -x+y=0\end{array}\right.$$

A harmadik egyenletből azonnal $x = y$ adódik, ezt behelyettesítve akár az első, akár a második egyenletbe $x = -2z$ -t kapunk. z-re nincs megkötés, így tetszőleges valós szám lehet. Ha például $z = 1$, akkor a $v_1 = (-2, -2, 1)$ koordinátái megoldásai az egyenletrendszernek. A v_1 sajátvektort felhasználva egyenletrendszer megoldó altere (azaz a keresett sajátaltér):

$$S_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Mivel a keresett sajátalteret egyetlen vektor (a v_1) generálja, így az S_1 egydimenziós.
$\lambda_2 = 2$ esetén az egyenletrendszer a következő:

$$\begin{cases} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$$

Itt mindhárom egyenlet ugyanazt az információt tartalmazza, hiszen az első két egyenlet megegyezik, a harmadikat pedig -2-vel szorozva az első két egyenlet egyikét kapjuk. Az egyenletrendszer így egyetlen egyenletre redukálódott: $x - y + z = 0$. Geometriai gondolatmenettel azonnal látjuk, hogy egy origót tartalmazó síkról van szó, amely kétdimenziós altér $\mathbb{R}^3$-ban. Lineáris algebrai okoskodással az y és a z tetszőleges értékeket felvehet, és az egyenletből $x = y - z$ -t kapjuk. Legyen például $y = 1$ és $z = 0$, illetve $y = 0$ és $z = 1$, ekkor $v_2 = (1, 1, 0)$ és $v_3 = (-1, 0, 1)$ megoldják a fenti egyenletet. Ezek a (lineárisan független!) sajátvektorok felfeszítik a keresett sajátalteret (azaz bármely további sajátaltérbeli vektort kikombinálhatunk a segítségükkel), és látható az is, hogy a kapott sajátaltér kétdimenziós:

$$S_2 = \left\{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

4. lépés: A diagonalizálhatóság megállapítása, a diagonális mátrix felírása. A diagonalizálhatóságra vonatkozó tétel feltételeit kell ismét ellenőrizni. A φ transzformációhoz két sajátértéket kaptunk, az egyik 1-szeres, a másik 2-szeres multiplicitású. A tér 3-dimenziós, és $2 + 1 = 3$, ezért az első feltétel teljesül. A második feltétel azt követeli meg, hogy a sajátértékek multiplicitásai essenek egybe a hozzájuk tartozó altér dimenziójával. $\lambda_1 = 1$ esetén egyszeres gyökhöz egydimenziós altér, míg $\lambda_2 = 2$ -t tekintve kétszeres gyökhöz kétdimenziós altér tartozott. A tétel feltételei teljesülnek, így a transzformáció mátrixa diagonalizálható, mégpedig a sajátvektoraiból álló bázisban:

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Végeredmények

1. mátrixa: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ – ez már diagonális alakú, így a kanonikus bázis egybeesik a sajátvektorokból álló bázissal; sajátértékek: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

2. mátrixa: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
sajátértékei és azokhoz tartozó sajátalterek: $\lambda_1 = \sqrt{2}$ (1-szeres), $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (1-szeres);
$S_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, $S_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$;
sajátvektorokból álló bázisa: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;
diagonális mátrixa: $A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

4. mátrixa: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$;
sajátértékei és azokhoz tartozó sajátalterek: $\lambda_1 = 1$ (1-szeres), $\lambda_2 = 2$ (1-szeres), $\lambda_3 = 3$ (1-szeres);
$S_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, $S_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$, $S_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$;
sajátvektorokból álló bázisa: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$;
diagonális mátrixa: $A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5. mátrixa: $A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;
sajátértékei és azokhoz tartozó sajátalterek:
$\lambda_1 = \sqrt{2}$ (1-szeres), $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ (1-szeres), $\lambda_3 = -1$ (1-szeres);
$S_1 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$,
$S_2 = \left\{ t \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$,
$S_3 = \left\{ t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$;

sajátvektorokból álló bázisa: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$;

diagonális mátrixa: $A_{\varphi,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.7. Szimmetrikus és ortogonális transzformációk

Rövid elméleti összefoglaló

*Euklideszi vektortér*en egy

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

belső/skaláris szorzattal ellátott vektorteret értünk (pontos definíciót lásd előadás). A belső szorzat tehát két vektorhoz egy számot rendel. Speciálisan, az $\mathbb{R}^n$ euklideszi vektortér kanonikus belső szorzata:

$$\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n \ , \qquad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \ .$$

Egy vektor *hossza* (vagy normája) a kanonikus belső szorzatot használva:

$$v = (v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2} \ .$$

Tekintsünk a V euklideszi vektortéren egy $\varphi \colon V \to V$ leképezést. A φ *adjungáltja* az a $\varphi^* \colon V \to V$ leképezést értjük, melyre teljesül, hogy:

$$\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^*(y) \rangle \ , \qquad \text{minden} \ \ x, y \in V \text{ -re.}$$

φ *szimmetrikus* (vagy önadjungált), ha $\varphi^* = \varphi$, azaz tetszőleges $x, y \in V$ vektorokra $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$ fennáll. Amennyiben φ szimmetrikus, úgy az A_φ mátrixa is szimmetrikus (a kanonikus bázisra vonatkozóan).
φ *ortogonális*, ha $\varphi^* = \varphi^{-1}$, vagyis bármely $x, y \in V$ vektorokra $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi^{-1}(y) \rangle$ teljesül. Az ortogonalitással ekvivalens az a feltétel, hogy a φ megtartja a belső szorzatot ($\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$), és így normatartó (azaz megőrzi a vektorok hosszát). Ha φ ortogonális, akkor a mátrixára teljesül a $A_\varphi^{-1} = A_\varphi^t$ feltétel (a kanonikus bázisra vonatkozóan). (A mátrixra vonatkozó állítás abból következik, hogy valós esetben egy mátrix adjungáltja a mátrix transzponáltjával egyezik meg.)

Feladatok

Legyen adott az $\mathbb{R}^3$ euklideszi vektortér. Az alábbi mátrixok egy-egy $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris transzformáció mátrixai a kanonikus bázisra vonatkozóan. Állapítsuk meg, hogy melyik transzformáció szimmetrikus, melyik ortogonális $\mathbb{R}^3$ kanonikus belső szorzatának alapulvételével!

1. $A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3. $A_\varphi = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

5. $A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $A_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. $A_\varphi = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. Mivel csupán a φ leképezés mátrixa áll a rendelkezésünkre, így a leképezés mátrixára vonatkozó feltételek segítségével döntjük el, hogy a leképezés szimmetrikus-e és/vagy ortogonális-e.
   Egy leképezés szimmetrikus, ha a mátrixa szimmetrikus. A példában szereplő mátrix láthatóan nem szimmetrikus a főátlójára, így a leképezés *nem szimmetrikus*.
   Egy leképezés ortogonális, ha a mátrixának inverze éppen a mátrix transzponáltja (transzponált: a mátrix elemeit a főátlóra tükrözzük). Egy mátrix inverzét balról és jobbról is megszorozva a mátrixszal, éppen az egységmátrixot kell kapni. Ha elvégezzük az $A_\varphi \cdot A_\varphi^t$ és $A_\varphi^t \cdot A_\varphi$ mátrixszorzásokat, és mindkét esetben az egységmátrixot kapjuk, akkor az azt jelenti, hogy $A_\varphi^t = A_\varphi^{-1}$, azaz a leképezés ortogonális.

$$A_\varphi \cdot A_\varphi^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 11 & 19 & 11 \\ 19 & 35 & 23 \\ 11 & 23 & 19 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   A másik szorzást el sem kell végezni, hiszen látható, hogy már az első szorzat sem az egységmátrixot adta, így a feladatbeli φ leképezés *nem ortogonális*.

Végeredmények

2. nem szimmetrikus, nem ortogonális; 3. nem szimmetrikus, nem ortogonális; 4. szimmetrikus, nem ortogonális; 5. nem szimmetrikus, ortogonális (origót tartalmazó tengely körüli elforgatás a térben); 6. szimmetrikus, ortogonális (origót tartalmazó tengely körüli forgatás és egy origót tartalmazó síkra vonatkozó tükrözés egymásutánja a térben, ahol a forgatás tengelye és a tükrözés síkja merőleges egymásra = forgatva tükrözés); 7. szimmetrikus, ortogonális (origót tartalmazó síkra vonatkozó tükrözés a térben)

1.8. Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás

Rövid elméleti összefoglaló

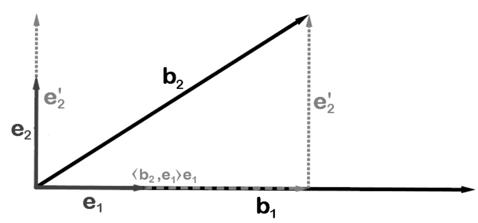
Gram-Schmidt ortogonalizációs eljárás: Legyen V euklideszi vektortér. Ekkor V (vagy V egy alterének) tetszőleges $(b_1, \ldots, b_n)$ bázisához konstruálható olyan $(e_1, \ldots, e_n)$ ortonormált bázis úgy, hogy $\mathcal{L}(b_1, \ldots, b_k) = \mathcal{L}(e_1, \ldots, e_k)$, $k = 1, \ldots, n$. (Ortonormált bázis: a bázisvektorok páronként merőlegesek egymásra és egységnyi hosszúságúak.)
A keresett bázist a következő lépések segítségével konstruálhatjuk meg:
1. lépés: e_1 meghatározása.

$$e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|} \ .$$

Tehát az e_1-et úgy kapjuk, hogy a b_1 vektort elosztjuk a hosszával, így egységnyi hosszúságú vektorhoz jutunk.
2. lépés: e_2 meghatározása.

$$e_2 := \frac{e_2'}{\|e_2'\|} \ , \qquad \text{ahol} \quad e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1 \rangle \, e_1 \ .$$

Itt a $\langle b_2, e_1 \rangle \, e_1$ valójában a b_2 vektor e_1-re való merőleges vetületét jelenti. Az így kapott vektort kivonva a b_2 vektorból olyan e_2' vektort kapunk, ami már valóban merőleges e_1-re, de még nem egységnyi hosszúságú. Ezért el kell osztani a hosszával, és e_2 már e_1-re merőleges egységvektor. Szemléletesen a második lépésben a következő történik:



3. lépés: e_3 meghatározása.

$$e_3 := \frac{e_3'}{\|e_3'\|} \ , \qquad \text{ahol} \quad e_3' = b_3 - \langle b_3, e_1 \rangle \, e_1 - \langle b_3, e_2 \rangle \, e_2 \ .$$

$(k+1)$*. lépés: e_{k+1} meghatározása.*

$$e_{k+1} := \frac{e_{k+1}'}{\left\|e_{k+1}'\right\|} \ ,$$
$$\text{ahol} \quad e_{k+1}' = b_{k+1} - \langle b_{k+1}, e_1 \rangle \, e_1 - \langle b_{k+1}, e_2 \rangle \, e_2 - \ldots - \langle b_{k+1}, e_k \rangle \, e_k \ .$$

Feladatok

Konstruáljunk ortonormált bázist az alábbi bázisból:

1. $b_1 = (1, 4, 2)$, $b_2 = (2, 1, 4)$, $b_3 = (2, 1, 2)$

2. $b_1 = (1, -2, 2)$, $b_2 = (-1, 0, 1)$, $b_3 = (5, -3, -7)$

3. $b_1 = (1,0,1)$, $b_2 = (2,1,0)$, $b_3 = (0,3,1)$
4. $b_1 = (1,1,1)$, $b_2 = (2,-1,-1)$, $b_3 = (2,3,1)$
5. $b_1 = (1,1,2)$, $b_2 = (2,1,1)$, $b_3 = (1,-1,2)$
6. $b_1 = (1,1,0,0)$, $b_2 = (1,0,-1,1)$, $b_3 = (0,1,1,1)$
7. $b_1 = (0,0,1,1)$, $b_2 = (1,1,0,0)$, $b_3 = (1,0,1,1)$, $b_4 = (1,0,1,0)$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. *1. lépés: az e_1 meghatározása.*
Mivel az
$$e_1 := \frac{b_1}{\|b_1\|}$$
vektort úgy kapjuk, hogy a b_1-ből egységvektort készítünk, így szükség lesz a b_1 hosszára:
$$\|b_1\| = \sqrt{1^2+4^2+2^2} = \sqrt{21}$$
Ebből az e_1:
$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,2) = \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right) \ .$$
2. lépés: az e_2 meghatározása.
$$e_2 := \frac{e_2'}{\|e_2'\|} \ , \qquad \text{ahol} \qquad e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle \, e_1 \ .$$
Ahhoz, hogy meghatározzuk az e_2-t, ismernünk kell az e_2'-t. Az e_2' kiszámításához ismerni kell, hogy mennyi a $\langle b_2, e_1\rangle$ belső szorzat. Nyilvánvaló, hogy a számolás lépései a következők:
(1) Kiszámítjuk a $\langle b_2, e_1\rangle$ belső szorzatot (egy valós számot várunk eredményként).
$$\langle b_2, e_1\rangle = \left\langle (2,1,4), \left(\frac{1}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right)\right\rangle = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{21}} + 1\cdot\frac{4}{\sqrt{21}} + 4\cdot\frac{2}{\sqrt{21}} =$$
$$= \frac{2+4+8}{\sqrt{21}} = \frac{14}{\sqrt{21}}$$
(2) Az (1)-ben kapott számot megszorozzuk az e_1 vektorral (az eredmény egy vektor, mégpedig a b_2 e_1-re vonatkozó merőleges vetülete - ld. elméleti rész).
$$\langle b_2, e_1\rangle \, e_1 = \frac{14}{\sqrt{21}}\frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,2) = \frac{14}{21}(1,4,2) = \frac{2}{3}(1,4,2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$
(3) A (2)-ben kapott vektort kivonjuk b_2-ből, és megkapjuk az e_2' vektort.
$$e_2' = b_2 - \langle b_2, e_1\rangle \, e_1 = (2,1,4) - \left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) =$$
$$= \left(2-\frac{2}{3}, 1-\frac{8}{3}, 4-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}(4,-5,8)$$

(4) Kiszámítjuk az e_2' vektor hosszát.

$$\|e_2'\| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+25+64}{9}} = \frac{\sqrt{105}}{3}$$

(5) A kapott hosszúsággal elosztjuk az e_2' vektort, és e_2-höz jutunk.

$$e_2 := \frac{1}{\frac{\sqrt{105}}{3}}\frac{1}{3}(4,-5,8) = \frac{1}{\sqrt{105}}(4,-5,8) = \left(\frac{4}{\sqrt{105}}, -\frac{5}{\sqrt{105}}, \frac{8}{\sqrt{105}}\right)$$

3. lépés: az e_3 meghatározása.

$$e_3 := \frac{e_3'}{\|e_3'\|} = b_3 - \langle b_3, e_1\rangle\, e_1 - \langle b_3, e_2\rangle\, e_2$$

Az e_2 mintájára határozzuk meg az e_3 vektort is. Végiggondoljuk, hogyan tudjuk kiszámítani a keresett e_3' vektort, amiből majd az e_3 vektort megkapjuk.
(1) Kiszámítjuk az $\langle b_3, e_1\rangle$ és az $\langle b_3, e_2\rangle$ belső szorzatok értékét:

$$\langle b_3, e_1\rangle = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{21}} + 1\cdot\frac{4}{\sqrt{21}} + 2\cdot\frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2+4+4}{\sqrt{21}} = \frac{10}{\sqrt{21}}$$
$$\langle b_3, e_2\rangle = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{105}} + 1\cdot\frac{-5}{\sqrt{105}} + 2\cdot\frac{8}{\sqrt{105}} = \frac{8-5+16}{\sqrt{105}} = \frac{19}{\sqrt{105}}$$

(2) Meghatározzuk a $\langle b_3, e_1\rangle\, e_1$ és $\langle b_3, e_2\rangle\, e_2$ vektorokat:

$$\langle b_3, e_1\rangle\, e_1 = \frac{10}{\sqrt{21}}\frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,2) = \frac{10}{21}(1,4,2) = \left(\frac{10}{21}, \frac{40}{21}, \frac{20}{21}\right)$$
$$\langle b_3, e_2\rangle\, e_2 = \frac{19}{\sqrt{105}}\frac{1}{\sqrt{105}}(4,-5,8) = \frac{19}{105}(4,-5,8) = \left(\frac{76}{105}, \frac{-95}{105}, \frac{152}{105}\right)$$

(3) Meghatározzuk az e_3' vektort:

$$\begin{aligned} e_3' &= (2,1,2) - \left(\frac{10}{21}, \frac{40}{21}, \frac{20}{21}\right) - \left(\frac{76}{105}, \frac{-95}{105}, \frac{152}{105}\right) = \\ &= \left(2 - \frac{10}{21} - \frac{76}{105}, 1 - \frac{40}{21} - \frac{-95}{105}, 2 - \frac{20}{21} - \frac{152}{105}\right) = \\ &= \left(\frac{210-50-76}{105}, \frac{105-200+95}{105}, \frac{210-100-152}{105}\right) = \\ &= \left(\frac{84}{105}, 0, \frac{-42}{105}\right) = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{-2}{5}\right) = \frac{2}{5}(2,0,-1) \end{aligned}$$

(4) Kiszámítjuk az e_3' vektor hosszát:

$$\|e_3'\| = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{16+4}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(5) Meghatározzuk az e_3 vektort:

$$e_3 = \frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}\frac{2}{5}(2,0,-1) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)$$

A keresett ortonormált bázis:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{21}}(1,4,2), \frac{1}{\sqrt{105}}(4,-5,8), \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,-1)\right\} \quad .$$

Végeredmények

2. $e_1 = \frac{1}{3}(1,-2,2)$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{17}}(-10,2,7)$, $e_3 = -\frac{1}{\sqrt{17}}(2,3,2)$
3. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)$
4. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$
5. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{66}}(7,1,-4)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{11}}(1,-3,1)$
6. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,-1,-2,2)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-1,1,2,3)$
7. $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0)$, $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$, $e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$

HASZNOS ÖSSZEFOGLALÓ

A következőkben röviden összefoglaljuk a későbbiekben szükséges lineáris algebrai „minimum-tudást”. Legyenek $v = (v_1, v_2, v_3)$ és $w = (w_1, w_2, w_3)$ vektorok $\mathbb{R}^3$-beliek.

v és w belső szorzata: $\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3 \;\in \mathbb{R}$

v és w külső szorzata:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \ldots =$$
$$= (v_2w_3 - v_3w_2)\, e_1 + (v_3w_1 - v_1w_3)\, e_2 + (v_1w_2 - v_2w_1)\, e_3 =$$
$$= (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1) \;\in \mathbb{R}^3$$

Vegyük észre, hogy két vektor belső (skaláris) szorzata egy szám, míg a külső (vektoriális) szorzatuk eredménye egy vektor.
Az előállításból könnyen megjegyezhetjük azt is, hogy a külső szorzat ferdeszimmetrikus, azaz $v \times w = -\,(w \times v)$.

A u, v és w vektorok *vegyes szorzata*: $|u, v, w| = \langle u \times v, w\rangle$.

A $v \in \mathbb{R}^3$ vektor *hossza*: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.
A v és w vektorok végpontjainak távolsága a különbségvektoruk (d) hossza:

$$\|d\| = \|v - w\| = \sqrt{(v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 + (v_3 - w_3)^2}$$

(Itt a d vektor kezdőpontja a w végpontja, végpontja a v végpontja.)

Egy másik megközelítést használva a v és w vektorok belső és külső szorzata felírható az általuk közbezárt φ szög segítségével is:

$$\langle v, w\rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos\varphi$$
$$\|v \times w\| = \|v\| \cdot \|w\| \cdot \sin\varphi$$

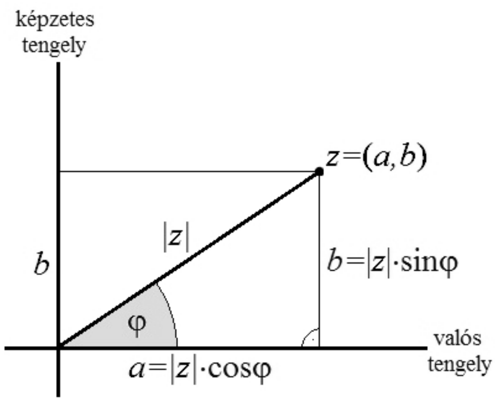
2. fejezet

Egyváltozós függvények analízise

2.1. Komplex számok

Rövid elméleti összefoglaló

*Komplex szám*on egy $z = (a, b)$ valós számpárt értünk. Az a a z komplex szám valós része, a b a z képzetes része. A komplex számok halmazának jele: $\mathbb{C}$, így $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ írható. Tetszőleges komplex számot egy vektorként is szemléltethetünk az ún. *Gauss-féle komplex számsík*on (amely lényegében ugyanaz, mint a középiskolából ismert Descartes-féle koordinátarendszer), ahol az x-tengely a valós tengely, az y-tengely a képzetes tengely.



Komplex számok esetében az összeadás és a szorzás az alábbiak alapján történik:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor $a = (a, 0)$ – tehát $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Legyen $i := (0, 1)$, ezt a számot *képzetes/imaginárius egység*nek nevezzük. Könnyen látható, hogy $i^2 = -1$. (Az i az $x^2 + 1 = 0$ egyenlet – egyik – megoldása.)
Egy $z = (a, b)$ komplex szám

algebrai alakja: $z = a + i \cdot b$;
konjugáltja: $\bar{z} = a - i \cdot b$ (azaz a z vektort tükrözzük a valós tengelyre);
abszolút értéke: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ (a z vektor hossza);

trigonometrikus alakja: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$ (a, b és $|z|$ egy derékszögű háromszög oldalai);

exponenciális alakja: $z = |z| \cdot e^{i\varphi}$ (a $\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi = e^{i\varphi}$ ún. Euler-formula alapján). Komplex számok körében a hatványozást a következő képlettel írhatjuk le:

$$z^n = |z|^n \left(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)\right) \qquad \textit{Moivre-képlet}$$

Bebizonyítható, hogy komplex számok esetén a $w = \sqrt[n]{z}$ egyenletnek pontosan n db megoldása van, amelyeket a Gauss-féle komplex számsíkon ábrázolva egy szabályos n-szög csúcsait adják:

$$\sqrt[n]{z} = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) =$$

$$= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + k \cdot 360^\circ}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Speciális eset az $1 = (1, 0)$ komplex szám gyökei, az *n-edik egységgyökök*:

$$\sqrt[n]{1} = w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n} = \cos\frac{k \cdot 360^\circ}{n} + i \cdot \sin\frac{k \cdot 360^\circ}{n}$$

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő összeadásokat:
   a) $2i + 3i$, b) $(5 + 4i) + (7 + 3i)$, c) $(3 - i) + (3 + i)$, d) $(2 + i) + (4i) + (3 + 3i)$

2. Szorozzuk össze az alábbi komplex számokat:
   a) $4 \cdot (-i)$, b) $(-i) \cdot (-i)$, c) $(3 - 2i) \cdot i$, d) $(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)$, e) $(5 + 7i) \cdot (1 - i)$, f) i^4, g) i^5

3. Határozzuk meg a következő osztások eredményét:
   a) $\dfrac{4i}{-2i}$, b) $\dfrac{3 + 2i}{i}$, c) $\dfrac{3 + 2i}{3 - 2i}$, d) $\dfrac{8}{2 - 7i}$, e) $\dfrac{6 + 3i}{-4 + 2i}$

4. Számítsuk ki az z komplex szám abszolút értékét, ha
   a) $z = i$, b) $z = 77 + 77i$, c) $z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$, d) $z = -1 - i$, e) $z = -7i$

5. Hozzuk trigonometrikus alakra z komplex számokat:
   a) $z = 2$, b) $z = i$, c) $z = 1 - i$, d) $z = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, e) $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$

6. Határozzuk meg és rajzoljuk fel a következő komplex számok n-edik gyökeit!
   a) $z = -2 + 2i$, $n = 3$; b) $z = 3 - 3i$, $n = 3$; c) $z = 1 + i$, $n = 4$

7. Írjuk fel a második, harmadik és negyedik egységgyököket!

8. Oldjuk meg a következő egyenleteket:
   a) $(2 + 3i)z - 4i = 0$
   b) $z^2 + 1 = 0$
   c) $2i \cdot z^2 + 2i \cdot z + 1 = 0$
   d) $z^4 - 2 - 2i = 0$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/b Komplex számok összeadásakor a valós részeket összeadjuk, így kapjuk a valós részt, és ugyanígy járunk el a képzetes résszel is:
$(5+4i)+(7+3i)=5+4i+7+3i=12+7i$.
Figyeljük meg, hogy ugyanazt a számolást végezzük el, ha az összeadás definícióját használjuk fel: $(5,4)+(7,3)=(5+7,4+3)=(12,7)$.

2/e Két (vagy több) komplex szám szorzásakor – ha a számok algebrai alakban adottak – egyszerűen úgy járunk el, mintha többtagú kifejezéseket szoroznánk össze. Felhasználva, hogy $i^2=-1$, a következőt kapjuk: $(5+7i)\cdot(1-i)=5-5i+7i-7i^2=5+2i-7\cdot(-1)=12+2i$.
Ugyanerre jutunk, ha a szorzás definíciójából indulunk ki:
$(5,7)\cdot(1,-1)=(5-(-7),-5+7)=(12,2)$.

3/e Osztás esetén bővítsünk a nevező konjugáltjával, így minden esetben eltűnik a nevező képzetes része, és csupán egy valós számmal való osztás marad:

$$\frac{6+3i}{-4+2i}=\frac{(6+3i)(-4-2i)}{(-4+2i)(-4-2i)}\overset{(*)}{=}\frac{-24-12i-12i-6i^2}{16+4}=$$
$$=\frac{-24-24i+6}{20}=\frac{-18-24i}{20}=-\frac{18}{20}-\frac{24}{20}i=-\frac{9}{10}-\frac{6}{5}i$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben felhasználtuk, hogy ha $z=a+ib$, akkor $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$.

4/c $$\left|\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\sqrt{1}=1$$

5/e A z algebrai alakban adott, a trigonometrikus alak általános képlete:
$z=|z|\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, ahol φ a z-nek mint vektornak valós tengellyel bezárt szöge.
Számítsuk ki először a komplex szám abszolút értékét:

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{1}=1$$

A trigonometrikus alakból eddig csak a vektor hosszát tudjuk:

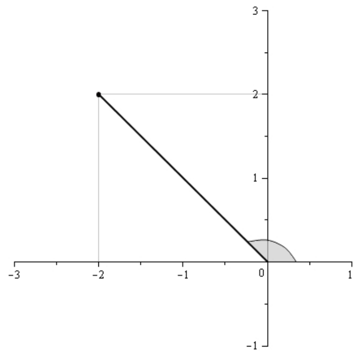
$$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i=1\cdot(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$$

Két komplex szám pontosan egyenlő, ha a valós részek is és a képzetes részek is megegyeznek:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=1\cdot\cos\varphi \quad \text{és} \quad -\frac{1}{2}=1\cdot\sin\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi=-\frac{\pi}{6}=-30^\circ$$

A keresett trigonometrikus alak: $z=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.
Megjegyzés: Amennyiben a szinusz- és koszinusz-függvény értékei nem nevezetesek, azt alábbi lépéseket érdemes követni. Elsőként rajzoljuk fel a komplex számot mint vektort a Gauss-féle komplex számsíkon, ezzel meglátjuk, hogy melyik síknegyedbe tartozik a vektor végpontja és körülbelül mennyi a hozzá tartozó φ szög. Ezután pedig a $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ alapján – például számológép segítségével – megkereshetjük a φ értékét.

6/a Első lépésben határozzuk meg a $z = -2 + 2i$ komplex szám trigonometrikus alakját, mivel a gyökök felírásához használt képletet csak így tudjuk alkalmazni. Rajzoljuk fel a komplex számot. Előfordulhat, hogy már az ábráról látszik a komplex számhoz tartozó szög, így nincs szükség az előző feladatban szereplő megoldási módszer alkalmazására.



Az ábráról azonnal leolvasható, hogy a z komplex számhoz tartozó szög $\varphi = 135°$. A z hossza: $|z| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, és így a keresett trigonometrikus alak: $z = \sqrt{8}(\cos 135° + i \cdot \sin 135°)$.
A következő lépésben írjuk fel a képletet, ahol $n = 3$, azaz a z harmadik gyökeit keressük:

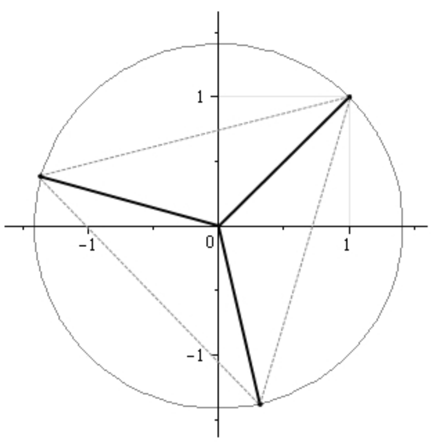
$$\sqrt[3]{z} = w_k = \sqrt[3]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{135° + k \cdot 360°}{3} + i \cdot \sin\frac{135° + k \cdot 360°}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$w_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{135° + 0 \cdot 360°}{3} + i \cdot \sin\frac{135° + 0 \cdot 360°}{3}\right) = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \cdot \sin 45°)$$

$$w_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{135° + 1 \cdot 360°}{3} + i \cdot \sin\frac{135° + 1 \cdot 360°}{3}\right) = \sqrt{2}\,(\cos 165° + i \cdot \sin 165°)$$

$$w_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{135° + 2 \cdot 360°}{3} + i \cdot \sin\frac{135° + 2 \cdot 360°}{3}\right) = \sqrt{2}\,(\cos 285° + i \cdot \sin 285°)$$

Felhasználva, hogy $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$.
Hátra van még a komplex gyökök ábrázolása, amelyek egy szabályos háromszög csúcsait adják:



(A gyökök rajta vannak egy $\sqrt{2}$ sugarú, origó középpontú körön, a gyökökhöz

tartozó szögek rendre: $45°, 165°, 285°$.)
Vegyük észre, hogy az első gyök (w_0) meghatározása után elegendő, ha tudjuk, hogy a gyökök szabályos sokszöget határoznak meg. Szabályos háromszög esetén az origónál lévő szögek között $\frac{360°}{3} = 120°$ különbség van. Például: $45°+120° = 165°$ vagy $165° + 120° = 285°$.

7. Meghatározzuk például a negyedik egységgyököket. Tudjuk, hogy ekkor a komplex számok körében 4 megoldást kapunk, amelyek egy szabályos négyszöget (azaz négyzetet) adnak a Gauss-féle komplex számsíkon. Az n-edik (komplex) egységgyökök képlete: $w_k = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{2k\pi}{n}$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
Így a negyedik egységgyökök:

$$\begin{aligned}
w_0 &= \cos\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{2\cdot 0\cdot\pi}{4} = \cos 0 + i\sin 0 = 1\\
w_1 &= \cos\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{2\cdot 1\cdot\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i\\
w_2 &= \cos\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{2\cdot 2\cdot\pi}{4} = \cos\pi + i\sin\pi = -1\\
w_3 &= \cos\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{2\cdot 3\cdot\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i
\end{aligned}$$

8/a Rendezzük át az egyenletet, így két komplex szám hányadosát kapjuk (lásd 3. feladat):

$$\begin{aligned}
(2+3i)\cdot z - 4i &= 0\\
z &= \frac{4i}{2+3i} = \ldots = \frac{12}{13} + \frac{8}{13}i
\end{aligned}$$

8/b Ismét rendezzük az egyenletet, így egy szám gyökeit kell meghatározni:

$$\begin{aligned}
z^2 + 1 &= 0\\
z^2 &= -1\\
z &= \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

A -1 komplex gyökeit keressük. A -1 abszolút értéke $|-1| = 1$; a hozzá tartozó φ szög pedig π (ez kiszámítható az 5. feladat segítségével, vagy egyszerűen a Gauss-féle komplex számsíkról is leolvasható a szög). Mindezek felhasználásával a két komplex gyök (0 és 1 indexek helyett most 1-et és 2-t írunk):

$$\begin{aligned}
z_1 &= \cos\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 0\cdot\pi}{2} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + 1\cdot i = i\\
z_2 &= \cos\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{2} + i\sin\frac{\pi + 2\cdot 1\cdot\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - 1\cdot i = -i
\end{aligned}$$

Az egyenlet két megoldása: $z_1 = i$ és $z_2 = -i$.
Megjegyzés: Vegyük észre, hogy komplex négyzetgyök esetén az egyik gyök a másiknak (-1)-szerese. (Ugyanez történik a második egységgyököknél is.)

8/c Komplex számok körében használhatjuk a másodfokú egyenlet megoldóképletét:

$$z_{1,2} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4 \cdot 2i \cdot 1}}{2 \cdot 2i} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4-8i}}{4i} \overset{!!!}{=} \frac{-2i + \sqrt{-4-8i}}{4i} = \dots$$

Az előző megjegyzés miatt a négyzetgyök előtt szereplő $\pm$ helyett $+$ írható. (Gondoljuk végig, hogy ha meghagyjuk a két megoldást adó $\pm$-t, attól függetlenül a komplex négyzetgyöknek két különböző megoldása lesz, egyik a másiknak (-1)-szerese. Így elvileg 4 megoldást kapunk, amelyeknél a négyzetgyökös rész előjele $(+)\cdot(+) = (+)$, $(+)\cdot(-) = (-)$, $(-)\cdot(+) = (-)$ és $(-)\cdot(-) = (+)$ lehet. Ez pedig csupán két különböző gyök, így a $\pm$ helyett valóban elegendő $+$-t írni.)
Folytatva a számolást:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{-2i + \sqrt{(-4)(1+2i)}}{4i} = \frac{-2i + \sqrt{(-1)\cdot 4 \cdot (1+2i)}}{4i} = \\ &= \frac{-2i + 2i\sqrt{1+2i}}{4i} = \frac{-1+\sqrt{1+2i}}{2} \end{aligned}$$

Ahhoz, hogy valóban megkapjuk a keresett két gyököt, ki kell számítani az $1+2i$ komplex szám négyzetgyökeit.
Ezek meghatározásához első lépésben át kell alakítani az algebrai alakot trigonometrikus alakra. A trigonometrikus alakhoz szükség van a szám abszolút értékére: $|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. Írjuk fel az algebrai és a trigonometrikus alakot, majd használjuk ki, hogy a valós és a képzetes részeknek meg kell egyezniük:

$$\begin{aligned} 1+2i = &\sqrt{5}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{5}\cos\varphi + i\sqrt{5}\sin\varphi \\ &\begin{cases} 1 = \sqrt{5}\cos\varphi \\ 2 = \sqrt{5}\sin\varphi \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}} = \cos\varphi \\ \frac{2}{\sqrt{5}} = \sin\varphi \end{cases} \\ &\Longrightarrow \qquad \varphi \approx 63,435^\circ \end{aligned}$$

Így $1+2i = \sqrt{5}\,(\cos 63,435^\circ + i\sin 63,435^\circ)$. Ennek a négyzetgyökei:

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{63,435^\circ + 2\cdot 0\cdot 180^\circ}{2} + i\sin\frac{63,435^\circ + 2\cdot 0\cdot 180^\circ}{2}\right) = \\ &= \sqrt[4]{5}\left(\cos\frac{63,435^\circ}{2} + i\sin\frac{63,435^\circ}{2}\right) = \\ &= \sqrt[4]{5}\,(\cos 31,7175^\circ + i\sin 31,7175^\circ) \\ w_1 &= \sqrt{\sqrt{5}}\left(\cos\frac{63,435^\circ + 2\cdot 1\cdot 180^\circ}{2} + i\sin\frac{63,435^\circ + 2\cdot 1\cdot 180^\circ}{2}\right) = \\ &= \sqrt[4]{5}\,(\cos(31,7175^\circ + 180^\circ) + i\sin(31,7175^\circ + 180^\circ)) = \\ &= \sqrt[4]{5}\,(-\cos 31,7175^\circ - i\sin 31,7175) = \\ &= -\sqrt[4]{5}\,(\cos 31,7175^\circ + i\sin 31,7175) \end{aligned}$$

A két négyzetgyök birtokában az egyenlet két megoldása:

$$z_1 = \frac{-1 + \left(\sqrt[4]{5}\,(\cos 31,7175^\circ + i \sin 31,7175)\right)}{2}$$
$$z_2 = \frac{-1 - \left(\sqrt[4]{5}\,(\cos 31,7175^\circ + i \sin 31,7175)\right)}{2}$$

8/d Az egyenletben az ismeretlent a bal oldalra rendezve láthatjuk, hogy egy komplex szám negyedik gyökeit kell meghatározni. Az egyenletnek így 4 különböző komplex megoldása lesz.

$$z^4 - 2 - 2i = 0$$
$$z = \sqrt[4]{2+2i}$$

A gyökök felírásához szükség van a $2+2i$ trigonometrikus alakjára (lásd 5. feladat):

$$|2+2i| = \sqrt{8}$$
$$2+2i = \sqrt{8}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$
$$\begin{cases} 2 = \sqrt{8}\cos\varphi \\ 2 = \sqrt{8}\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2 = 2\sqrt{2}\cos\varphi \\ 2 = 2\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\varphi \\ \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\varphi \end{cases}$$
$$\Longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

Így $2+2i = \sqrt{8}\,(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$.
A keresett 4 különböző megoldás pedig:

$$z_1 = \sqrt[4]{\sqrt{8}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot\pi}{4} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4} + 2\cdot 0\cdot\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{\pi}{16} + i\sin\frac{\pi}{16}\right)$$
$$z_2 = \ldots = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{9\pi}{16} + i\sin\frac{9\pi}{16}\right)$$
$$z_3 = \ldots = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{17\pi}{16} + i\sin\frac{17\pi}{16}\right)$$
$$z_4 = \ldots = \sqrt[8]{8}\left(\cos\frac{25\pi}{16} + i\sin\frac{25\pi}{16}\right)$$

Végeredmények

1. a) $5i$, b) $12+7i$, c) 6, d) $5+8i$
2. a) $-4i$, b) -1, c) $2+3i$, d) 13, e) $12+2i$, f) 1, g) i
3. a) -2, b) $2-3i$, c) $\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$, d) $\frac{16}{53}+\frac{56}{53}i$, e) $-\frac{9}{10}-\frac{6}{5}i$
4. a) 1, b) $77\cdot\sqrt{2}$, c) 1, d) $\sqrt{2}$, e) 7

5. a) $z = 2(\cos 0 + i \sin 0)$, b) $z = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$,
   c) $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,
   d) $z = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$

6. b) $w_0 = \sqrt[6]{18}\,(\cos 105^\circ + i \cdot \sin 105^\circ)$, $w_1 = \sqrt[6]{18}\,(\cos 225^\circ + i \cdot \sin 225^\circ)$,
   $w_2 = \sqrt[6]{18}\,(\cos 345^\circ + i \cdot \sin 345^\circ)$;
   c) $w_0 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 11,25^\circ + i \cdot \sin 11,25^\circ)$, $w_1 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 101,25^\circ + i \cdot \sin 101,25^\circ)$,
   $w_2 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 191,25^\circ + i \cdot \sin 191,25^\circ)$, $w_3 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 281,25^\circ + i \cdot \sin 281,25^\circ)$

7. Második egységgyökök:

$$w_0 = \cos \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$w_1 = \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

   Harmadik egységgyökök:

$$w_0 = \cos \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3} = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$
$$w_1 = \cos \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$w_2 = \cos \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} + i \sin \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

2.2. Számsorozatok határértéke

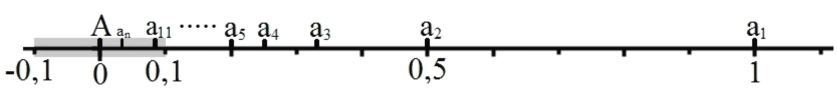
Rövid elméleti összefoglaló

Ha a természetes számok mindegyikéhez egy-egy számot rendelünk, akkor (szám)sorozatot kapunk. Egy sorozatot általában (a_n)-nel, míg az n-edik elemét a_n-nel jelöljük. A sorozatot megadhatjuk tetszőleges elemének felírásával (például $a_n = \frac{1}{n}$), vagy rekurzív módon (például $a_1 = 3$ és $a_{n+1} = 5 \cdot a_n - 2$).

Egy (a_n) sorozatnak egy A valós szám a *határértéke* (az (a_n) sorozat *konvergál*/tart A-hoz), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan n_0 küszöbindex (ez az a_{n_0} sorozatelem „sorszáma”), amelytől kezdve a sorozat összes többi eleme az $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ intervallumban van. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ vagy $a_n \longrightarrow A$.
Ha egy sorozat nem konvergens, akkor divergens (széttartó).

Konvergens sorozatok összege, különbsége, szorzata, hányadosa és számszorosa is konvergens, és az így kapott sorozat határértéke éppen az eredeti sorozatok határértékeinek összege, különbsége, szorzata, hányadosa, illetve számszorosa.

Alapvető példa: Az $a_n = \dfrac{1}{n}$ úgynevezett nullsorozat, mert $\dfrac{1}{n} \longrightarrow 0$.
Ennek szemléletes igazolásához ábrázoljuk a valós számegyenesen a sorozat elemeit:



Könnyen belátható, hogy az $\frac{1}{n}$ sohasem lehet negatív szám, sem pedig nulla, hiszen n természetes szám. Látható az is, hogy a sorozat monoton csökkenő. Így a sorozat elemei a következők: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{1000000000}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$. Tetszőlegesen kiválaszthatunk egy „elegendően kicsi” valós számot (a definícióban ez az ε, legyen például $\varepsilon = 0,1$), ahhoz találunk olyan sorozatelemet, amelytől kezdve az összes többi nagyobb „sorszámú” sorozatelem már $]0-0,1\,,\,0+0,1[$ intervallumban van. Az ábráról leolvasható, hogy az $\varepsilon = 0,1$-hez megfelelő „sorszám” (az n_0 küszöbindex) lehet az $n = 10$, mert az attól nagyobb sorszámú elemek (például $n = 11$ esetén $a_{11} = \frac{1}{11}$) már az adott intervallumba esnek.

Néhány nevezetes sorozat határértéke:

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\frac{c_k n^k + \ldots + c_0}{d_l n^l + \ldots + d_0} \longrightarrow 0, \quad \text{ha } k < l \qquad c_k, \ldots, c_0, d_l, \ldots, d_0 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{\pm c_k n^k + \ldots + c_0}{\pm d_l n^l + \ldots + d_0} \longrightarrow \pm\infty, \quad \text{ha } k > l \qquad c_k, \ldots, c_0, d_l, \ldots, d_0 \in \mathbb{R}$$

$$\frac{c_k n^k + \ldots + c_0}{d_l n^l + \ldots + d_0} \longrightarrow \frac{c_k}{d_l}, \quad \text{ha } k = l \qquad c_k, \ldots, c_0, d_l, \ldots, d_0 \in \mathbb{R}$$

$$a_n^k \longrightarrow A^k\,, \quad \text{ha } a_n \longrightarrow A$$

$$k^{a_n} \longrightarrow k^A\,, \quad \text{ha } a_n \longrightarrow A$$

$$\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$$

$$\sqrt[n]{k} \longrightarrow 1\,, \qquad k \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt[n]{a_n} \longrightarrow 1\,, \qquad \text{ha} \quad a_n \longrightarrow A > 0$$

$$\sqrt[k]{n} \longrightarrow +\infty$$

$$\sqrt[n]{n!} \longrightarrow +\infty$$

$$k^n \longrightarrow 0\,, \quad \text{ha } |k| < 1$$

$$k^n \longrightarrow +\infty\,, \quad \text{ha } k > 1\,; \qquad \text{és} \qquad k^n \text{ divergens, ha } k \leq -1$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e \approx 2,71$$

$$\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \longrightarrow e\,, \qquad \text{ha} \quad a_n \longrightarrow \pm\infty$$

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékét, amennyiben az létezik!

1. $a_n = 4$

2. a) $a_n = \sin(2\pi \cdot n^2)$ b) $a_n = \sin(n^2 + 1)$

3. $a_n = \dfrac{5}{n} - 4$

4. $a_n = \log_2(n^2 + n)$

5. $a_n = \cos\left(\dfrac{2n-10\pi}{n^2+1}\right)$

6. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

7. $a_n = \dfrac{3n+1000000000000000000}{n^2}$

8. $a_n = \dfrac{15n^4-6n^2+33n-4}{3n^4+1}$

9. $a_n = \dfrac{-28n^3+\pi}{n-n^2}$

10. $a_n = \dfrac{-2n^9-1}{87n^5+333n^4+123n^7-25n+999}$

11. $a_n = \dfrac{49n^3-1000000n+\cos\pi}{83n^2-7n^3+85}$

12. $a_n = \dfrac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2}$

13. $a_n = \dfrac{n^2+33n-5}{2n^2-4}+\dfrac{999}{n}-6\pi$

14. $a_n = \dfrac{3\sqrt{n^3}+\sqrt{n}-7}{4n+2}$

15. $a_n = \dfrac{5n^2-2\sqrt{n}+3}{\sqrt{n^7}+11n}$

16. $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$

17. $a_n = \sqrt{n^2+1}-2n$

18. $a_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$

19. $a_n = \left(\dfrac{n^2+3}{n^3-8}\right)^6$

20. $a_n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}$

21. $a_n = \dfrac{10^n+10^2}{-5^n+2^n+10^5}$

22. $a_n = \dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}$

23. $a_n = \dfrac{2^{n+1}+3^n+7^{n-1}}{2^n-3^{n+1}+7^{n-2}}$

24. $a_n = \dfrac{2^{\frac{n+1}{n}}}{2^{\frac{n-3}{n}}}$

25. $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^n$

26. $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$

27. $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n$

28. $a_n = \left(\dfrac{n-1}{3n}\right)^n$

29. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{n}\right)^{4n}$

30. $a_n = \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

31. $a_n = \left(\dfrac{n+3}{2n+2}\right)^{2n+1}$

32. $a_n = \left(\dfrac{n+4}{n-1}\right)^{3n-2}$

33. $a_n = \dfrac{5^{n+1}}{n!}$
Vizsgáljuk meg ezt a sorozatot korlátosság és monotonitás szempontjából is!

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

8. A feladatbeli sorozat alakja $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$; az ilyen sorozatnak a következőképpen lehet meghatározni a határértékét: Válasszuk ki a nevezőben előforduló legmagasabb fokszámú tagot, és osszuk el mind a számlálót, mind pedig a nevezőt ezzel a taggal. Az így kapott emeletes tört esetében a számlálóban is és a nevezőben is nullához tartó sorozatokat ($\frac{1}{n^k}$ típusúakat) és esetlegesen konstansokat (valós számokat) kapunk, amelyekkel már könnyen eldönthető a sorozat határértéke. A megoldás elvét erre a feladatra használva:

$$\frac{15n^4 - 6n^2 + 33n - 4}{3n^4 + 1} = \frac{15\frac{n^4}{n^4} - 6\frac{n^2}{n^4} + 33\frac{n}{n^4} - 4\frac{1}{n^4}}{3\frac{n^4}{n^4} + \frac{1}{n^4}} =$$

$$= \frac{15 - 6\frac{1}{n^2} + 33\frac{1}{n^3} - 4\frac{1}{n^4}}{3 + \frac{1}{n^4}} \longrightarrow \frac{15 - 6\cdot 0 + 33\cdot 0 - 4\cdot 0}{3 + 1\cdot 0} = \frac{15}{3} = 5$$

A végeredmény tehát:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{15n^4 - 6n^2 + 33n - 4}{3n^4 + 1} = 5 \quad \text{vagy} \quad \frac{15n^4 - 6n^2 + 33n - 4}{3n^4 + 1} \longrightarrow 5$$

Megjegyzés: A fenti módszert használva könnyen belátható, hogy ha egy $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ típusú sorozat nevezőjében található polinom fokszáma magasabb, mint a számlálóbeli polinom fokszáma, akkor a sorozat nullsorozat; fordított esetben a sorozat a

$\pm\infty$-hez tart (attól függően, hogy a főegyütthatók előjele azonos vagy különböző); végül azonos fokszám esetén a főegyütthatók hányadosa lesz a határérték.

12. Ez a feladat a $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ sorozattípusra vezethető vissza. Vonjunk a nevezőből is harmadik gyököt, és egyúttal emeljük is harmadik hatványra:

$$\frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2} = \frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{\sqrt[3]{(n+2)^3}} = \sqrt[3]{\frac{4n^2+3n}{(n+2)^3}} =$$
$$= \sqrt[3]{\frac{4n^2+3n}{n^3+3\cdot n^2\cdot 2+3\cdot n\cdot 2^2+2^3}} = \sqrt[3]{\frac{4n^2+3n}{n^3+6n^2+12n+8}}$$

A harmadik gyök alatt $\frac{\text{polinom}}{\text{polinom}}$ típusú sorozat található, amelynek a határértékét ki tudjuk számítani. Azt is tudjuk, hogy egy sorozatot valamely hatványra emelve éppen a sorozat-határérték adott hatványát kapjuk. Így a határérték:

$$\frac{\sqrt[3]{4n^2+3n}}{n+2} = \sqrt[3]{\frac{4n^2+3n}{n^3+6n^2+12n+8}} = \left(\frac{4n^2+3n}{n^3+6n^2+12n+8}\right)^{\frac{1}{3}} =$$
$$= \left(\frac{4\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}{1+6\cdot\frac{1}{n}+12\cdot\frac{1}{n^2}+8\cdot\frac{1}{n^3}}\right)^{\frac{1}{3}} \longrightarrow 0^{\frac{1}{3}} = 0$$

14. A feladatot a 8. példához hasonlóan oldhatjuk meg: beosztjuk a számlálót és a nevezőt is a nevezőben található legmagasabb fokszámú taggal.

$$\frac{3\sqrt{n^3}+\sqrt{n}-7}{4n+2} = \frac{3\frac{\sqrt{n^3}}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}-\frac{7}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{3\frac{n^{\frac{3}{2}}}{n}+\frac{n^{\frac{1}{2}}}{n}-\frac{7}{n}}{4+\frac{2}{n}} =$$
$$= \frac{3n^{\frac{3}{2}-1}+n^{\frac{1}{2}-1}-\frac{7}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{3n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}-\frac{7}{n}}{4+\frac{2}{n}} = \frac{3\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{7}{n}}{4+\frac{2}{n}} \longrightarrow +\infty$$

18. A $\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$ sorozat határértékét (és az ehhez hasonló sorozatok határértékeit) az alábbi trükkel könnyedén meghatározhatjuk: Szorozzuk meg és osszuk el a sorozatot $\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)$-gyel. Ekkor a számlálóban $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ azonosságot ismerhetjük fel. A továbbiakban pedig úgy számoljuk ki a határértéket, ahogyan azt a korábbi feladatoknál is láthattuk.

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1} = \frac{\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n^2+n}\right)^2-\left(\sqrt{n^2+1}\right)^2}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2+n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} =$$
$$= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{n-1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{n}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}} =$$
$$= \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2}}+\sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \longrightarrow \frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$$

A $(*)$ lépésben megvizsgáltuk, hogy melyik a legnagyobb fokszámú tag a kifejezésben. A számlálóban n, míg a nevezőben az $\sqrt{n^2+n}$, ami itt – fokszám szempontjából – durván n-nek (és $n^{\frac{1}{2}}$-nek) tekinthető. Ezért osztottuk a számlálót és a nevezőt is n-nel.
Megjegyzés: A fenti megoldási módszert azért kellett használnunk, mert a sorozat kifejezésében található két tag $+\infty$-hez tart, így a határérték „$+\infty-(+\infty)$” alakot öltene, amire nincs szabály (és próbálgatással, logikázgatással hibás eredményt kaphatunk).
(Ha a határérték „$+\infty+(+\infty)$”-alakú, az a sorozat tényleg $+\infty$-hez tart.)

21. E példához hasonló sorozatok esetében úgy járhatunk el, hogy megkeressük a nevezőben – a konstansokat leszámítva – a legnagyobb alapot és az ahhoz tartozó legnagyobb kitevőt. Ezzel a kifejezéssel elosztjuk mind a számlálót, mind pedig a nevezőt. Így főként nullsorozatokat és konstansokat kapunk a törtben, amikkel egyszerű számolni. Lássuk a példát, amelyben az 5^n a legnagyobb alapú és legnagyobb kitevőjű tag:

$$\frac{10^n+10^2}{-5^n+2^n+10^5}=\frac{\frac{10^n+10^2}{5^n}}{\frac{-5^n+2^n+10^5}{5^n}}=\frac{\frac{10^n}{5^n}+\frac{10^2}{5^n}}{-\frac{5^n}{5^n}+\frac{2^n}{5^n}+\frac{10^5}{5^n}}=\frac{\left(\frac{10}{5}\right)^n+10^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{-1+\left(\frac{2}{5}\right)^n+10^5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

A $\left(\frac{10}{5}\right)^n=2^n$ sorozat nyilvánvalóan a $+\infty$-hez tart. Azt is tudjuk (lásd az elmleti összefoglalót), hogy ha egy szám 1-nél kisebb, akkor az n-edik hatványa nullához tart (ha n a végtelenhez tart). Ezért az $\left(\frac{1}{5}\right)^n$ és a $\left(\frac{2}{5}\right)^n$ is nullsorozat.
Innen a keresett határérték:

$$\frac{10^n+10^2}{-5^n+2^n+10^5}=\frac{2^n+10^2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}{-1+\left(\frac{2}{5}\right)^n+10^5\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n}\longrightarrow\frac{+\infty+0}{-1+0+0}=-\infty$$

22. Ez a példa a 21. feladat megoldási módszerét követi. Itt a legnagyobb alapú és legnagyobb kitevőjű tag a 3^{n+1}, ezért:

$$\frac{2^{n+1}+3^n}{2^n+3^{n+1}}=\frac{\frac{2^{n+1}+3^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+3^{n+1}}{3^{n+1}}}=\frac{\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}+\frac{3^n}{3^{n+1}}}{\frac{2^n}{3^{n+1}}+\frac{3^{n+1}}{3^{n+1}}}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+\frac{1}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\frac{1}{3}+1}\longrightarrow\frac{0+\frac{1}{3}}{0\cdot\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{3}$$

25. A 25-32. feladatok az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat módosított verziói. Célunk a sorozat olyan átalakítása, amelyben felfedezhető a $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}$ alak, amelyről tudjuk, hogy e-hez tart, ha $a_n\longrightarrow\pm\infty$. Tekintsük a példát:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2}\cdot 2n}=\left(\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

28. Ebben a példában azt mutatjuk meg, hogy néha – ha lehetséges(!) – a könnyebb számolás érdekében érdemes konstansokat kiemelni az adott kifejezésből, így két

(vagy több) sorozat szorzatára bontható az eredeti sorozat:

$$\left(\frac{n-1}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{-n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n\cdot(-1)} =$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot \left(\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right)^{-1} \longrightarrow 0\cdot e^{-1} = 0\cdot\frac{1}{e} = 0$$

32. Ez a feladat az e-hez tartó sorozatok egyik nehezebb esete. A megoldás elve nem változik a 25. feladat megoldásában elmondottakhoz képest, de a kitevő átalakítására jobban kell figyelnünk:

$$\left(\frac{n+4}{n-1}\right)^{3n-2} = \left(1+\frac{5}{n-1}\right)^{3n-2} = \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{3n-2} = \dots$$

A továbblépéshez az kell, hogy a kitevőben felfedezzük a zárójelen belüli nevezőt, azaz a $3n-2$ kifejezést kell úgy alakítani, hogy szerepeljen benne a $\frac{n-1}{5}$.
Az átalakítás során – a nevezőbeli kifejezésből indulva – először az n-től függő tagot alakítjuk át, majd a kimaradó konstanst úgy igazítjuk, hogy a kitevőt kapjuk:

$$x\cdot\frac{n-1}{5} + y = 3n-2 \quad - \text{ keressük } x\text{-et és } y\text{-t}$$
$$\frac{n-1}{5} \quad - \text{ szorozzuk meg 15-tel, mert ekkor } 3n \text{ szerepel majd a kifejezésben}$$
$$15\cdot\frac{n-1}{5} = 3n-3 \quad - \text{ adjunk hozzá } +1\text{-et, így a konstans rész is rendben}$$
$$15\cdot\frac{n-1}{5} + 1 = 3n-3+1 = 3n-2 \quad - \text{ kész } (x=15,\ y=1)$$

Ennek segítségével a feladat folytatása:

$$\dots = \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{15\cdot\frac{n-1}{5}+1} =$$
$$= \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{\frac{n-1}{5}}\right)^{15} \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{5}}\right)^{1} \longrightarrow e^{15}\cdot(1+0)^1 = e^{15}$$

33. Egy sorozat monoton növekvő (vagy csökkenő), ha bármely $n\in\mathbb{N}$ („sorszám”) esetén $a_n \le a_{n+1}$ (vagy $a_n \ge a_{n+1}$). Egy sorozat korlátos, ha létezik olyan $k, K\in\mathbb{R}$, hogy minden a_n sorozatelemre $k \le a_n \le K$ teljesül (k az alsó korlát, K a felső korlát).
Az $\frac{5^{n+1}}{n!}$ sorozat tetszőleges n-edik eleme

$$\frac{5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot5\cdot\ldots\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot\ldots\cdot n} = 5\cdot\frac{5}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{5}{n}.$$

alakú. A sorozat első néhány eleme:

$$\begin{aligned}
25 \qquad & n=1 \\
\frac{125}{2} = 62,5 \qquad & n=2 \\
\frac{625}{6} \approx 208,3 \qquad & n=3 \\
\frac{3125}{24} \approx 130,21 \qquad & n=4 \\
\frac{15625}{120} \approx 130,21 \qquad & n=5 \\
\frac{78125}{720} \approx 108,51 \qquad & n=6 \\
\frac{5^{11}}{10!} \approx 13,46 \qquad & n=10 \\
& \vdots
\end{aligned}$$

Így a sejtésünk az, hogy $n = 1$-től $n = 4$-ig monoton növekvő, $n = 5$-től kezdve monoton csökkenő a sorozat. Igazoljuk most ezt a sejtést:

$$\begin{gathered}
a_{n+1} \leq a_n \\
\frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{5^n}{n!} \\
5^{n+1} \cdot n! \leq 5^n \cdot (n+1)! \\
5^n \cdot 5 \cdot n! \leq 5^n \cdot n! \cdot (n+1) \\
5 \leq n+1 \\
4 \leq n
\end{gathered}$$

Tehát $n \geq 4$-től monoton csökkenő a sorozat. Ez egyúttal azt is jelenti, hogy $n = 4$-nél (pontos) felső korlátját találjuk a sorozatnak: $K = \frac{3126}{24}$. A sorozat monoton csökkenő, de soha nem „éri el” a nullát, így $k = 0$ a sorozat (pontos) alsó korlátja. A sorozat monoton csökkenő és korlátos, így konvergens és határértéke: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5^{n+1}}{n!} = 0$.

Végeredmények

1. 4, 2. a) 0, b) divergens, 3. -4, 4. $+\infty$, 5. $\cos 0 = 1$, 6. 0, 7. 0, 9. $+\infty$, 10. $-\infty$, 11. -7, 13. $\frac{1}{2} - 6\pi$, 15. 0, 16. 0, 17. $-\infty$, 19. 0, 20. 2, 23. 7, 24. 1, 26. $\frac{1}{e}$, 27. e^2, 29. e^{12}, 30. e, 31. 0.

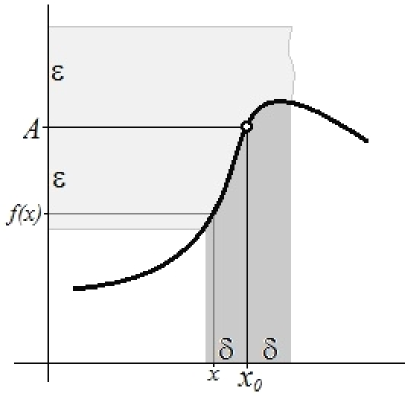
2.3. Függvények határértéke

Rövid elméleti összefoglaló

Egy f függvénynek az x_0 pontban a *határértéke* A, ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta > 0$ szám, hogy

$$\text{ha} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \ , \quad \text{akkor} \quad |f(x) - A| < \varepsilon \ .$$

Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.



Értelmezhető az ún. *jobboldali*, illetve *baloldali* határérték, ha az előbbi definíció végét az alábbiak szerint módosítjuk:
jobboldali határérték esetén: ha $0 < x - x_0 < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$
baloldali határérték esetén: ha $0 < x_0 - x < \delta$, akkor $|f(x) - A| < \varepsilon$.
Jelölése: $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$
Egy függvénynek egy pontban akkor és csak akkor létezik a határértéke, ha a bal- és jobboldali határértékek az adott pontban egybeesnek. Ebben az esetben ez az érték lesz a függvény adott pontbeli határértéke:

$$\lim_{x\to x_0-} f(x) = \lim_{x\to x_0+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

Megjegyzés: Egy függvény határértékének fogalma kiterjeszthető $\pm\infty$-re is.

Egy f függvény egy $x_0 \in \mathcal{D}_f$ pontban *folytonos*, ha az adott pontban létezik a függvény határértéke, és ez egyenlő a függvényértékkel: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. (Szemléletesen egy pontbeli folytonosságot úgy képzelhetjük el, hogy a pont egy kis környezetében a függvény grafikonját folytonos vonallal meg tudjuk rajzolni. – Lásd az ábrát.)
(*Megjegyzés:* Ha egy feladatban jól ismert folytonos függvény szerepel, akkor gyakran a folytonosságból következtetünk véges helyen vett véges határértékre.)

Egy függvény határértékeit az alábbi helyeken vizsgálhatjuk:

1. Véges helyen:

   (a) véges határérték – például 1. vagy 5. feladat

   (b) végtelen határérték (függőleges aszimptota) – például 14. feladat

2. Végtelen helyen:

   (a) véges határérték (vízszintes aszimptota) – például 18. feladat

   (b) végtelen határérték – például 19. feladat

Függvények szakadási helyei: Egy függvénynek egy pontban szakadási helye van, ha ott a függvény nem folytonos vagy nincs értelmezve. *Elsőfajú* (megszüntethető) szakadásról beszélünk, ha a pontban a függvénynek létezik véges határértéke. *Másodfajú* (nem megszüntethető) szakadás esetén $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=\infty$ vagy $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+}f(x)$. (például 25/b feladat)

Megjegyzés: Bizonyos függvények adott pontbeli határértékét meghatározhatjuk az ún. *L'Hospital-szabály* segítségével is – lásd az 2.8. fejezetben.

Feladatok

1. $\lim\limits_{x\to 1}(8x+4)$
2. $\lim\limits_{x\to -3}x^2$
3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2}{x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+6}$
6. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-2}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2+x}$
8. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25}$
9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sqrt{x}-\sqrt{2-x}}$
10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$
11. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$, ahol $f(x)=\begin{cases}3, & \text{ha } x=2\\ x, & \text{ha } x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}\end{cases}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$, ahol $f(x)=\begin{cases}x, & \text{ha } x\le 0\\ x^2+1, & \text{ha } x>0\end{cases}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$
14. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{2-x}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}$

17. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$

18. $\lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}}$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}}$

19. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-5x^3+x+28}{12x^2-33}$

20. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

21. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x}-x\right)$

22. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{1+2x}$

23. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3$

24. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4-3x^2}{x}$

25. Határozzuk meg a következő függvények szakadási helyeit, majd számítsuk ki a függvény határértékét a $+\infty$-ben, $-\infty$-ben és a szakadási helyeken!

    (a) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$

    (b) $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x^2-5x+6}$

    (c) $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{x^2+x-2}$

    (d) $f(x) = 3^{\frac{1}{x+1}}$

    (e) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-x}$

    (f) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2, \text{ ha } x \le 2 \\ x, \text{ ha } x > 2 \end{cases}$

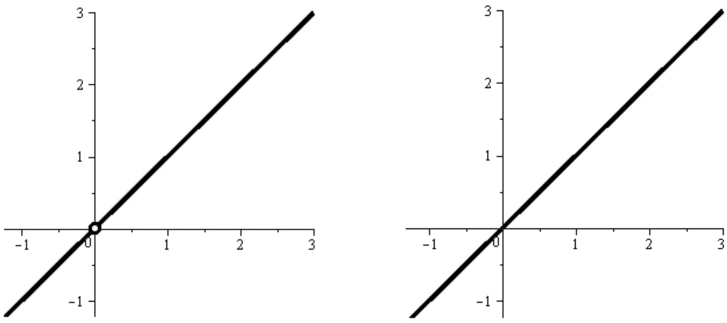
Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. A függvény az $x = 1$ pontban értelmezve van és(!) a függvény folytonos is ebben a pontban, így a keresett határérték éppen a függvény 1-ben felvett értéke lesz: $\lim\limits_{x\to 1}(8x+4) = 8\cdot 1+4 = 12$. („határérték=függvényérték”)
   A 2. és 3. feladatok megoldása ugyanígy történik.

4. A függvényt az $x = 0$-ban nem lehet értelmezni, de ha egyszerűsítünk x-szel, akkor a határérték már könnyen meghatározható.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$$

Gondoljuk végig, hogy mi történt az egyszerűsítés során. Az $\frac{x^2}{x}$ függvény helyett az x függvénnyel számoltunk tovább, így kaphattuk meg a határértéket az 1. feladat megoldásának mintájára. Azonban nyilvánvalóan nem egyezik meg a két függvény, hiszen az $\frac{x^2}{x}$ a 0-ban nincs értelmezve. Ennek a függvénynek a grafikonja „lyukas" $x = 0$-ban, míg a módosított $f(x) = x$ függvény esetében nincs ilyen problémánk. A két függvény grafikonját így ábrázolhatjuk:



5. A feladat megoldása az előzőhöz hasonló. Itt – miután a számlálót és a nevezőt is szorzattá alakítottuk – $(x-3)$-mal egyszerűsíthetünk. Minden ilyen típusú feladat esetében meg kell próbálni $(x-x_0)$-lal egyszerűsíteni, ahol x_0-ban a függvény nincs értelmezve. Szemléletesen a „kilyukasztott" függvény helyett (ami nem folytonos az adott pontban) a „kilyukasztás nélküli", adott pontban folytonos „verzióját" keressük a függvények. Mivel a módosított függvény már folytonos az adott pontban, így a „határérték=függvényérték"-elvet alkalmazhatjuk.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x-3}{x^2+5x+6} = \lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x\to 3}\frac{x+1}{x-2} = 4$$

Felhasználva, hogy x^2-2x-3 gyökei $x_1 = 3$ és $x_2 = -1$, illetve x^2+5x+6 gyökei $x_1 = 3$ és $x_2 = 2$.

7. Ebben a példában az 5-ben a függvény nincs értelmezve („kilyukasztott" függvény). Az előző kidolgozott feladat mintájára $(x-5)$-tel szeretnénk egyszerűsíteni, ekkor már a függvény módosított „verzióját" kapjuk, amely az 5-ben értelmezve van és folytonos. (A módosított függvény esetén a határérték egyenlő a függvényértékkel.)

$$\lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{x^2-25} = \lim_{x\to 5}\frac{2-\sqrt{x-1}}{(x-5)(x+5)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{\left(2-\sqrt{x-1}\right)\left(2+\sqrt{x-1}\right)}{(x-5)(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{4-(x-1)}{(x-5)(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{-x+5}{(x-5)(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} = \lim_{x\to 5}\frac{-(x-5)}{(x-5)(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 5}\frac{-1}{(x+5)\left(2+\sqrt{x-1}\right)} = \frac{-1}{(5+5)\left(2+\sqrt{5-1}\right)} = -\frac{1}{40}$$

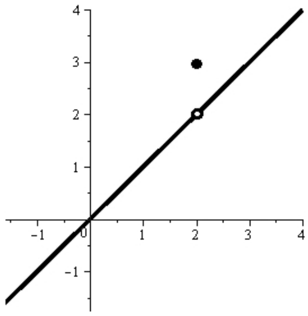
A feladat megoldása során többször használtuk az $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ azonosságot.
A 9. feladatban is hasonlóan kell eljárni, ott a törtet $\left(\sqrt{x}+\sqrt{2-x}\right)$-szel bővítjük.

10. A keresett határérték kiszámítása ismét azon az elven alapul, hogy az eredeti („kilyukasztott”) függvény helyett egy módosított (már folytonos, azaz „nem lyukas”) függvénnyel dolgozunk.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{3}{1-x^3}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{(1-x)(1+x)}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(1+x+x^2)-3(1+x)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2+2x+2x^2-3-3x}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(1-x)(1+x)(1+x+x^2)}=$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-(2x+1)}{(1+x)(1+x+x^2)}=\frac{-(2+1)}{(1+1)(1+1+1^2)}=-\frac{1}{2}$$

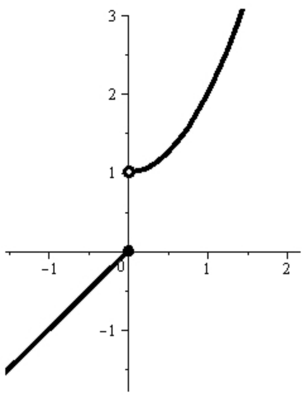
A megoldásban kihasználtuk az $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosságot.

11. A függvény grafikonja a következő:

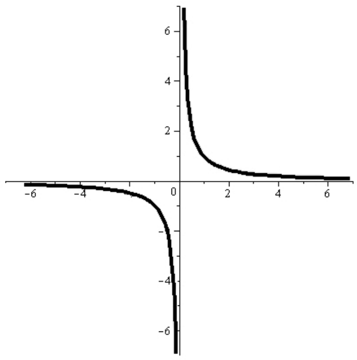


A két határérték egybeesik, ezért $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2} f(x)=2$.
Megjegyzés: Szemléletesen is ezt az eredményt vártuk, hiszen a függvény határértéke azt vizsgálja, hogy az adott pont – itt az $x_0=2$ – kis környezetét figyelembe véve milyen értéket venne fel a függvény az adott pontban.

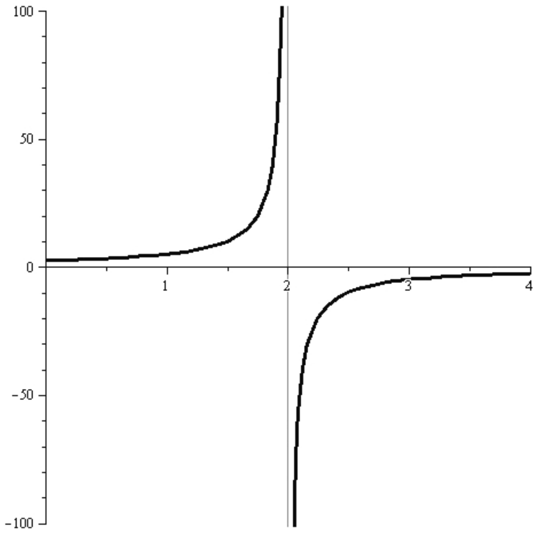
12. Mivel $\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)=0$ és $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+1)=1$, ezért a függvénynek az adott pontban nem létezik határértéke.



13. A példában a jól ismert $\frac{1}{x}$ függvény határértékét számítjuk ki. Középiskolában már tanultuk, hogy a függvény képe hiperbola, melynek aszimptotái (végérintői) az x-tengely és az y-tengely. Szemléletes megoldásként azt mondhatjuk, hogy a függvény a 0-hoz balról a $-\infty$-hez, míg jobbról a $+\infty$-hez tart.



14. Ez a függvény az $\frac{1}{x}$ függvény transzformáltja.
A függvény határértékét az adott pontban két módszerrel is meghatározhatjuk:



Becsléssel: Tekintsük először a baloldali határértéket: $\lim\limits_{x\to 2-} \dfrac{5}{2-x}$. A baloldali határérték keresése *könnyed megfogalmazásban* azt jelenti, hogy ha 2-től „kicsivel kisebb" x számokat tekintünk (pl.: 1,9999), akkor milyen értékeket vesz fel a függvény. Ilyen „kicsivel kisebb" számok esetében a nevező, azaz a $2-x$ értéke szintén „nagyon kicsi" és pozitív(!), mivel 2-ből annál kisebb számokat vonunk ki (pl.: $2-1,9999=0,0001$). Ahogy közelítünk balról a 2-höz, úgy lesz ez a $2-x$ különbség egyre kisebb és kisebb, azaz tart a nullához – de ez a kicsi különbség mindig pozitív. Így a határérték

$$\lim_{x\to 2-} \frac{5}{2-x} =$$

$$= \frac{\pm\text{„konstans"}}{\pm\text{„nagyon kicsi (1-nél kisebb) pozitív szám"}} = \pm\text{„nagyon nagy pozitív szám"} =$$

$$= +\infty\ ,$$

Hasonló logikával kapjuk meg a $\lim\limits_{x\to 2+} \dfrac{5}{2-x}$ jobboldali határértéket. Itt azt keressük, hogy ha 2-től „kicsivel nagyobb” x számokat tekintünk (pl.: 2,0001), akkor milyen értékeket vesz fel a függvény. A baloldali határértékhez hasonlóan a $2-x$ (azaz a nevező) értéke ismét „nagyon kicsi”, azonban most ez a kicsi érték negatív(!), ugyanis 2-ből tőle nagyobb számokat vonunk ki (pl.: $2-2,0001=-0,0001$). Jobbról közelítve a 2-höz, a $2-x$ különbség a nullához tart, de az előjele mindig negatív, így a határérték

$$\lim_{x\to 2+} \frac{5}{2-x} =$$

$$= \frac{\pm\text{„konstans”}}{\pm\text{„nagyon kicsi (1-nél kisebb) negatív szám”}} = \pm\text{„nagyon nagy abszolút értékű negatív szám”} =$$

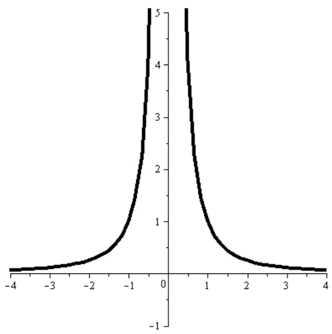
$$= -\infty\ .$$

Precízebben: Az előző becsléseket fogjuk matematikailag precíz formában leírni. A „2-től kicsivel nagyobb/kisebb szám” megfogalmazás helyett azt írhatjuk, hogy $2\pm\varepsilon$, ahol ε a 0-hoz tart és mindig pozitív(!) – ez az ε ismeretlen a korábban felhasznált „kicsi távolságot” jelenti 2-től jobbra/balra. Ezért a két határérték kiszámítása:

$$\lim_{x\to 2-} \frac{5}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{2-(2-\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{+\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} 5\cdot\frac{1}{\varepsilon} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2+} \frac{5}{2-x} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{2-(2+\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{5}{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0+} (-5)\cdot\frac{1}{\varepsilon} = -\infty$$

15. A határértéket a 14. példában látottak mintájára kell kiszámítani. Segítségképpen ábrázoljuk a függvényt:



17. Ez a feladat egy érdekes példája a kétoldali határértéknek, mivel a baloldali határérték véges értékhez (nullához), míg a jobboldali határérték a $+\infty$-hez tart. Felhasználva a 13. feladatot, a megoldás:

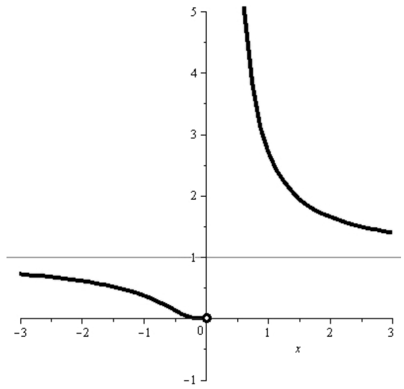
$$\lim_{x\to 0-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 0+} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = +\infty$$

18. A végtelenben vett határértékek kiszámítása azért könnyű, mert minden olyan megoldási technikát használhatunk, amelyeket a sorozatok határértéke során megtanultunk. A keresett határértékek:

$$\lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to -\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{-x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

A 17. és 18. feladatok függvényét ábrázolva az y-tengely függőleges aszimptotája a függvény képének. Az $y = 1$ egyenes vízszintes aszimptota a függvény számára.

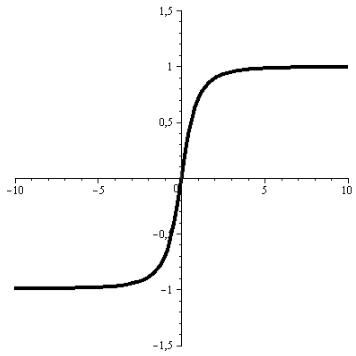


20. Mivel a feladatot ugyanúgy kell megoldani, mintha sorozat határértékét keresnénk, így csupán röviden vázoljuk a megoldást:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \ldots = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} = \ldots = -1$$

A függvény grafikonja:



18. Lásd: Számsorozatok határértéke fejezet 16-18. feladatai

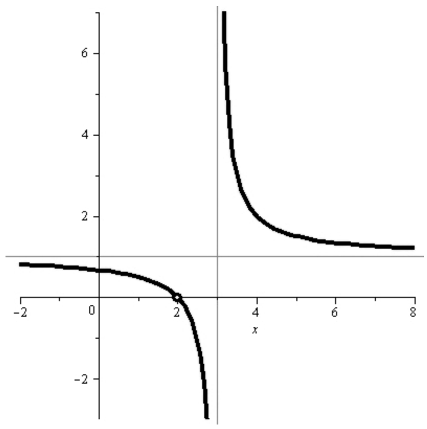
25/b A feladat csupán annyiban különbözik az előzőektől, hogy első lépésben meg kell állapítani, hogy hol vannak a függvény szakadási helyei (azaz mely pontokban nincs értelmezve a függvény).
A nevezőben a $x^2 - 5x + 6$ kifejezés nem lehet nulla. Ennek a másodfokú kifejezésnek a gyökeit visszahelyettesítve nullát kapunk, így a gyököknél szakadási helyei lesznek a függvénynek. Két különböző (valós) gyököt kapunk: $x_1 = 2$ és $x_2 = 3$.
A függvényt az alábbi módon alakíthatjuk át:

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x-3)} \; .$$

Az eddigi tapasztalatainkból láthatjuk, hogy a függvény $x = 2$-nél „lyukas”, mivel $(x-2)$-vel egyszerűsítve a törtet, egy olyan másik (módosított, „nem lyukas”) függvényhez jutunk, ami az eredeti függvénytől csupán az $x = 2$-beli értelmezési problémában különbözik. Ezt neveztük megszüntethető szakadásnak.
Az $x = 3$ esetén nem kaphatunk módosított függvényt semmilyen módon (az $x = 3$-ban továbbra sem értelmezhető a függvény), a baloldali és a jobboldali határérték (sejtésünk szerint) a végtelenben lesz. Ez a nem megszüntethető szakadás.
Összegezve, az alábbi határértékeket kell kiszámítanunk:
– $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (mivel itt megszüntethető szakadás van, és a módosított folytonos függvénynél már véges határérték az eredmény, nem szükséges kétoldali határértéket vizsgálni),
– $\lim\limits_{x\to 3-} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to 3+} f(x)$ (ugyanis itt nem megszüntethető szakadást találtunk, muszáj vizsgálni a kétoldali határértéket), továbbá
– $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ és $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ (végtelenben vett határértékek).

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \ldots = 0$$
$$\lim_{x\to 3-} \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \ldots = -\infty$$
$$\lim_{x\to 3+} \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \ldots = +\infty$$
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \ldots = 1$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(x-2)^2}{x^2-5x+6} = \ldots = 1$$

A határértékek ismeretében a függvény grafikonja:



Végeredmények

2. 9, 3. 2, 6. $\frac{4}{3}$, 7. -1, 9. -2, 15. $+\infty$, 16. $\lim\limits_{x\to 0-} = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to 0+} = +\infty$, 19. $-\infty$, 21. $-\frac{5}{2}$, 22. e^6, 23. $+\infty$ és $-\infty$, 24. $+\infty$,
25/a. szakadási helye 1, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$,
25/c. szakadási helyei 1 és 2, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$,

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$,
25/d. szakadási helye -1, $\lim_{x\to-1-} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-1+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$,
25/e. szakadási helyei 0 és 1, $\lim_{x\to0-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to1} f(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
25/f. szakadási helye 2, $\lim_{x\to2-} f(x) = -2$, $\lim_{x\to2+} f(x) = 2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2.4. Sorok

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen (a_n) egy valós számsorozat, amelyből képezhetjük az

$$s_1 = a_1, \qquad s_2 = a_1 + a_2, \qquad \dots, \qquad s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \dots$$

részletösszegek sorozatát.
Az (s_n) sorozatnak a határértékét az (a_n) *sorozatból képzett* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor összegé*nek nevezzük, amennyiben az létezik.
A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (röviden $\sum a_n$) sort *konvergens*nek nevezünk, ha a részletösszegek (s_n) sorozata konvergens. Ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $a_n \to 0$.
(Ha egy sor nem konvergens, akkor divergens.)
Összeadás (kivonás) és konstanssal való szorzás esetén:

$$\sum(a_n \pm b_n) = \sum a_n \pm \sum b_n \ , \qquad \text{illetve} \qquad \sum c \cdot a_n = c \cdot \sum a_n \ .$$

Gyakran előfordul, hogy nincs szükségünk a konkrét sorösszegre, de szeretnénk eldönteni, hogy az adott sor konvergens-e vagy sem.

Néhány fontos konvergenciakritérium:

1. Majoráns kritérium: Egy pozitív tagokból álló $\sum a_n$ sor konvergens, ha van olyan konvergens $\sum b_n$ (majoráló) sor, hogy valamely n-től kezdve $a_n \leq b_n$.

2. Minoráns kritérium: Egy pozitív tagokból álló $\sum a_n$ sor divergens, ha van olyan divergens $\sum b_n$ (minoráló) sor, hogy valamely n-től kezdve $a_n \geq b_n$.

3. d'Alembert-féle hányadoskritérium: Egy pozitív tagú $\sum a_n$ sor konvergens, ha $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Ha az előbbi határérték > 1, akkor a sor divergens. Ha pedig $= 1$, akkor nem lehet eldönteni ebből a kritériumból a sor konvergenciáját.

4. Cauchy-féle gyökkritérium: Egy pozitív tagú $\sum a_n$ sor konvergens, amennyiben $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Ha az előbbi határérték > 1, akkor a sor divergens. Ha pedig $= 1$, akkor nem lehet eldönteni ebből a kritériumból a sor konvergenciáját.

5. Leibniz-kritérium váltakozó előjelű (alternáló) sorokra: A $\sum a_n$ sor konvergens, ha tagjai váltakozó előjelűek ($a_n \cdot a_{n+1} < 0$), $|a_n|$ számok monoton csökkenő null(!)sorozatot alkotnak.

Nevezetes sorok:

Harmonikus sor: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens.

Fontos megjegyzés: A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor már konvergens, a sorösszeg $\frac{\pi^2}{6}$.

Mértani (geometriai) sor: $1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Ha $|q| < 1$, akkor mértani sor konvergens, a sor összege:
$S = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1}{1-q}$.

Ha a sor 0 helyett 1-től indul, akkor $S = \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q}$.

Feladatok

1. Számítsuk ki a következő sorok összegét!
   a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+1}}$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{10^n}$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} - \frac{2}{5^{n+1}}\right)$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$,
   e) $x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \ldots$, ha $x > 1$

2. Állapítsuk meg az alábbi sorok konvergenciáját/divergenciáját!
   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}$,
   f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$, g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$, h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^n}$, i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+5}$, k) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$, l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n}\right)^n$, m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+1}$, n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/a Az 1. feladat a), b) és c) példájának mindegyike visszavezethető geometriai sor(ok)ra. Az első esetben az átalakítás menete a következő:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25^n} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{25}\right)^n \overset{(*)}{=}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{25}{25} - \frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\frac{24}{25}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5}{24}$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben felhasználva a geometriai sor összegének képletét, ahol $q = \frac{1}{25}$.

1/b Az 1/a megoldási elvét követve:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{10^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10^n}+\frac{(-1)^n}{10^n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(\frac{1}{10}\right)^n+\left(-\frac{1}{10}\right)^n\right)=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{10}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{10}}+\frac{1}{1+\frac{1}{10}}=\frac{1}{\frac{9}{10}}+\frac{1}{\frac{11}{10}}=$$
$$=\frac{10}{9}+\frac{10}{11}=\frac{110+90}{99}=\frac{200}{99}$$

1/d A feladatban szereplő sorösszeg meghatározása több lépésben történik. Az a célunk, hogy a törtkifejezést egyszerűbben számolható alakban fejezzük ki, így a sorösszeg is könnyebben meghatározható.
Első lépésben két tört összegére bontjuk a törtet. Ezt az ún. *parciális törtekre bontás módszeré*vel tehetjük meg. A két tört számlálóját A-val és B-vel jelöljük, a cél pedig e két ismeretlen meghatározása:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}=\frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)}=\frac{(A+B)n+2A}{n(n+2)}$$

Vizsgáljuk meg az egyenlőség „elejét” és „végét”. A nevező nyilvánvalóan ugyanaz, de a számlálókat tekintve $1=(A+B)n+2A$ egyenlőségnek teljesülnie kell. A bal oldalon nem szerepel n-től függő tag, így azt mondhatjuk, hogy a bal oldalon az n-et nullával szoroztuk, ezért $A+B=0$. A konstans részeket összehasonlítva $1=2A$-hoz jutunk. Így A-ra és B-re egy egyenletrendszert kaptunk:

$$\begin{aligned}A+B&=0\\2A&=1\end{aligned}$$

A második egyenletből $A=\dfrac{1}{2}$ adódik, ezt az első egyenletbe helyettesítve $B=-\dfrac{1}{2}$.
Ezek felhasználásával az eredeti tört kettébontása:

$$\frac{1}{n(n+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{n}-\frac{\frac{1}{2}}{n+2}=\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}$$

A sor átalakítva tehát: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}\right)$.
Második lépésben számítsuk ki a sor n-edik részletösszegét, ugyanis a sor összege nem más, mint a részletösszegei sorozatának határértéke (ha ez létezik):

$$s_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\ldots+\frac{1}{2(n-3)}-\frac{1}{2(n-3)+4}+$$
$$+\frac{1}{2(n-2)}-\frac{1}{2(n-2)+4}+\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n-1)+4}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2n-6}-\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-4}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+4}=\ldots$$

Észrevehető, hogy 4 tag kivételével ($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2n+2}$ és $-\frac{1}{2n+4}$) minden más tag kiesik. Például az $n=1$ által kapott $-\frac{1}{6}$-ot az $n=3$ esetén adódó $\frac{1}{6}$ ejti ki, az $(n-2)$-höz tartozik a $-\frac{1}{2n}$ és az n-hez az $\frac{1}{2n}$ összege is nulla. (Minden negatív előjelű taghoz a tőle jobbra következő harmadik tag ugyanaz az érték, csak pozitív előjellel.)

$$\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4} \; .$$

Az n-edik részletösszegek sorozata (azaz a sor összege) így:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+4}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \; .$$

1/e Vegyük észre, hogy

$$x + \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} + \ldots = x + \sqrt{x} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$$

2/b Gondoljuk végig, hogy melyik konvergenciakritérium az, amelyikkel könnyen számolhatunk. A feladatnál biztosan nem lehet alkalmazni a Leibniz-kritériumot, és értelmetlen lenne a Cauchy-féle gyökkritérium is. Marad a majoráns-, a minoráns- és a d'Alembert-féle hányadoskritérium. A d'Alembert-kritérium lesz a jó választás ebben az esetben, mert a sorozatban faktoriális szerepel.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2(n+1)-1}{(2(n+1))!}}{\frac{2n-1}{(2n)!}} = \frac{\frac{2n+1}{(2n+2)!}}{\frac{2n-1}{(2n)!}} = \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n-1)(2n+2)!} =$$
$$= \frac{(2n+1)(2n)!}{(2n-1)(2n)!(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+2)}$$

A sor konvergens, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, azaz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+2)} = 0 < 1 \; ,$$

tehát a sor konvergens.

2/c Ismét az az első lépés, hogy megállapítsuk mely kritériumot érdemes használni. A Leibniz-kritérium nem használható, mert a sor nem váltakozó előjelű.
Gyakorlásképpen vizsgáljuk végig a Cauchy- és d'Alembert-kritériumokat (mint két „tévutat"):
d'Alembert-féle hányadoskritérium esetén:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \ldots = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \longrightarrow 1 \; ,$$

a kritérium pedig semmit nem tud mondani abban az esetben, ha a fenti hányados határértéke 1.
Cauchy-féle gyökkritérium esetén:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt{\sqrt[n]{n}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \; ,$$

és így látható, hogy a Cauchy-kritérium sem használható, mert ha az n-edik gyök határértéke 1, akkor nem kapunk információt a sor konvergenciájáról.
Elképzelhető, hogy a sor nem is konvergens. Ha találunk egy olyan divergens(!) sort, amelynek tetszőleges k-adik eleme kisebb az eredeti sor k-adik eleménél, akkor a minoráns kritérium értelmében a sor divergens. Az eredeti sor tetszőleges eleme $\frac{1}{\sqrt{k}}$ alakú. Ismert, hogy $\sqrt{k} < k$, ezért reciprokaikra a $\dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ teljesül.
Azonban azt is tudjuk, hogy a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens. A harmonikus sor az eredeti sort minorálja (a megfelelő sorszámú tagjai minden esetben kisebbek az eredeti sor ugyanolyan sorszámú tagjainál) és divergens, ezért a minoráns kritérum értelmében a $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ is divergens.
Megjegyzés: Belátható, hogy ha $0 < k \leq 1$, akkor $\sum \frac{1}{n^k}$ divergens.

2/f Ennél a példánál az n-edik hatványt látva érdemes a Cauchy-gyökkritériummal próbálkozni:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(\ln n)^n}} = \frac{1}{\ln n} \longrightarrow 0 \ ,$$

mivel a természetes alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, és így a nevező a végtelenhez tart. A kapott határérték 1-nél kisebb, ezért a sor konvergens.

2/i A 2/b-ben látott gondolatmenet alapján a d'Alembert-féle hányadoskritériumot használjuk:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)! \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)^{n+1}} = \frac{n!(n+1) \cdot n^n}{n! \cdot (n+1)(n+1)^n} =$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \ldots = \left(1 + \frac{1}{-(n+1)}\right)^{-(n+1)\cdot(-1)-1} \longrightarrow \frac{1}{e} \approx 0{,}368 \ ,$$

a kapott határérték 1-nél kisebb, így a sor konvergens.

2/m A feladatbeli sorról azonnal látható, hogy sem a Cauchy-, sem pedig a d'Alembert-kritérium nem vezethet el a megoldáshoz. A sor általános tagját tekintve azonban látjuk, hogy egyre kisebb és kisebb értékeket vesz fel, ahogy n egyre nagyobb. Így van rá esély, hogy a sor konvergens legyen. Próbáljuk most ki a majoráns kritériumot. Keresni kell egy olyan konvergens(!) sort, amelynek tetszőleges k-adik tagja nagyobb az eredeti sor k-adik tagjánál. Ha a számlálót növelem, akkor nő a tört értéke is; ha a nevezőt csökkentem, akkor is nő a kifejezés értéke:

$$\frac{k-1}{k^3+1} < \frac{k}{k^3+1} < \frac{k}{k^3} = \frac{1}{k^2}$$

Látható, hogy a sor a $\sum \frac{1}{n^2}$ sorral majorálható. Erről tudjuk, hogy konvergens, így az eredeti sor is konvergens.

2/n A sor általános tagjának számlálóját tekintve észrevehető, hogy a sor váltakozó előjelű: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$.
A Leibniz-kritérium feltételit ellenőrizzük: Váltakozó előjelű a sor? Az $|a_n|$ monoton csökkenő nullsorozat? Mindkét kérdésre igen a válasz, így a sor konvergens.

Végeredmények

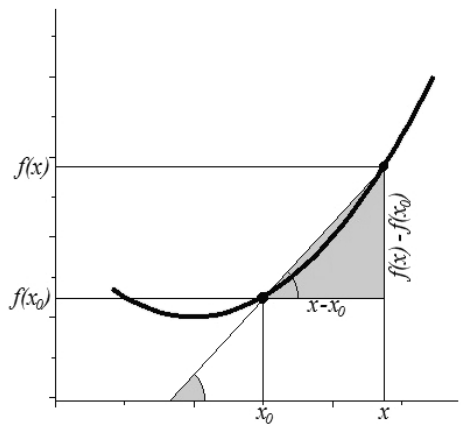
1. c) $\dfrac{3}{4}$, e) $\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

2. d'Alembert-kritériummal megoldható példák: a), e), g) mind konvergens.
Cauchy-gyökkritériummal megoldható példák: g), l) mind konvergens.
A d) esetén $\frac{1}{2} \cdot \sum \frac{1}{n}$ írható, ezért divergens.
Majoráns kritérium miatt konvergens sorok: h)-t a $\sum \frac{1}{2^n} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ geometriai sor majorálja; az o) esetén tetszőleges k-adik elem helyére $\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$-et írva
$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots$$
egyenlőtlenséghez jutunk, ahol a jobb oldalon a második tagtól a $\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n$ geometriai sort kapjuk.
Minoráns kritérium miatt divergens sorok: j)-t és k)-t is a $\sum \frac{1}{n}$ minorálja. A j)-nél tetszőleges k-adik tagra $\frac{1}{2k+5} > \frac{1}{2k+6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+3}$ teljesül.

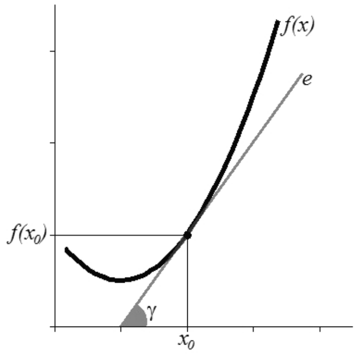
2.5. Differenciálszámítás

Rövid elméleti összefoglaló

Egy f függvény x_0 pontbeli differenciálhányadosán vagy *deriváltján* a
$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
határértéket értjük.
Ha ez az érték a függvény értelmezési tartományának minden pontjában létezik, akkor képezhető az $f'(x)$ függvény, amelyet az f függvény *deriváltfüggvényének* nevezünk.



A pontbeli derivált geometriai jelentése: a függvény (grafikonjának) x_0-beli érintőegyenesének meredeksége (iránytangense). Könnyen látható, hogy az x_0 és tetszőleges x által meghatározott szelő határhelyzetben (azaz ahogyan az x tart az x_0-hoz) érintővé válik. Az $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ hányados a szelő x-tengellyel bezárt szögének tangensét mutatja. Így határhelyzetben, ha az x_0-beli érintő az x-tengellyel γ szöget zár be, akkor $\mathrm{tg}(\gamma) = f'(x_0)$.



Deriválási szabályok:

$$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x) \qquad \text{ahol } c \text{ tetszőleges konstans}$$
$$(f(x)\pm g(x))' = f'(x)\pm g'(x)$$
$$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$
$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$
$$((f\circ g)(x))' = (f'\circ g)(x)\cdot g'(x) \quad \text{azaz} \quad (f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$
$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Néhány alapvető függvény deriváltja:

$$(x^n)' = n\cdot x^{n-1} \qquad \text{speciálisan:} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\cdot\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$
$$(a^x)' = a^x\cdot \ln a \qquad \text{speciálisan:} \quad (e^x)' = e^x$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot \ln a} \qquad \text{speciálisan:} \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\sin x)' = \cos x\ , \qquad (\cos x)' = -\sin x$$
$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}\ , \qquad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi függvények deriváltjait!

1. a) $3x^2$, b) $8x+4$, c) $2x^2+3x-1$, d) $33x^2-x^7+33x-11$, e) $328\sin\pi - e^{22}$, f) $\sqrt[7]{x^5}$, g) $\dfrac{x^2-x}{5}$, h) $x+\dfrac{4}{2x^2}$

2. a) $2x\cdot 3^x$, b) $2\sin x\cos x$, c) $x^7\cdot(3^x+2)$, d) $\cos x\cdot(16x-32)$, e) $(x^2+3x+1-99\pi)\cdot\operatorname{tg} x$, f) $(7^x+8\pi)\cdot(x^3-\cos x)$, g) $\dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$, h) $\dfrac{x^2+3}{e^x}$, i) $\dfrac{x^3-3x+81}{2^x+1}$, j) $\dfrac{(3x^3-2x+1)}{2e^x}\cdot(\cos x - e)$, k) $\dfrac{(7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi)}{(3x-1)^2}$

3. a) $\sin(x^2)$, b) $(\sin x)^2$, c) $\cos(3x+4)$, d) $\operatorname{tg}(2x^3-e)$, e) $\cos(e^x)$, f) $e^{\cos x}$, g) $\operatorname{ctg}(6x^2-3x+e\cdot\pi)$, h) e^{x^2+7x-5}, i) $8^{\sin x}$, j) $3^{x^2+e^x}$, k) $\ln(3\sin x - x^2)$, l) $\cos((6x+2)\cdot(e^x-3))$, m) $\ln\left(\dfrac{7x^2-10}{8x}\right)$, n) $\operatorname{tg}(e^x-\ln x)$

4. a) $\cos\left(e^{2x-3}\right)$, b) $e^{\cos(2x+1)}$, c) $\ln(\cos(3^x))$, d) $\operatorname{tg}^2(\log_3 x)$, e) $\cos\left(3^{12x^2-33x+\pi}\right)$, f) $\left(\operatorname{tg}\sqrt{x^2+\cos x}\right)^3$, g) $\ln\dfrac{\sqrt{2x+1}}{\sin x}$, h) $\ln\dfrac{\cos x\sin(2x^2)}{x^3+(3x-1)^2}$

5. a) x^x, b) $(\cos x)^x$, c) $x^{\cos x}$, d) $(9x-6)^{3x^2-\pi}$, e) $(\operatorname{tg} x)^{\ln x}$, f) $x^{\operatorname{tg} x}$, g) $(\ln 2x)^{3x^2}$, h) $x^2+(\sin x)^{\sin x}$, i) $(3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}}$, j) $\left(\frac{\sin x}{3^x}\right)^{(8x^7-1)\cdot(\ln x-\cos x)}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/d

$$(33x^2-x^7+33x-11)' = 33\cdot 2\cdot x^1 - 7\cdot x^6 + 33\cdot 1\cdot x^0 - 0 = 66x-7x^6+33$$

2/g

$$\left(\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\right)' = \frac{(2+\sqrt{x})'\cdot(2-\sqrt{x})-(2+\sqrt{x})\cdot(2-\sqrt{x})'}{(2-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(2-\sqrt{x})-(2+\sqrt{x})\cdot\left(0-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{(2-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\left(-\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right)}{(2-\sqrt{x})^2} =$$

$$= \frac{\frac{2-\sqrt{x}+2+\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{4}{2\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{(2-\sqrt{x})^2} = \frac{2}{\sqrt{x}\cdot(2-\sqrt{x})^2}$$

2/k

$$\left(\frac{(7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi)}{(3x-1)^2}\right)' =$$

$$= \frac{((7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi))'\cdot(3x-1)^2-(7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi)\cdot((3x-1)^2)'}{((3x-1)^2)^2} =$$

$$= \frac{((7x-\cos x)'\cdot(e^x-\pi)+(7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi)')\cdot(3x-1)^2}{(3x-1)^4} -$$

$$-\frac{(7x-\cos x)\cdot(e^x-\pi)\cdot(9x^2-6x+1)'}{(3x-1)^4} =$$

$$= \frac{((7+\sin x)(e^x-\pi)+(7x-\cos x)e^x)(3x-1)^2-(7x-\cos x)(e^x-\pi)(18x-6)}{(3x-1)^4}$$

3/d A deriválandó függvény egy összetett függvény, melynek külső függvénye a $\operatorname{tg} x$, a belső függvénye a $2x^3-e$. (Belső függvénynek azt tekintjük, amelyik az ismeretlenre „hamarabb van hatással”.) Az összetett függvényre vonatkozó deriválási szabály értelmében a derivált a következő: „a külső függvény deriváltja hat a belső függvényre, szorozva a belső függvény deriváltjával”, azaz

$$\left(\operatorname{tg}(2x^3-e)\right)' = \frac{1}{\cos^2(2x^3-e)}\cdot 6x^2 = \frac{6x^2}{\cos^2(2x^3-e)}\ .$$

3/k

$$\left(\ln(3\sin x - x^2)\right)' = \frac{1}{3\sin x - x^2} \cdot (3\sin x - x^2)' = \frac{3\cos x - 2x}{3\sin x - x^2}$$

4/a A 4. feladatban szereplő függvények mindegyike többszörösen összetett függvény. Ha egy függvény például 3 függvény kompozíciója, akkor az összetett függvényekre tanult deriválási szabály ugyanúgy használható:

$$(f(g(h(x))))' = f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Ennek alapján itt az $f(x) = \cos x$ (legkülső függvény), a $g(x) = e^x$ (közbelső függvény) és a $h(x) = 2x - 3$ (belső függvény):

$$\left(\cos\left(e^{2x-3}\right)\right)' = -\sin\left(e^{2x-3}\right) \cdot e^{2x-3} \cdot 2 = -2\sin\left(e^{2x-3}\right) \cdot e^{2x-3}$$

Megjegyzés: Amennyiben problémát jelent a függvények sorrendjének megállapítása, gondoljuk végig a következőt. Tegyük fel, hogy a $\cos\left(e^{2x-3}\right)$ értékét kell kiszámítani egy konkrét x szám esetén. Legyen például $x = 4$. Melyik kifejezésbe helyettesítjük be először a 4-et? A válasz természetesen a $2x - 3$, így $2 \cdot 4 - 3 = 5$. Ez lesz a belső függvény, ez „hat először” az x ismeretlenre. Tovább haladva a következő, amit kiszámolnánk az e^5, amiből az következik, hogy a közbelső függvény az e^x. Végül már nyilvánvaló, hogy a külső függvény a $\cos x$.

4/e

$$\left(\cos\left(3^{12x^2-33x+\pi}\right)\right)' = -\sin\left(3^{12x^2-33x+\pi}\right) \cdot 3^{12x^2-33x+\pi} \cdot \ln 3 \cdot (24x - 33)$$

5/c Az 5. feladatbeli függvények mindegyikében az alapban is és a kitevőben is olyan kifejezések találhatóak, amelyek x-től függnek, így egyik korábban megismert deriválási szabályt sem tudjuk alkalmazni.
A megoldáshoz a következő trükkel jutunk el. Középiskolai tanulmányokból ismert a logaritmus definíciója: $a^{\log_a b} = b$, speciálisan $e^{\ln b} = b$. Általánosan a feladatbeli függvényeket $(f(x))^{g(x)}$ alakban írhatjuk le, és az előbb említett természetes alapú logaritmus definícióját felhasználva az $f(x)$ függvényre

$$(f(x))^{g(x)} = \left(e^{\ln(f(x))}\right)^{g(x)} = e^{\ln(f(x))\cdot g(x)}$$

írható. Így már csak a kitevőben található x-nek valamely függvénye, és a példát összetett függvényként oldhatjuk meg, ahol a legkülső függvény minden esetben az e^x. A c) jelű példában a megoldás menete:

$$(x^{\cos x})' = \left(\left(e^{\ln x}\right)^{\cos x}\right)' = \left(e^{\ln x\cdot\cos x}\right)' = e^{\ln x\cdot\cos x} \cdot (\ln x \cdot \cos x)' =$$
$$= e^{\ln x\cdot\cos x} \cdot \left(\frac{1}{x} \cdot \cos x + \ln x \cdot (-\sin x)\right) = x^{\cos x} \cdot \left(\frac{\cos x}{x} - \ln x \cdot \sin x\right)$$

5/d

$$\left((9x-6)^{3x^2-\pi}\right)' = \left(e^{\ln(9x-6)\cdot(3x^2-\pi)}\right)' = e^{\ln(9x-6)\cdot(3x^2-\pi)} \cdot \left(\ln(9x-6) \cdot (3x^2-\pi)\right)' =$$
$$= (9x-6)^{3x^2-\pi} \cdot \left(\frac{9}{9x-6} \cdot (3x^2-\pi) + \ln(9x-6) \cdot 6x\right)$$

Végeredmények

(A megoldásokban a lehetséges egyszerűsítéseket nem feltétlenül végeztük el.)

1. a) $6x$, b) 8, c) $4x+3$, e) 0, f) $\dfrac{5}{7\sqrt[7]{x^2}}$, g) $\dfrac{2x-1}{5}$, h) $1-\dfrac{4}{x^3}$

2. a) $2\cdot 3^x+2x\cdot 3^x\cdot\ln 3$, b) $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos(2x)$, c) $7x^6(3^x+2)+x^7\cdot 3^x\cdot\ln 3$,
d) $-\sin x(16x-32)+16\cos x$, e) $(2x+3)\mathrm{tg}\, x+\dfrac{x^2+3x+1-99\pi}{\cos^2 x}$,
f) $7^x\cdot\ln 7(x^3-\cos x)+(7^x+8\pi)(3x^2+\sin x)$, h) $\dfrac{2x-x^2-3}{e^x}$,
i) $\dfrac{(3x^2-3)(2^x+1)-(x^3-3x+81)\cdot 2^x\cdot\ln 2}{(2^x+1)^2}$,
j) $\dfrac{(9x^2-2-3x^3+2x-1)(\cos x-e)-(3x^3-2x+1)\sin x}{2e^x}$

3. a) $(\cos x^2)\cdot 2x$, b) $2\cos x\sin x=\sin(2x)$, c) $-3\sin(3x+4)$, e) $-e^x\cdot\sin e^x$,
f) $-e^{\cos x}\sin x$, g) $-\dfrac{12x-3}{\sin^2(6x^2-3x+e\pi)}$, h) $e^{x^2+7x-5}(2x+7)$,
i) $8^{\sin x}\cdot\ln 8\cdot\cos x$, j) $3^{x^2+e^x}\ln 3\cdot(2x+e^x)$,
l) $-\sin\left((6x+2)(e^x-3)\right)\cdot(6(e^x-3)+(6x+2)e^x)$, m) $\dfrac{7x^2+10}{(7x^2-10)x}$,
n) $\dfrac{e^x-\frac{1}{x}}{\cos^2(e^x-\ln x)}$

4. b) $-2\cdot e^{\cos(2x+1)}\cdot\sin(2x+1)$, c) $-\dfrac{\sin(3^x)\cdot 3^x\cdot\ln 3}{\cos(3^x)}$,
d) $\dfrac{2\cdot\mathrm{tg}\,(\log_3 x)}{\cos^2(\log_3 x)\cdot x\cdot\ln 3}$, f) $\dfrac{3\cdot\mathrm{tg}^2\left(\sqrt{x^2+\cos x}\right)\cdot(2x-\sin x)}{2\cdot\cos^2\left(\sqrt{x^2+\cos x}\right)\cdot\sqrt{x^2+\cos x}}$,
g) $\dfrac{\sin x}{\sqrt{2x+1}}\cdot\dfrac{\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\cdot\sin x-\sqrt{2x+1}\cdot\cos x}{\sin^2 x}=\ldots=\dfrac{1}{2x+1}-\mathrm{ctg}\; x$
h) $$\frac{x^3+(3x-1)^2}{\cos x\cdot\sin\left(2x^2\right)}\cdot\left(\frac{\left(-\sin x\cdot\sin\left(2x^2\right)+\cos x\cdot\cos\left(2x^2\right)\cdot 4x\right)\left(x^3+(3x-1)^2\right)}{\left(x^3+(3x-1)^2\right)^2}-\right.$$
$$\left.-\frac{\cos x\cdot\sin\left(2x^2\right)\cdot\left(3x^2+2(3x-1)\cdot 3\right)}{\left(x^3+(3x-1)^2\right)^2}\right)$$

5. a) $x^x\cdot(1+\ln x)$, b) $(\cos x)^x\cdot(-\mathrm{tg}\,(x)\cdot x+\ln(\cos x))$,
e) $(\mathrm{tg}x)^{\ln x}\cdot\left(\dfrac{\ln x}{\mathrm{tg}x\cdot\cos^2 x}+\dfrac{\ln(\mathrm{tg}x)}{x}\right)$, f) $x^{\mathrm{tg}x}\cdot\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}+\dfrac{\ln x}{\cos^2 x}\right)$,
g) $(\ln 2x)^{3x^2}\cdot\left(\dfrac{3x}{\ln(2x)}+\ln(\ln(2x))\cdot 6x\right)$,
h) $2x+(\sin x)^{\sin x}\cdot(\cos x+\ln(\sin x)\cdot\cos x)$,
i) $(3x^2)^{\sqrt[3]{x-4}}\cdot\left(\dfrac{2\cdot\sqrt[3]{x-4}}{x}+\dfrac{\ln(3x^2)}{3\cdot\sqrt[3]{(x-4)^2}}\right)$
j) $$\left(\frac{\sin x}{3^x}\right)^{(8x^7-1)(\ln x-\cos x)}\cdot\left(\frac{(\cos x\cdot 3^x-\sin x\cdot 3^x\cdot\ln 3)\cdot(8x^7-1)\cdot(\ln x-\cos x)}{\sin x\cdot 3^x}+\right.$$
$$\left.+\ln\left(\frac{\sin x}{3^x}\right)\cdot 56x^6\cdot(\ln x-\cos x)+\ln\left(\frac{\sin x}{3^x}\right)\cdot(8x^7-1)\cdot\left(\frac{1}{x}+\sin x\right)\right)$$

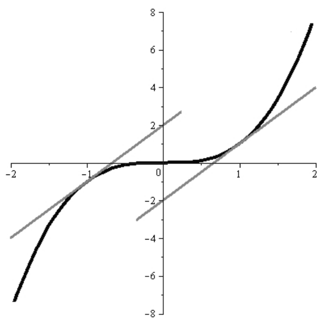
2.6. Magasabb rendű deriváltak. Monotonitás- és konvexitásvizsgálat

Rövid elméleti összefoglaló

A továbbiakban legyen f az értelmezési tartományának egy $[a,b] \subset \mathcal{D}_f$ részintervallumán (legalább kétszer) differenciálható függvény, és legyen $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $a \leq x \leq b$. Az f függvény

- *szigorúan monoton növekvő* az $[a,b]$-n, ha $f(x_1) < f(x_2)$ vagy ha $f'(x) > 0$.
- *szigorúan monoton csökkenő* az $[a,b]$-n, ha $f(x_1) > f(x_2)$ vagy ha $f'(x) < 0$.
- -nek egy $x_0 \in [a,b]$ pontban helyi (lokális) *szélsőértéke* van, ha $f'(x_0) = 0$ és(!) f' deriváltfüggvény az x_0-ban előjelet vált. Ha f' pozitív értékekről negatív értékekre vált, akkor a függvénynek az x_0-ban *helyi maximuma*, ha negatívakról pozitívakra vált, akkor *helyi minimuma* van.
  Megjegyzés: Az f függvénynek a x_0 helyi maximuma, ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$; helyi minimuma, ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$.
- *konvex* az $[a,b]$-n, ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ vagy ha $f''(x) > 0$.
- *konkáv* az $[a,b]$-n, ha $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ vagy ha $f''(x) < 0$.
- -nek egy $x_0 \in [a,b]$ pont *inflexiós helye* (és így az $(x_0, f(x_0))$ inflexiós pontja), ha $f''(x_0) = 0$ és(!) a f'' másodrendű deriváltfüggvény előjelet vált.
  Megjegyzés: Az f függvénynek a x_0 inflexiós helye, ha $f''(x_0) = 0$ és $f'''(x_0) \neq 0$.

Szemléletesen, a függvény konvexitása azt jelenti, hogy a függvény grafikonjához húzott érintő a függvény grafikonja alatt helyezkedik el; ha a függvény konkáv, akkor egy pontbeli érintő a grafikonja felett halad el.



Például az $f(x) = x^3$ függvény esetén az $x_0 = -1$-ben a függvény konkáv (a függvénygörbe az érintő alatt van), míg $x_0 = 1$-ben konvex (a görbe az érintő felett van):
(Megjegyzés: Az $f(x) = x^3$ függvény a $]-\infty, 0[$ intervallumon konkáv, a $]0, +\infty[$ intervallumon konvex, $x_0 = 0$ pedig inflexiós hely.)

Feladatok

1. Adjuk meg a következő függvények magasabb rendű deriváltjait:

   (a) $f(x) = 4x^5 + 8x^4 + 3x^2 + 5, \quad f^{(5)}(x) =?$

   (b) $f(x) = e^{-x^2}, \quad f''(x) =?$

   (c) $f(x) = e^x \cdot \cos x, \quad f'''(x) =?$

   (d) $f(x) = x^2 \cdot \ln x, \quad f''(x) =?$

   (e) $f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad f'''(x) =?$

2. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket monotonitás szempontjából!

   (a) $f(x) = x^4 - x^2$

   (b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

   (c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

   (d) $f(x) = x \cdot \sqrt{1 - x^2}$

   (e) $f(x) = -x \cdot \ln x$

3. Vizsgáljuk meg a következő függvényeket konvexitás szempontjából!

   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 9$

   (b) $f(x) = (x - 2)^2 - 5$

   (c) $f(x) = 1 + \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$

   (d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \ln x$

   (e) $f(x) = \operatorname{arctg} x \ , \qquad \operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/a Magasabb rendű derivált esetén mindig az eggyel alacsonyabb rendű deriváltat kell deriválni, tehát

$$\begin{aligned}
f(x) &= 4x^5 + 8x^4 + 3x^2 + 5 \\
f'(x) &= 20x^4 + 32x^3 + 6x \\
f''(x) &= (20x^4 + 32x^3 + 6x)' = 80x^3 + 96x^2 + 6 \\
f'''(x) &= f^{(3)}(x) = (80x^3 + 96x^2 + 6)' = 240x^2 + 192x \\
f^{(4)}(x) &= (240x^2 + 192x)' = 480x + 192 \\
f^{(5)}(x) &= (480x + 192)' = 480
\end{aligned}$$

2/a A függvény monotonitásának vizsgálatához az f elsőrendű deriváltja szükséges: $f'(x) = 4x^3 - 2x$.
A függvény monotonitása (azaz hogy hol növekvő és hol csökkenő) a szakadási

helyeken és a szélsőérték-helyeken vált, a köztes intervallumokban vagy nő vagy pedig csökken. Éppen ezért elsőként megvizsgáljuk, hogy van-e szakadási helye a függvénynek, azután pedig megkeressük a szélsőértékeket.
A függvény a teljes valós számegyenesen értelmezve van, így szakadási helyei nincsenek.
Szélsőértékeket ott találunk, ahol a deriváltfüggvény 0 és(!) ott a deriváltfüggvény előjelet vált:

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2-1) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 0 \text{ vagy} \\ 2x^2 - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \text{ vagy} \\ x^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

A $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0 és $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *lehetséges* szélsőértékek. Valódi szélsőértékek akkor lesznek, ha ezeken a helyeken a deriváltfüggvény előjelet vált.
Az értelmezési tartományt a lehetséges szélsőértékek segítségével „szétdaraboljuk”, és megállapítjuk, hogy az így kapott intervallumokon a deriváltfüggvény pozitív vagy negatív értékeket vesz fel.
Egy hasznos trükk az előjel megállapításához: Tudjuk, hogy a szétdarabolás után, egy-egy intervallumon a deriváltfüggvény értékei vagy mindig pozitívak vagy mindig negatívak. Válasszunk ki egy tetszőleges számot az intervallumból, helyettesítsük be a deriváltfüggvénybe, és csak az előjelét figyeljük – az így kapott előjel az intervallum minden pontjára érvényes lesz. Ebben a feladatban például $]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$ között a függvény vagy monoton nő, vagy monoton csökken, így a derivált vagy csupa pozitív, vagy csupa negatív értéket ad. Ebben az intervallumban van például a -1, ezt a deriváltfüggvénybe helyettesítve: $f'(-1) = 2(-1)\cdot(2(-1)^2-1) = -2$, ez negatív érték – így ebben az intervallumban minden derivált negatív, és itt mindenhol monoton csökken a függvény.
Összesítsük egy táblázatban a kapott eredményeket:

	$]-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0[$	0	$]0, \frac{1}{\sqrt{2}}[$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.m. csökk.	lok.min.	sz.m. nő	lok.max.	sz.m. csökk.	lok.min.	sz.m. nő

2/c Az előző példa megoldási menetét használjuk fel. A függvény értelmezési tartománya a teljes valós számok halmaza. (A feltétel az lenne, hogy x^2+1 nem lehet nulla, de ez minden valós szám esetén fennáll.)

$$f'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Monotonitás vizsgálata:
Elsőként a lehetséges szélsőértékhelyeket határozzuk meg:

$$f'(x) = 0 \iff 4x = 0 \iff x = 0$$

Tehát az $x = 0$ az egyedüli lehetséges szélsőérték-hely.

	$]-\infty,0[$	0	$]0,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.m. csökk.	lok. min.	sz.m. nő

Megjegyzés: Az $x=0$ nem csupán lokális, de globális (azaz a teljes értelmezési tartományra vonatkozó) minimum is a függvény számára.

2/e A megoldási módszer megegyezik az előző két példáéval.

$$f'(x) = (-x\ln x)' = -\ln x - x\frac{1}{x} = -(\ln x + 1)$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x}$$

Monotonitás:

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = -1 \iff x = \frac{1}{e} \text{ (lehetséges szélsőérték-hely)}$$

Mivel $f''\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{\frac{1}{e}} = -e < 0$, így az $\frac{1}{e}$ lokális maximumhely. Az intervallumok felírásakor figyelembe véve, hogy az ln-függvény hol van értelmezve:

	$]0,\frac{1}{e}[$	$\frac{1}{e}$	$]\frac{1}{e},+\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	sz.m. nő	lok. max.	sz.m. csökk.

(Megjegyzés: Az $x=\frac{1}{e}$ globális maximum is egyben.)

3/a Annak megállapítása, hogy a függvény mely intervallumokon konvex/konkáv, a monotonitásvizsgálathoz hasonló. Itt a másodrendű deriváltat kell figyelni:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$
$$f''(x) = 6x - 6$$

A konvexitás vizsgálatához a függvény értelmezési tartományát a szakadási helyeken és az inflexiós helyeken „daraboljuk szét”, és az így kapott intervallumokon vagy minden pontban konvex vagy minden pontban konkáv a függvény.
A függvény a teljes valós számegyenesen értelmezve van, így szakadási helye nincs. Lehetséges inflexiós hely az $f''(x) = 6x-6 = 0$ egyenlet gyöke, amely az $x=1$. Amíg nem tapasztaljuk azt, hogy itt a másodrendű derivált előjelet vált, addig nem lehetünk biztosak abban, hogy valóban inflexiós helyet találtunk.
A monotonitásvizsgálatnál ismeretett táblázatos módszer konvexitás esetében a következőképpen néz ki:

	$]-\infty,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex

3/b

$$f'(x) = 2(x-2)\cdot 1 = 2x-2$$
$$f''(x) = 2$$

Látható, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén a függvény második deriváltja 2. Ebből következik, hogy nincs inflexiós pontja, és a függvény az értelmezési tartományának minden pontjában konvex (hiszen 2 pozitív szám).
(Megjegyzés: A feladat végeredménye azonnal sejthető abból, hogy az $f(x)$ függvény az x^2 másodfokú függvény transzformáltja.)

3/d

$$f'(x) = x + \frac{1}{x}$$
$$f''(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

A lehetséges inflexiós helyek:

$$f''(x) = 0 \iff 1 = \frac{1}{x^2} \iff x^2 = 1 \Longrightarrow x_{1,2} = \pm 1$$

A függvény értelmezési tartománya a $]0,+\infty[$ intervallum (az ln-függvény miatt), ezért az egyetlen lehetséges inflexiós hely az $x = 1$.

	$]0,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex

Végeredmények

1. b) $-2\cdot e^{-x^2} + 4x\cdot e^{-x^2}$, c) $-2(e^x \sin x + e^x \cos x)$ d) $2\ln x + 3$, e) $\dfrac{2x^2-2}{(1+x^2)^4}$

2. b)

	$]-\infty,-1[$	$]-1,1[$	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	sz.m. csökk.	sz.m. csökk.	sz.m. csökk.

d)

	$[-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}[$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$]\frac{1}{\sqrt{2}},1]$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	sz.m. csökk.	lok.min.	sz.m. nő	lok.max.	sz.m. csökk.

3. c)

	$]-\infty,-2[$	-2	$]-2,1[$	$]1,+\infty[$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	konkáv	infl. pont	konvex	konvex

e)

	$]-\infty,0[$	0	$]0,+\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	konvex	infl. pont	konkáv

2.7. Teljes függvényvizsgálat

Rövid elméleti összefoglaló

Egy $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt a következő lépések segítségével vizsgálhatunk meg:

1. *Értelmezési tartomány meghatározása.* Mely valós számokban értelmezhető a függvény, és hol találhatóak szakadási helyek. Jelölés: $\mathcal{D}_f$
2. *Paritás, periodicitás megállapítása.* Egy függvény *páros*, ha $f(-x) = f(x)$, *páratlan*, ha $f(-x) = -f(x)$ bármely $x \in \mathcal{D}_f$ esetén. (Páros függvény grafikonja az y-tengelyre, páratlan függvény grafikonja az origóra nézve szimmetrikus.) Egy függvény *periodikus*, ha létezik olyan $p \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $f(x) = f(x+p)$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén.
3. *Zérushelyek.* Mely $x \in \mathcal{D}_f$ pontokban nulla a függvény értéke.
4. *Folytonosság vizsgálata, továbbá a függvény határértéke a $+\infty$-ben, a $-\infty$-ben és a szakadási helyeken.* Lásd: Függvények határértéke.
5. *Monotonitás vizsgálata, szélsőértékek keresése.* Lásd: Monotonitás- és konvexitásvizsgálat.
6. *Konvexitás vizsgálata, inflexiós pontok keresése.* Lásd: Monotonitás- és konvexitásvizsgálat.
7. *Függvény ábrázolása.* (Az 1-6. pontok alapján.)
8. *Értékkészlet meghatározása.* Milyen y értékeket vehet fel a függvény. Jelölés: $\mathcal{R}_f$

Feladatok

Végezzünk teljes függvényvizsgálatot a következő függvényeken!

1. $f(x) = \ln(x^2 - 1)$
2. $f(x) = x^3 - 4x$
3. $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$
4. $f(x) = \dfrac{-x^2}{x-3}$
5. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$
6. $f(x) = \dfrac{x}{(x-1)e^x}$
7. $f(x) = e^x(x+1)$
8. $f(x) = x^3 - 2x + 1$

9. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 2x + 1}$

10. $f(x) = (x-1)^2(x+3)^2$

11. $f(x) = \dfrac{1+x^3}{x^2}$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

4. A vizsgált függvény: $f(x) = \dfrac{-x^2}{x-3}$

   1. *Értelmezési tartomány.* A nevező nem lehet nulla, ezért $x \neq 3$, azaz $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{3\}$. (Így az $x = 3$ nem megszüntethető szakadási helye a függvénynek.)
   2. *Paritás, periodicitás.* Ellenőrizzük le, hogy lehet-e a függvény páros vagy páratlan: $f(-x) = \frac{-(-x)^2}{-x-3} = \frac{-x^2}{-x-3} = \frac{x^2}{x+3}$. Tehát $f(-x) \neq f(x)$, ezért a függvény nem páros, és $f(-x) \neq -f(x)$, ezért a függvény nem is páratlan.
   A függvény nyilvánvalóan nem periodikus.
   3. *Zérushelyek.* Az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásait (gyökeit) keressük. Mivel a nevező nem lehet nulla, ezért

   $$f(x) = \frac{-x^2}{x-3} = 0 \iff -x^2 = 0 \iff x = 0$$

   A függvény egyedüli zérushelye az $x = 0$.
   4. *Folytonosság; a függvény határértékei a végtelenben és a szakadási helyeken.* A függvénynek nem megszüntethető szakadási helye az $x = 3$, ezért ebben a pontban kétoldali határértéket kell vizsgálni. Ezen kívül ki kell számítani a határértékeket a $\pm\infty$ helyeken is.

   $$\lim_{x\to 3-} \frac{-x^2}{x-3} = \ldots = +\infty \qquad \lim_{x\to 3+} \frac{-x^2}{x-3} = \ldots = -\infty$$
   $$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{-x^2}{x-3} = +\infty$$

   A kapott eredmény azt jelenti, hogy 3-ban a függvénynek függőleges aszimptotája van.
   5. *Monotonitás és szélsőértékek.* Monotonitásvizsgálathoz az f' függvényre van szükség:

   $$f'(x) = \left(\frac{-x^2}{x-3}\right)' = \frac{-2x(x-3) + x^2}{(x-3)^2} = \frac{-x^2 + 6x}{(x-3)^2}$$

   A lehetséges szélsőértékhelyek az $f'(x) = 0$ egyenlet gyökei, amely pontosan akkor lehet nulla, ha a számlálója nulla:

   $$-x^2 + 6x = 0 \iff -x(x-6) = 0 \iff x = 0 \text{ vagy } x = 6$$

   A két lehetséges szélsőértékhelyünk: $x_1 = 0$ és $x_2 = 6$. Ez a két érték akkor valódi szélsőértékhely, ha kis környezetükben előjelet vált az f' függvény:

	$]-\infty,0[$	0	$]0,3[$	$]3,6[$	6	$]6,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	sz.m. csökk.	lok. min.	sz.m. nő	sz.m. nő	lok. max.	sz.m. csökk.

6. *Konvexitás és inflexiós helyek.* A konvexitásvizsgálathoz az f'' függvényt kell előállítani:

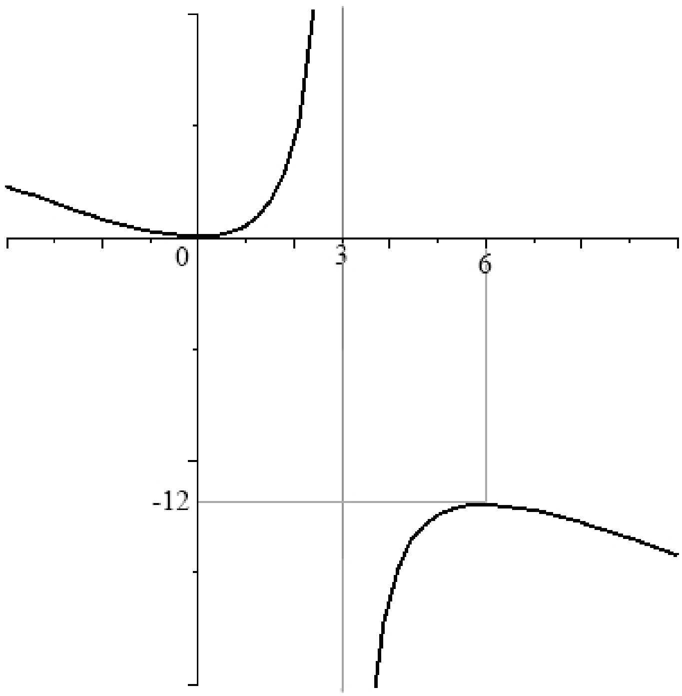
$$f''(x) = \left(\frac{-x^2+6x}{(x-3)^2}\right)' = \frac{(-2x+6)(x-3)^2 - 2(-x^2+6x)(x-3)}{(x-3)^4} =$$

$$= \frac{(-2x+6)(x-3) - 2(-x^2+6x)}{(x-3)^3} = \frac{(-2x+6)(x-3) - 2(-x^2+6x)}{(x-3)^3} = \ldots = \frac{-18}{(x-3)^3}$$

Lehetséges inflexiós helyet ott kaphatnánk, ahol az $f''(x) = 0$ teljesülne. Azonban f'' nevezője soha nem tűnhet el, és a számlálója sem nulla, ezért a függvénynek nincs inflexiós helye. Ettől függetlenül a táblázatot felírhatjuk:

	$]-\infty,3[$	$]3,+\infty[$
$f''(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	konvex	konkáv

7. *A függvény grafikonja.* A precíz ábrázoláshoz ki kell számítani a lényeges helyeken (maximum- és minimumhelyeken, inflexiós helyeken és triviálisan a zérushelyeken) a függvényértékeket, és természetesen az x-tengelyen szerepeltetni kell ezeket a helyeket. A függvénynek egyetlen zérushelye az $x = 0$ – itt metszi (vagy érinti) a függvény grafikonja az x-tengelyt. Két szélsőértékhelyet találtunk: az egyik az $x = 0$, itt $f(0) = 0$, illetve $x = 6$, itt $f(6) = \frac{-6^2}{6-3} = -12$. A függvénynek inflexiós helye nincs.
Az előbbi behelyettesítés azért fontos, mert ennek segítségével tudjuk meg, hogy milyen lényeges értékeket kell felvenni az y-tengelyen. (Ebben az esetben a 0 és -12 értékeknek szerepelniük kell.)
Az ábrázoláshoz érdemes az x-tengelyen $-\infty$-től indulni és $+\infty$ felé haladva számításba venni a kulcsfontosságú helyeket (lásd fent), és az általuk meghatározott intervallumokon figyelni, hogy mikor monoton nő vagy csökken a függvény és konvex vagy konkáv-e.
Elsőként rajzoljuk be az $x = 3$-nál található függőleges aszimptotát (mivel a 3 nem megszüntethető szakadási hely). A $-\infty$-től indulva az első fontos hely a 0 (zérushely is és lokális minimumhely is egyben). A $-\infty$ és 0 által meghatározott intervallumon a függvény monoton csökkenő és konvex – eszerint ábrázoljuk a függvény ezen részét. Továbbhaladva 0 és 3 között a függvény monoton növekvő és konvex. Ezután a $]\,3,6\,[$ intervallum következik, ahol f monoton nő és konkáv. Végül 6-tól $-\infty$-ig a függvény monoton csökkenő és konkáv.



8. *A függvény értékkészlete.* A grafikonból leolvasható, hogy a függvény nem vesz fel értékeket a kapott maximum- és minimumhely között.
Így $\mathcal{R}_f = \,]-\infty, -12\,] \cup [\,0, +\infty\,[$

10. A vizsgált függvény: $f(x) = (x-1)^2(x+3)^2$.
1. *Értelmezési tartomány.* $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
2. *Periodicitás, paritás.* A függvény nyilvánvalóan nem periodikus.
$f(-x) = (-x-1)^2(-x+3)^2 = (x+1)^2(x-3)^2$, amely nem egyenlő sem $f(x)$-szel, sem pedig $-f(x)$-szel, így nem páros és nem is páratlan.
3. *Zérushelyek.* A függvény zérushelyei az $f(x) = 0$ egyenlet megoldásai. Egy szorzat pontosan akkor nulla, ha legalább az egyik tényezője nulla, ezért $(x-1)^2 = 0$ vagy $(x+3)^2 = 0$. Ez pontosan akkor következik be, ha $x-1=0$ vagy $x+3=0$; emiatt a keresett zérushelyek $x_1 = 1$ és $x_2 = -3$ (mindkettő kétszeres gyök).
4. *Folytonosság és a függvény határértékei a végtelenben és a szakadási helyeken.* A függvény nyilvánvalóan folytonos a teljes értelmezési tartományán. Szakadási helye nincs, így elegendő a végtelenben vizsgálni a határértékeket:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-1)^2(x+3)^2 = +\infty\ , \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-1)^2(x+3)^2 = +\infty\ .$$

5. *Monotonitás és szélsőértékek.*

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)\cdot(x+3)^2 + (x-1)^2\cdot 2(x+3) = \\ &= (x+3)\left((2x-2)(x+3) + 2(x-1)^2\right) = \\ &= (x+3)\left(2(x-1)(x+3) + 2(x-1)^2\right) = \\ &= 2(x+3)(x-1)\,(x+3+x-1) = 2(x+3)(x-1)(2x+2) = \\ &\quad 4(x+3)(x-1)(x+1) \end{aligned}$$

Lehetséges szélsőérték-helyeket ott találunk, ahol $f'(x) = 0$:

$$(x+3)(x-1)(x+1) = 0$$

A lehetséges szélsőérték-helyek tehát: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ és $x_3 = 1$.

	$]-\infty,-3[$	-3	$]-3,-1[$	-1	$]-1,1[$	1	$]1,+\infty[$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.m. csökk.	lok. min.	sz.m. nő	lok. max.	sz.m. csökk.	lok. min.	sz.m. nő

6. *Konvexitás és inflexiós helyek.*

$$f''(x) = 12x^2 + 24x - 4$$

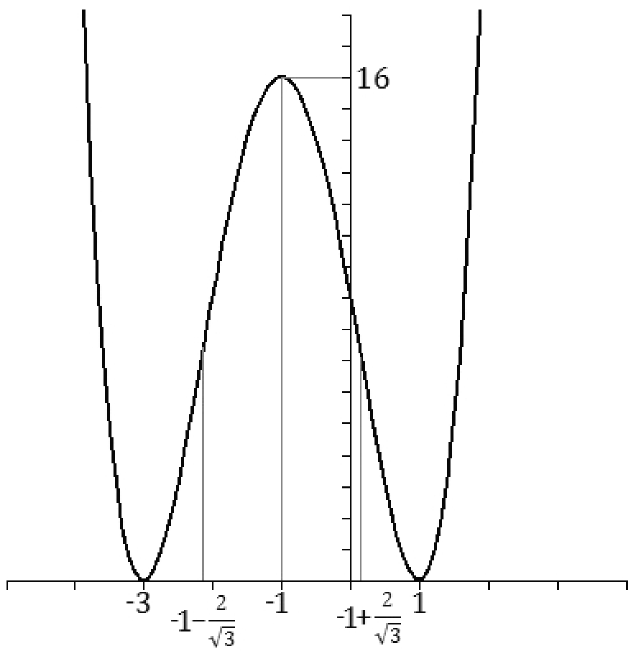
A lehetséges inflexiós helyek az $f''(x) = 0$ egyenlet gyökei:

$$12x^2 + 24x - 4 = 0$$
$$3x^2 + 6x - 1 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+12}}{6} = \frac{-6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \frac{-3 \pm 2\sqrt{3}}{3} = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

A lehetséges inflexiós helyek: $x_1 = -1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$ és $x_2 = -1 - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

	$]-\infty,-1-\frac{2}{\sqrt{3}}[$	$-1-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$]-1\frac{2}{\sqrt{3}},-1+\frac{2}{\sqrt{3}}[$	$-1+\frac{2}{\sqrt{3}}$	$]-1+\frac{2}{\sqrt{3}},+\infty[$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	konvex	infl.pont	konkáv	infl.pont	konvex

7. *A függvény grafikonja.*



8. *A függvény értékkészlete.* A függvény vizsgálatából és a grafikonjából leolvasható, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$.

11. A vizsgált függvény az $f(x) = \dfrac{1+x^3}{x^2}$:

1. *Értelmezési tartomány.* A függvény nem értelmezhető, ha $x^2 = 0$, azaz $x = 0$, így $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. *Periodicitás, paritás.* A függvény nyilvánvalóan nem periodikus.
Az $f(-x) = \frac{1-x^3}{x^2}$, ez nem egyenlő sem $f(x)$-szel, sem pedig $-f(x)$-szel, ezért nem páros és nem is páratlan.
3. *Zérushelyek.*

$$f(x) = 0 \iff 1 + x^3 = 0 \iff x^3 = -1 \iff x = -1\ ,$$

a függény egyetlen zérushelye az $x = -1$.
4. *Folytonosság, a függvény határértékei a végtelenben és a szakadási helyeken.* Az f az értelmezési tartomány minden pontjában folytonos, szakadási helye az $x = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x^3}{x^2} = -\infty$$
$$\lim_{x\to0-} \frac{1+x^3}{x^2} = \ldots = +\infty \qquad \lim_{x\to0+} \frac{1+x^3}{x^2} = \ldots = +\infty$$

5. *Monotonitás és szélsőértékek.*

$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (1+x^3)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x^4 - 2x}{x^4} = \frac{x^3-2}{x^3}$$

Lehetséges szélsőérték-helyeket ott találunk, ahol az $f'(x)$ eltűnik (azaz $= 0$).

$$f'(x) = 0 \iff x^3 - 2 = 0 \iff x^3 = 2 \iff x = \sqrt[3]{2}\ .$$

Készítsük el a monotonitás vizsgálatához szükséges táblázatot:

	$]-\infty, 0[$	$]0, \sqrt[3]{2}[$	$\sqrt[3]{2}$	$]\sqrt[3]{2}, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	sz.m. nő	sz.m. csökk.	lok. min.	sz.m.nő

6. *Konvexitás és inflexiós pontok.*

$$f''(x) = \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3-2)\cdot 3x^2}{x^6} = \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$

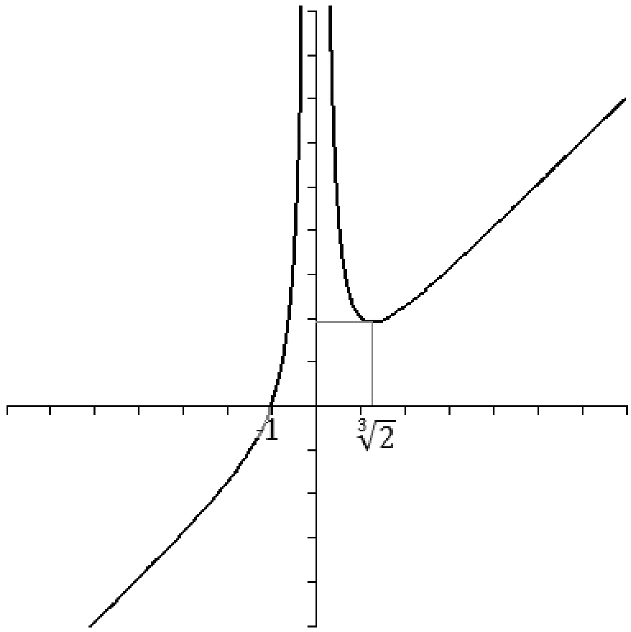
Lehetséges inflexiós helyek:

$$f''(x) = 0 \iff \frac{6}{x^4} = 0 \iff 6 = 0 \text{ (nincs inflexiós hely)}$$

$f''(x) > 0$ minden $x \in \mathcal{D}_f$-re, ezért a függvény mindenhol konvex.

	$]-\infty, 0[$	$]0, +\infty[$
$f''(x)$	$+$	$+$
$f(x)$	konvex	konvex

7. *A függvény grafikonja.*

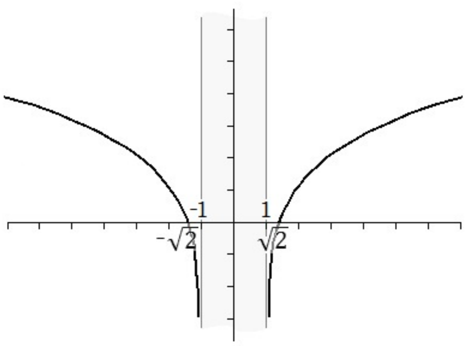


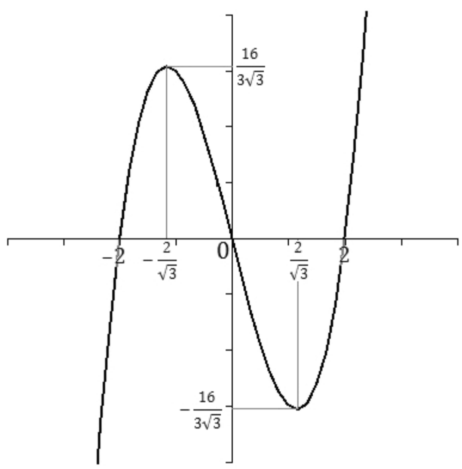
8. *A függvény értékkészlete.* $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$.

Végeredmények

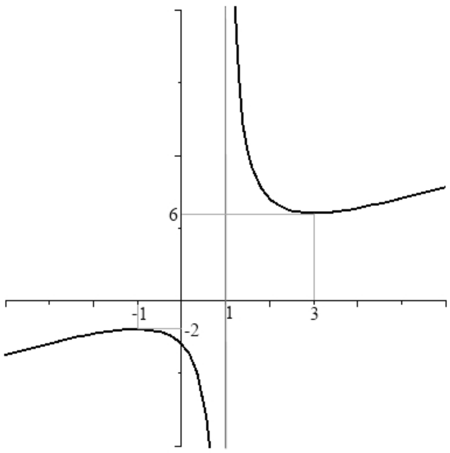
A rövidség kedvéért csupán a függvények grafikonjait közöljük, bejelölve a zérushelyeket, a szélsőérték-helyeket és az inflexiós helyeket, továbbá a függőleges vagy vízszintes aszimptotákat (ha azok léteznek). A grafikonból leolvashatóak a monotonitási és konvexitási táblázatok is.

(1) és (2) feladat:

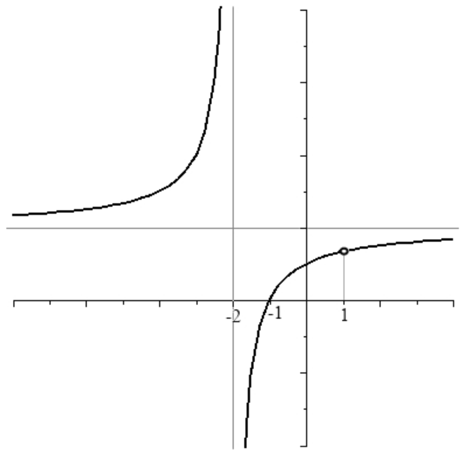
(1) 

(2) 

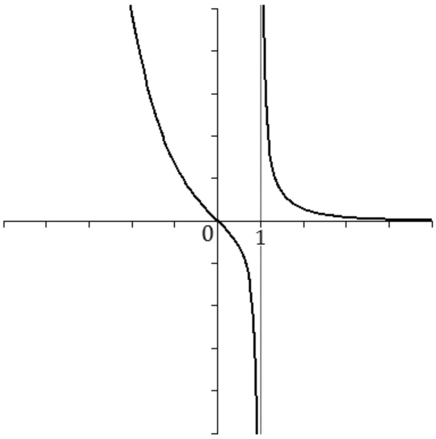
(3), (5), (6), (7), (8) és (9) feladat:



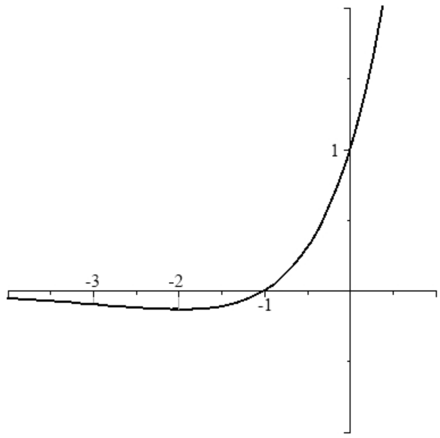
(3)



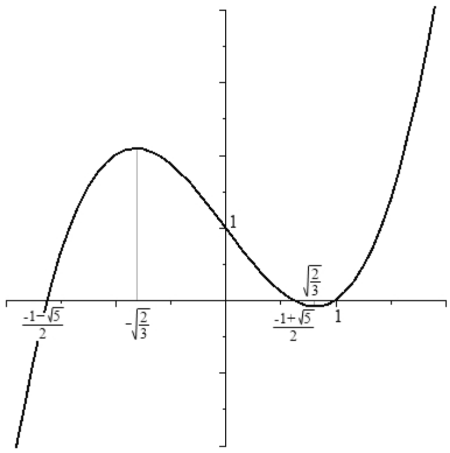
(5)



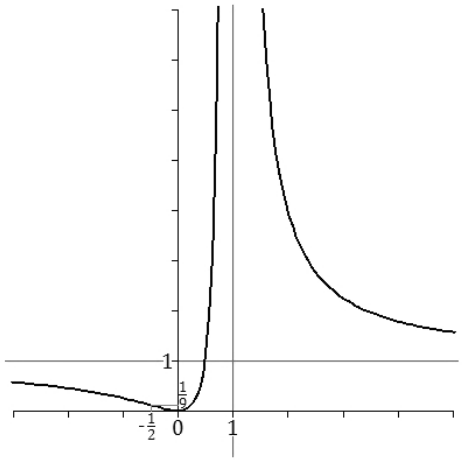
(6)



(7)



(8)



(9)

2.8. A differenciálszámítás további alkalmazásai

A következőkben – a teljesség igénye nélkül – a differenciálszámítás néhány további alkalmazására mutatunk példát.

Érintő meghatározása

Írjuk fel az $f(x) = x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ függvény $x_0 = 1$-beli érintőjének egyenletét!

A feladat megoldása során felhasználjuk, hogy a függvény adott pontbeli deriváltja éppen a pontbeli érintő meredeksége. Az $f(x)$ függvény deriváltja $f'(x) = 3x^2 - 6x - 12$, speciálisan az $x_0 = 1$ pontban $f'(x_0) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 - 12 = -15 = m$. Az érintőegyenes egyenletét felírhatjuk, ha ismerjük az egyenes egy (x_0, y_0) pontját és az m meredekségét: $y - y_0 = m(x - x_0)$. Az egyenlethez már csak az y_0 értéket kell meghatározni: $y_0 = f(x_0) = f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 1 = -13$. Így a keresett érintőegyenes egyenlete:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - (-13) &= -15(x - 1) \\ y &= -15x + 2 \end{aligned}$$

(Geometriai) szélsőérték feladatok

Az 1 cm kerületű téglalapok közül melyiknek a legnagyobb a területe?

Egy a és b oldalú téglalap kerülete $K = 2(a+b)$, míg területe $T = ab$. A feladat szerint $K = 1$, a T területet szeretnénk maximalizálni. A területet tehát $T(a, b)$ függvényként tekintjük, amelynek értéke a-tól és b-től függ, és keressük a maximumát (azaz szélsőértéket keresünk). Ahhoz, hogy a szélsőértékekről tanultakat használhassuk, a $T(a, b)$ területfüggvénynek csupán egyetlen változótól kell függnie. Itt alkalmazzuk a feladat azon feltételét, hogy a kerület 1 cm, azaz

$$1 = 2(a + b) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = a + b \quad \Rightarrow \quad b = \frac{1}{2} - a \ .$$

A b ismeretlen tehát kifejezhető az a-val, így a területfüggvény is csupán egy változótól (az a-tól) függ, és a deriváltját is kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned} T(a, b) &= ab \\ T(a) &= a\left(\frac{1}{2} - a\right) = \frac{1}{2}a - a^2 \\ T'(a) &= \frac{1}{2} - 2a \end{aligned}$$

A $T(a)$ függvény maximumát szeretnénk megkapni, ezért megvizsgáljuk, hogy hol tűnik el (hol lesz 0) a $T'(a)$, majd ellenőrizzük, hogy a kapott érték tényleg maximumhely-e:

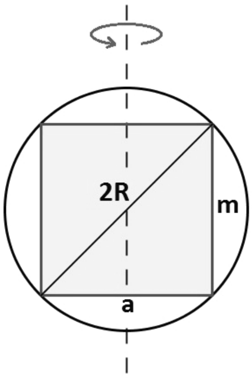
$$T'(a) = 0 \iff \frac{1}{2} - 2a = 0 \iff a = \frac{1}{4}$$

	$]-\infty, \frac{1}{4}[$	$\frac{1}{4}$	$]\frac{1}{4}, +\infty[$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	mon. nő	max.	mon. csökk.

A területfüggvénynek az $a = \frac{1}{4}$-ben maximuma van, így ha $a = \frac{1}{4}$ és $b = \frac{1}{2} - a = \frac{1}{4}$, akkor a téglalap területe maximális. Ez a téglalap éppen az $\frac{1}{4}$ cm hosszúságú oldalakkal bíró négyzet.

Írjunk az R sugarú gömbbe maximális térfogatú hengert!

A gömb és a henger forgástest, ezért a feladat redukálható kétdimenziós esetre. Egy körbe kell maximális területű téglalapot írni. E kettőt egy közös szimmetriatengely körül megforgatva eljutunk a gömbhöz és a hengerhez.



A téglalap területe $T = am$. Itt mind az a alap (a keresett henger alapkörének átmérője), mind pedig az m magasság (a henger magassága) ismeretlen. Vegyük észre, hogy az a, m és $2R$ derékszögű háromszöget alkot, így például $m = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Ennek segítségével $T = a\sqrt{4R^2 - a^2} = \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$ írható, ezt mint függvényt kell maximalizálni:

$$T'(a) = \left(\sqrt{4R^2a^2 - a^4}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{4R^2a^2 - a^4}} \cdot \left(8R^2a - 4a^3\right) = \frac{2a(2R^2 - a^2)}{\sqrt{4R^2a^2 - a^4}}$$

Szélsőérték-helyet ott találhatunk, ahol a deriváltfüggvény nulla:

$$T'(a) = 0 \iff 2a(2R^2 - a^2) = 0 \iff a = 0 \text{ vagy } a = \sqrt{2}R$$

Mivel az a nem lehet nulla (ugyanis akkor a hengernek 0 hosszúságú alapja lenne), ezért az egyetlen lehetséges szélsőérték-hely az $a = \sqrt{2}R$. Ellenőrizni kell, hogy ez valóban maximum.
A deriváltfüggvényben a nevező és $2a$ is biztosan pozitív, így csak a $2R^2 - a^2$ előjelét kell ellenőrizni (ettől függ, hogy mely intervallumokon monoton nő vagy csökken a terület-függvény). Tekintsünk egy elegendően kicsi $\varepsilon > 0$ értéket. Ezt kivonva (vagy hozzáadva) $a = \sqrt{2}R$-hez megkapjuk, hogy a $]0, \sqrt{2}R[$ (vagy a $]\sqrt{2}R, +\infty[$) intervallumon pozitív vagy negatív a deriváltfüggvény.

$$2R^2 - \left(\sqrt{2}R - \varepsilon\right)^2 = \ldots = 2\sqrt{2}R\varepsilon - \varepsilon^2 > 0$$
$$2R^2 - \left(\sqrt{2}R + \varepsilon\right)^2 = \ldots = -2\sqrt{2}R\varepsilon - \varepsilon^2 < 0$$

Látható, hogy a terület-függvény deriváltja az $a = \sqrt{2}R$-ben előjelet vált, pozitívból negatívba fordul, ezért itt lokális maximum található. Kiszámítva az a-ból m értékét, azt találjuk, hogy $a = m$ (azaz egy körbe írható maximális területű téglalap a négyzet). Egy R sugarú gömbbe írható maximális térfogatú henger az $\frac{\sqrt{2}R}{2}$ sugarú, $m = \sqrt{2}R$ magasságú henger.

Taylor-sor

Taylor tétele szerint egy függvény felírható

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

alakban, ahol $T_n(x)$ az f függvény x_0 körüli n-edfokú Taylor-polinomja, $R_n(x)$ pedig az n-edik maradéktag:

$$\begin{aligned}T_n(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\ R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (\xi \in]x, x_0[\text{ vagy } \xi \in]x_0, x[)\end{aligned}$$

Néhány nevezetes függvény Taylor-sora:

A cos**-függvény:**
A Taylor-sor felírásához tekintsük a cos-függvény deriváltjait:

$$\cos'(x) = -\sin x\ , \quad \cos''(x) = -\cos x\ , \quad \cos'''(x) = \sin x\ , \quad \cos^{(4)} x = \cos x\ .$$

Látható, hogy a magasabbrendű deriváltak ciklikusságot mutatnak, azaz

$$\begin{aligned}\cos^{(4k)}(x) = \cos x\ , \quad \cos^{(4k+1)}(x) = -\sin x\ ,\\ \cos^{(4k+2)}(x) = -\cos x\ , \quad \cos^{(4k+3)} x = \sin x\ ,\end{aligned}$$

ahol k tetszőleges természetes szám.
A fentiek segítségével az n-edik Taylor-polinom tetszőleges x_0 pont körül:

$$\begin{aligned}\cos x \approx \cos x_0 + \frac{-\sin x_0}{1!}(x-x_0) + \frac{-\cos x_0}{2!}(x-x_0)^2 + \\ + \frac{\sin x_0}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{\cos x_0}{4!}(x-x_0)^4 + \ldots + \frac{\cos^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\end{aligned}$$

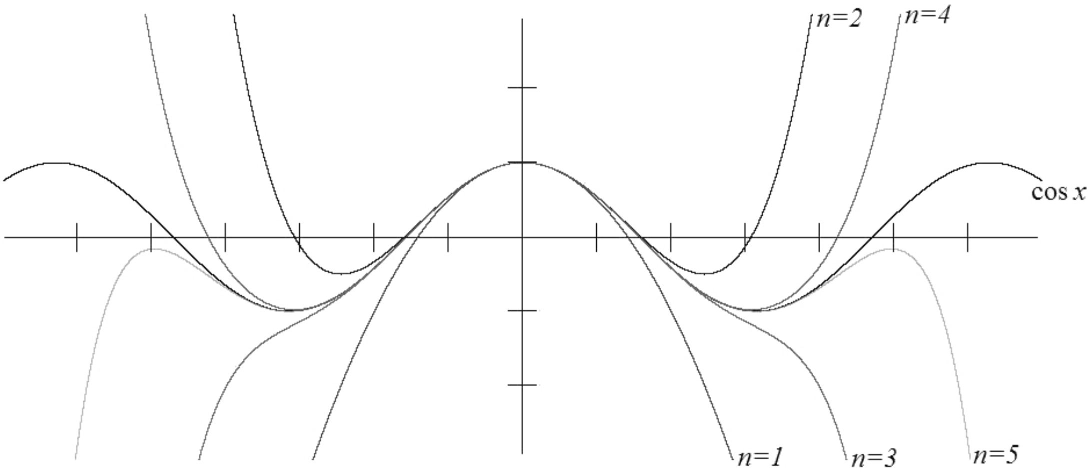
Amennyiben $x_0 = 0$ (azaz a függvény MacLaurin-sorát keressük):

$$\begin{aligned}\cos x &\approx 1 - 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

Ebből pedig a Taylor-sor:

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\ .$$

Érdemes ábrázolni az eredményt: minél magasabb a Taylor-polinom fokszáma, annál jobban közelítünk a függvényhez.
Az ábrán a cos-függvény MacLaurin-sorát felhasználva közelítettünk $n = 1, \ldots, 5$ esetekben. (A Taylor-sor esetén ezek az $n = 2, 4, 6, 8, 10$ esetek.)



Ha például $x_0 = \pi$, azaz a cos-függvény Taylor-sorát írjuk fel a π körül (vagy más szóval a cos-függvényt $(x-\pi)$ polinomjaként írjuk fel):

$$\cos x \approx -1 - 0 + \frac{(x-\pi)^2}{2!} + 0 - \frac{(x-\pi)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!} =$$
$$= -\left(1 - \frac{(x-\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\pi)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$\cos x = \lim_{n\to\infty} -\left(1 - \frac{(x-\pi)^2}{2!} + \frac{(x-\pi)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!}\right) =$$
$$= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-\pi)^{2n}}{(2n)!} .$$

A sin**-függvény:**
A cos-függvénynél látottakhoz hasonló számolással, az n-edik Taylor-polinom tetszőleges x_0 pont körül:

$$\sin x \approx \sin x_0 + \frac{\cos x_0}{1!}(x-x_0) + \frac{-\sin x_0}{2!}(x-x_0)^2 +$$
$$+ \frac{-\cos x_0}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{\sin x_0}{4!}(x-x_0)^4 + \ldots + \frac{\sin^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

A Taylor-sor az $x_0 = 0$ pontban a következő alakot ölti:

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(0 + x - 0 - \frac{x^3}{3!} + 0 - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} .$$

Az e^x **(vagy** exp**) függvény:**

Az e^x-függvényre teljesül, hogy a deriváltja önmaga, ezért az n-edfokú Taylor-polinomja az $x_0 = 0$ pont körül:

$$e^x \approx e^0 + \frac{e^0}{1!}x + \frac{e^0}{2!}x^2 + \ldots + \frac{e^0}{n!}x^n$$

Innen a Taylor-sor:

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

Állítsuk elő az $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$ polinomot $p(x) = x - 1$ polinomjaként!

Általános megoldási elv: Deriváljuk a függvényt, és határozzuk meg a magasabb rendű deriváltjait is. Mivel a függvényünk egy polinom, így lesz olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre $f^{(n)} = 0$. Ez azt jelenti, hogy a Taylor-sorfejtés $(n-1)$ lépés után véget ér, maradéktag nem lesz.
A függvény negyedfokú polinom, így az 5. deriváltja már eltűnik ($n = 5$).

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4x^3 + 9x^2 + 4x + 1\\
f''(x) &= 12x^2 + 18x + 4\\
f'''(x) &= 24x + 18\\
f^{(4)}(x) &= 24\\
f^{(5)}(x) &= 0
\end{aligned}$$

A keresett előállítás (azaz a negyedfokú Taylor-polinom, $x_0 = 1$ körül):

$$\begin{aligned}
T_4(x) = 8 + 18(x-1) + \frac{34}{2}(x-1)^2 + \frac{42}{6}(x-1)^3 + \frac{24}{24}(x-1)^4 =\\
= (x-1)^4 + 7(x-1)^3 + 17(x-1)^2 + 18(x-1) + 8
\end{aligned}$$

L'Hospital-szabály

Legyen f és g differenciálható függvények az x_0 pont egy környezetében, $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$. Ha

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty\ ,$$

akkor

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\ .$$

(A tétel megfogalmazható bal- és jobboldali határértékekre is.)

A L'Hospital-szabály tehát olyan határértékek kiszámításánál alkalmazható, ahol – a feltételek teljesülése mellett – a függvény $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\infty}{\infty}$ határértéket venne fel.
Tekintsünk néhány tipikus példát:

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(x+1)} \overset{„\frac{\infty}{\infty}”}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x+1}\cdot 1} = \lim_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sin x} \overset{„\frac{0}{0}”}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot e^{2x}}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\ln\frac{x}{2}}{x-2} \overset{„\frac{0}{0}”}{=} \lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{1} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{x} = \frac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

5. $\lim\limits_{x\to 0+} (\ln x \cdot x) \overset{"-\infty\cdot 0"}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{"\frac{-\infty}{+\infty}"}{=} \lim\limits_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0+} (-x) = 0$

6. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\ln x\cdot\frac{1}{1-x}} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{\ln x}{1-x}} \overset{(*)}{=} e^{-1} = \frac{1}{e}$,

ahol a $(*)$ lépésben a L'Hospital-szabályt alkalmaztuk: $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x} \overset{"\frac{0}{0}"}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{\frac{3}{\cos^2 3x}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\cos^2 3x}{3\cos^2 2x} = \frac{2}{3}$

8. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{\log_4 5x} \overset{"\frac{+\infty}{+\infty}"}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{6x}{\frac{5}{5x\ln 4}} = \lim\limits_{x\to +\infty} 6x^2 \ln 4 = +\infty$

Egyenlőtlenségek igazolása

A deriváltfüggvények gyakran alkalmazhatóak speciális egyenlőtlenségek bizonyítására.

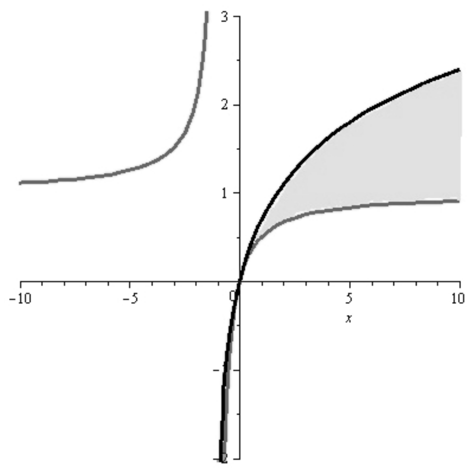
Bizonyítsuk be, hogy

$$\ln(1+x) > \frac{x}{x+1} , \qquad \text{ha } x > 0 \ !$$

Az egyenlőtlenség bizonyításához első lépésben rendezzük egy oldalra a kifejezést:

$$\ln(1+x) - \frac{x}{x+1} > 0 , \qquad \text{ha } x > 0 \ .$$

Mindkét kifejezés pozitív x-ek esetén pozitív értéket vesz fel. Azt fogjuk belátni, hogy a fenti különbség mint függvény szigorúan monoton növekvő.
A lenti ábrán a szürke sávval jelöltük e különbséget.



Deriváljuk a függvényt:

$$\left(\ln(1+x) - \frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

A deriváltfüggvény előjelét elegendő csak a feladatban említett x-ek esetén vizsgálni, azaz az $]0,+\infty[$ intervallumon. Itt viszont nyilvánvalóan pozitív értékeket vesz fel a derivált. Ebből következik, hogy az eredeti különbség szigorúan monoton növekvő (és pozitív értékű), tehát az állítás igaz.

2.9. Határozatlan integrál

Rövid elméleti összefoglaló

Egy f függvény primitív függvénye az F függvény, ha $F'(x) = f(x)$. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ konstanst hozzáadhatunk F-hez $(F(x)+c)' = f(x)$, ez az f függvény *határozatlan integrálja.* Jelölés:

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + c\ .$$

A képletből látható, hogy a határozatlan integrál a deriválás „inverz művelete”, így például néhány nevezetes függvény határozatlan integrálja:

$$\int x^n\ \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ , \qquad \int \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \ln|x| + c$$

$$\int a^x\ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sin x\ \mathrm{d}x = -\cos x + c\ , \qquad \int \cos x\ \mathrm{d}x = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{d}x = \operatorname{arctg} x + c$$

Integrálási szabályok:

1. Ha $k \in \mathbb{R}$ konstans, akkor $\int k \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = k \cdot \int f(x)\ \mathrm{d}x$
2. $\int (f(x) \pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x$
3. *Parciális integrálás:* A deriválás szorzatszabályából adódik, hogy

$$\int f(x) \cdot g'(x)\ \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\ \mathrm{d}x$$

(Kidolgozott példák: 21., 24., 25., 26., 28. és 48. feladatok)

4. *Helyettesítéses integrálás:*

$$\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ \mathrm{d}t\ ,$$

azaz itt az $x = \varphi(t)$ és $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ formális helyettesítéssel élünk.
(Vegyük észre, hogy a fenti képletet az $(F(x))' = (F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ összetett függvények deriválási szabályból kapjuk.)
(Kidolgozott példák: 29., 31., 33., 35. és 43. feladatok)

Egyszerű helyettesítések:

(a) $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cdot F(ax+b)+c$ (lineáris helyettesítés)

(b) $\int (f(x))^k \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{(f(x))^{k+1}}{k+1}+c\,,$ ha $k \neq -1$

(c) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|+c$

(d) $\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = e^{f(x)}+c$

(Kidolgozott példák: 8., 10., 15., 16. és 47. feladatok)

5. *Racionális törtfüggvények integrálása:*

(a) Az $\int \frac{1}{(ax+b)^k}\,\mathrm{d}x$ típusú integrálokat lineáris helyettesítéssel oldhatjuk meg.

(b) Az $\int \frac{x}{(ax+b)^k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left(\frac{b}{(k-1)(ax+b)^{k-1}} - \frac{1}{(k-2)(ax+b)^{k-2}}\right)$ ($t = ax+b$ lineáris helyettesítéssel).

(c) Az $\int \frac{Ax+B}{(ax+b)^k}\,\mathrm{d}x$ integrálok az előző két pont segítségével megoldhatóak.

(d) Az $\int \frac{1}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$ integrálok megoldásakor először meg kell állapítani, hogy a másodfokú egyenletnek van-e két különböző megoldása. Ha van, akkor ún. *parciális törtekre bontás*sal oldható meg a feladat. Ha nincs megoldás, akkor teljes négyzetté alakítva a nevezőt lineáris helyettesítéssel kapjuk a végeredményt.

(e) Az $\int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+d}\,\mathrm{d}x$ alakú integrálok esetén a számlálót kell olyan alakúra hozni, hogy szerepeljen benne a nevező deriváltja, így használható az Egyszerű helyettesítések (c) pontja, és majd a maradék tagot az előző (azaz (d)) pont alapján integráljuk. Amennyiben a nevezőbeli kifejezésnek 1 vagy 2 gyöke van, parciális törtekre bontás a célravezető.

(Kidolgozott példák: 38., 39., 41., 44. és 45. feladatok)

Megjegyzés: A felsoroltaknál nehezebb helyettesítéses integrálok vagy racionális törtfüggvények integrálásának megoldásait lásd szakirodalmak (vagy matematikai kézikönyvek, pl.: Bronstejn: Matematikai kézikönyv).

Feladatok

Számítsuk ki a következő integrálokat!

1. $\int \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2. $\int \frac{x^2-1}{x+1}\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int (1+e^{x-1})\,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int (t^2-6t-5)\,\mathrm{d}t$

6. $\displaystyle\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int \left(2e^x+\frac{5}{x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int \frac{x-2}{x(x-4)}\,\mathrm{d}x$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

13. $\displaystyle\int \frac{8x-7}{4x^2-7x+11}\,\mathrm{d}x$

14. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,\mathrm{d}x$

15. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

16. $\displaystyle\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\,\mathrm{d}x$

17. $\displaystyle\int 4x\cdot\sqrt{3+2x^2}\,\mathrm{d}x$

18. $\displaystyle\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

19. $\displaystyle\int \frac{x}{(8x^2+27)^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$

20. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

21. $\displaystyle\int \sin^3 x\cos x\,\mathrm{d}x$

22. $\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$

23. $\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$

24. $\int x \sin x \, \mathrm{d}x$

25. $\int x \ln x \, \mathrm{d}x$

26. $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$

27. $\int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$ *

28. $\int e^{-x} \sin x \, \mathrm{d}x$

29. $\int \ln x \, \mathrm{d}x$

30. $\int \frac{x^3}{(x+2)^4} \, \mathrm{d}x$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}^3} \, \mathrm{d}x$

32. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x} + 2} \, \mathrm{d}x$

33. $\int \frac{e^{4x}}{1+e^x} \, \mathrm{d}x$

34. $\int \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

35. $\int \sqrt{e^x - 1} \, \mathrm{d}x$

36. $\int \mathrm{tg}^3 x \, \mathrm{d}x$

37. $\int \sqrt{1-x^3} \, \mathrm{d}x$ (alkalmazzuk az $x = \sin t$ helyettesítést)

38. $\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

39. $\int \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \, \mathrm{d}x$

40. $\int \frac{1}{x^2 + 2x + 6} \, \mathrm{d}x$

41. $\int \frac{2x+3}{x^2 + 3x - 10} \, \mathrm{d}x$

42. $\int \frac{5x+2}{(x+3)(x-4)} \, \mathrm{d}x$

43. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

44. $\displaystyle\int \frac{1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x$

45. $\displaystyle\int \frac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$

46. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x$

47. $\displaystyle\int \frac{1}{1+2\cos x}\,\mathrm{d}x$

48. $\displaystyle\int \left(\sin^5 x - 13e^x + \pi - 2x\right)\,\mathrm{d}x$

49. $\displaystyle\int \mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

50. $\displaystyle\int (x^2-2x+10)\cdot e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

51. $\displaystyle\int \left(\cos 2x + e^{-\frac{x}{2}} + \mathrm{tg}\,5x\right)\,\mathrm{d}x$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

3. Bontsuk fel a törtet, majd integráljunk tagonként:

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + 2\sqrt{x} + c$$

4. A kifejezést tagonként integrálva:

$$\int (1+e^{x-1})\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{e^x}{e}\right)\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{e}\cdot e^x + c = x + e^{x-1} + c$$

7. Ismét tagonként integrálva, a megfelelő konstansszorzókat kiemelve:

$$\int \left(2e^x + \frac{5}{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)\,\mathrm{d}x = 2\int e^x\,\mathrm{d}x + 5\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2e^x + 5\ln x + \mathrm{tg}\,x + c$$

8. A kifejezés $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakúra hozható, a következőképpen:

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x+1)}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x-1\right| + c$$

Megjegyzés: A példa megoldásakor a kifejezést egy valós számmal megszoroztuk, és be is osztottunk azzal, hogy megkapjuk a kívánt alakot – ez a módszer egy gyakran használt trükk.

10. Az integrálandó kifejezés szintén $\frac{f'(x)}{f(x)}$ alakú:

$$\int \frac{1}{x \ln x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\ \mathrm{d}x = \ln\left(\ln|x|\right) + c$$

15. A függvényt apró átalakítás után $e^{f(x)} \cdot f'(x)$ alakúra hozhatjuk, amelynek az integrálját a bevezetőben már tárgyaltuk.

$$\int xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2xe^{-x^2}\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

16. A példa az $(f(x))^k \cdot f'(x)$ függvény integrálásának tipikus esete:

$$\int \frac{3x}{(2+3x^2)^3}\ \mathrm{d}x = \int 3x(2+3x^2)^{-3}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 6x(2+3x^2)^{-3}\ \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2+3x^2)^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{4(2-3x^2)^2} + c$$

22. Ez a feladat a parciális integrálás egyik legegyszerűbb példája. Parciális integrálásnál kulcsfontosságú az, hogy melyik függvény játssza a képletbeli $f(x)$ és melyik a $g'(x)$ függvény szerepét. Célunk az, hogy a parciális integrálás második tagjában kapott új függvény integrálása egyszerűbb legyen. Azt is végig kell gondolni, hogy melyik függvény az, amelyiknek a deriváltját látva ($g'(x)$) könnyedén meg tudjuk mondani az eredeti ($g(x)$) függvényt. (Amennyiben az integrálandó kifejezésben e^x szorzóként szerepel, azt érdemes $g'(x)$-nek megválasztani.)
Legyen tehát $f(x) = x$ és $g'(x) = e^x$:

$$\int \underset{f}{x}\underset{g'}{e^x}\ \mathrm{d}x = \underset{f}{x}\underset{g}{e^x} - \int \underset{f'}{1}\cdot \underset{g}{e^x}\ \mathrm{d}x = xe^x - e^x + c$$

25. A függvény integrálját parciális integrálással határozhatjuk meg.
Legyen az $f(x) = \ln x$ és $g'(x) = x$. Ekkor:

$$\int x\ln x\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + c$$

Egyszerűen végiggondolható, hogy ha $f(x) = x$ és $g'(x) = \ln x$ választással éltünk volna, akkor a megoldást nem kaphattuk volna meg ilyen könnyen, ugyanis nem lehet azonnal megmondani, hogy melyik az a függvény, amelyiknek a deriváltja(!) $\ln x$ (lásd: 29. feladat).

26. Oldjuk meg a feladatot parciális integrálással, ahol $f(x) = \cos x$ és $g'(x) = e^x$.

$$\int e^x\cos x\ \mathrm{d}x = e^x\cos x - \int e^x(-\sin x)\ \mathrm{d}x = e^x\cos x + \int e^x\sin x\ \mathrm{d}x = \dots$$

Az új integrálandó függvény az eredeti feladathoz hasonló.
Legyen most $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$ és integráljunk ismét parciálisan.

$$\dots = e^x\cos x + \left(e^x\sin x - \int e^x\cos x\ \mathrm{d}x\right) = e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x\cos x\ \mathrm{d}x$$

Vizsgáljuk meg, hogy mire jutottunk:
$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x.$
Vegyük észre, hogy ebből az egyenlőségből már kifejezhető az integrál eredménye:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x(\cos x + \sin x) - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x \\ 2\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x(\cos x + \sin x) \\ \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} e^x(\cos x + \sin x) + c \end{aligned}$$

27. Parciális integrálással és trigonometrikus azonosságok felhasználásával, a 26. feladat mintájára kaphatjuk meg az integrált:

$$\begin{gathered} \int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x = e^x \cos^2 x - \int e^x \cdot 2\cos x(-\sin x) \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + \int e^x \cdot 2\cos x \sin x \, \mathrm{d}x = e^x \cos^2 x + \int e^x \cdot \sin 2x \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - \int e^x \cdot \cos 2x \cdot 2 \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 2\int e^x \cdot \cos 2x \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 2\int e^x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \, \mathrm{d}x = \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 2\int e^x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x + 2\int e^x \cdot \sin^2 x \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 2\int e^x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x + 2\int e^x \cdot (1 - \cos^2 x) \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 4\int e^x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x + 2\int e^x \, \mathrm{d}x = \\ = e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 4\int e^x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x + 2e^x \end{gathered}$$

Az egyenlőség rendezésével kapjuk a keresett integrált:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x - 4\int e^x \cdot \cos^2 x \, \mathrm{d}x + 2e^x \\ 5\int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x + 2e^x \\ \int e^x \cos^2 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{5}\left(e^x \cos^2 x + e^x \cdot \sin 2x + 2e^x\right) + c \end{aligned}$$

Megjegyzés: Kiindulhatunk a $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$ összefüggésből is, a gyorsabb megoldás érdekében.

29. Első pillantásra meglepőnek tűnhet, de a természetes alapú logaritmusfüggvény integrálját parciális integrálással kaphatjuk meg:

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \underset{g'}{1} \cdot \underset{f}{\ln x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c$$

Megjegyzés: Hasonlóan oldható meg például az $\operatorname{arctg} x$ és néhány további transzcendens függvény integrálása is.

30. A feladatot helyettesítéses integrálással oldhatjuk meg. A képletben szereplő új, t-vel jelölt ismeretlennek bármit választhatunk. Célunk nyilvánvalóan az, hogy az új kifejezés olyan legyen, amelyet könnyen tudunk integrálni. (Az alkalmas helyettesítés felismerésének képessége sok gyakorlással szerezhető meg, illetve bizonyos nevezetes helyettesítéseket is használhatunk lásd a 37. és 47. feladatokat.) A példában szereplő kifejezést tekintve legyen $t = x+2$. Ebből $x = \varphi(t) = t-2$ következik. Ennek deriváltja: $\varphi'(t) = 1$. Így:

$$\int \frac{x^3}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-2)^3}{t^4}\cdot 1\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3-6t^2+12t-8}{t^4}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{6}{t^2} + \frac{12}{t^3} - \frac{8}{t^4}\right)\mathrm{d}t = \ldots = \ln|t| + \frac{6}{t} - \frac{6}{t^2} + \frac{8}{3t^3} + c =$$
$$= \ln|x+2| + \frac{6}{x+2} - \frac{6}{(x+2)^2} + \frac{8}{3(x+2)^3} + c$$

33. A feladatban szereplő integrál esetében a $t = e^x$ helyettesítés tipikus.
Ekkor $x = \varphi(t) = \ln t$, míg $\varphi'(t) = \frac{1}{t}$.

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{t^4}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ldots$$

A törtet most olyan tagokra bontjuk szét, hogy mindegyik t^k vagy $\frac{f'}{f}$ alakú legyen, ezt t^k alakú kifejezések „leválasztásával” érjük el (ez szintén gyakran használt megoldási módszer – *polinomok osztása*).

$$\frac{t^3}{1+t} = \frac{t^2(1+t)-t^2}{1+t} = t^2 - \frac{t^2}{1+t} = t^2 - \frac{t(1+t)-t}{1+t} =$$
$$= t^2 - t + \frac{t}{1+t} = t^2 - t + \frac{t+1-1}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$$

Így az integrálunk:

$$\ldots = \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t| + c =$$
$$= \frac{e^{3x}}{3} - \frac{e^{2x}}{2} + e^x - \ln(1+e^x) + c$$

Másik megoldás:
A feladatot megoldhatjuk $t = 1+e^x$ $\left(x = \varphi(t) = \ln|t-1|,\ \varphi'(t) = \frac{1}{t-1}\right)$ helyettesítéssel is:

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(t-1)^4}{t}\cdot\frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t = \int \frac{t^3-3t^2+3t-1}{t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 3t - \ln|t| + c =$$
$$= \frac{(1+e^x)^3}{3} - \frac{3(1+e^x)^2}{2} + 3(1+e^x) - \ln(1+e^x) + c$$

A két megoldás különbözőnek tűnik. Azonban ha elvégezzük a második példában a négyzetre- illetve köbre emelést, akkor a két eredmény csak konstansban tér el (ami megengedett).

35. A feladat érdekessége, hogy itt a helyettesítés $t = \sqrt{e^x - 1}$, azaz az egész x-től függő kifejezés lesz az új ismeretlen. (Választhattuk volna e^x-et vagy $e^x - 1$-et is, de a fenti t-vel lesz a legegyszerűbb a megoldás.) Ekkor – rendezéssel – $x = \varphi(t) = \ln(t^2 + 1)$ és $\varphi'(t) = \frac{2t}{t^2+1}$.

$$\int \sqrt{e^x - 1}\ \mathrm{d}x = \int t \cdot \frac{2t}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2}{t^2+1}\ \mathrm{d}t = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\ \mathrm{d}t =$$
$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)\ \mathrm{d}t = 2\,(t - \operatorname{arctg} t) + c = 2\left(\sqrt{e^x-1} - \operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}\right) + c$$

37. Alkalmazva a $x = \sin t = \varphi(t)$ helyettesítést, $\varphi'(t) = \cos t$, így:

$$\int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\ \mathrm{d}t = \int \cos^2 t\ \mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)\ \mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x) + c =$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{2}{4}\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x) + c \overset{(**)}{=} \frac{1}{2}\left(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\right) + c$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben felhasználva, hogy $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$; a $(**)$-nál pedig azt, hogy $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

39. A példában egy racionális törtfüggvény szerepel (lásd elméleti rész 5/d.). Ellenőrizzük, hogy hány gyöke van a nevezőnek: $x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$. Két valós gyöke van: a -1 és a 3. Ez azt jelenti, hogy $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ írható. A megoldás elve a következő: A törtet a gyökök szerint két (vagy több) tört összegére bontjuk, amelyek mindegyike $\frac{\text{konstans}}{\text{lineáris kifejezés}}$ alakú, amelynek az integrálját már meg tudjuk határozni. Ehhez az ún. *parciális törtekre bontás* módszerét használjuk:

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{1}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \dots$$

Keressük az A és B ismeretleneket. Ehhez újra közös nevezőre hozzuk a törteket, majd a számlálóban rendezzük az x-től függő és az attól független tagokat.

$$\dots = \frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A+B)}{(x+1)(x-3)}$$

Az egyenlőség miatt az eredeti törtnek meg kell egyeznie a most kapott törttel, azaz a nevezők egyezése miatt a számlálóknak egyenlőeknek kell lennie:

$$1 = (A+B)x + (-3A+B) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A+B=0 \ \text{ és } \ -3A+B=1$$

Megoldva ezt az egyszerű kétismeretlenes egyenletrendszert $A = -\frac{1}{4}$ és $B = \frac{1}{4}$ a végeredmény, így

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x+1)(x-3)}\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{-\frac{1}{4}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{x-3}\right)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-3}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(-\ln|x+1| + \ln|x-3|\right) + c$$

40. A példa a 39. feladathoz hasonló. Itt azonban a nevezőben található másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív ($D = 4 - 24 = -20$), ezért nincsenek valós gyökei. Emiatt az előző szorzattá alakítás és a parciális törtekre bontás nem használható. Alakítsuk teljes négyzetté a nevezőt: $x^2 + 2x + 6 = x^2 + 2x + 1 + 5 = (x + 1)^2 + 5$, ezután pedig emeljük ki a kimaradt konstans részt, jelen esetben 5-öt:

$$\frac{1}{x^2+2x+6} = \frac{1}{x^2+2x+1+5} = \frac{1}{(x+1)^2+5} = \frac{1}{5\left(\frac{1}{5}(x+1)^2+1\right)} =$$
$$= \frac{1}{5\left(\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2(x+1)^2+1\right)} = \frac{1}{5\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}$$

Azt próbáltuk meg elérni – sikeresen –, hogy a tört hasonlítson az $\frac{1}{1+x^2}$-re, amelynek az integrálja $\operatorname{arctg} x$. Felhasználva a lineáris helyettesítés képletét:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}x+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+c = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{5}}+c$$

42. A 39. példában látottak mintájára bontsuk parciális törtekre az integrálandó függvényt:

$$\frac{5x+2}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)} =$$
$$= \frac{(A+B)x+(-4A+3B)}{(x+3)(x-4)}$$

Mivel a nevezők megegyeznek az egyenlőség bal- és jobb oldalán, így a számlálóknak is egyenlőnek kell lennie, ezért:

$$5x+2 = (A+B)x+(-4A+3B) \quad\Longleftrightarrow\quad A+B=5 \ \text{ és } \ -4A+3B=2$$

A fenti egyszerű egyenletrendszert megoldva, $A = \dfrac{13}{7}$ és $B = \dfrac{22}{7}$. Ebből pedig:

$$\int\frac{5x+2}{(x+3)(x-4)}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\frac{13}{7}}{x+3}+\frac{\frac{22}{7}}{x-4}\,\mathrm{d}x = \frac{13}{7}\ln|x+3|+\frac{22}{7}\ln|x-4|+c\,.$$

43. Vegyük észre, hogy az integrálandó törtet a következőképpen alakíthatjuk át:

$$\int\frac{x^3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x(x^2+1)-x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\left(x-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x^2-\ln(x^2+1)\right)+c$$

45. Alakítsuk át feladatban szereplő integrált:

$$\int\frac{x}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{x-1+1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{x-1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int\left(\frac{1}{x-1}+(x-1)^{-2}\right)\mathrm{d}x = \ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$$

46. A korábbi feladatokhoz hasonlóan elsőként ellenőrizzük, hogy a nevezőnek vannak-e valós gyökei. Az $x^2 - x + 1$ diszkriminánsa $D = 1 - 4 = -3$ negatív, ezért a parciális törtekre bontás módszerével nem lehet megoldani a feladatot. Emiatt a 40. példához hasonló törttel állunk szemben, ott azonban a számlálóban csak egy valós szám szerepelt, nem pedig egy elsőfokú kifejezés. Ezért a törtet két részre bontjuk úgy, hogy az egyik tag $\frac{f'}{f}$ alakú legyen:
$$\frac{2x+5}{x^2-x+1} = \frac{2x-1+6}{x^2-x+1} = \frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{6}{x^2-x+1}$$
A második tag már pontosan olyan típusú, mint amilyet a 39. példában is láttunk, így:
$$\int \frac{2x+5}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{6}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2-x+1) + 6\int \frac{1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2-x+1) + 6\int \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2-x+1) + 6\int \frac{1}{\frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2-x+1) + 6\cdot\frac{4}{3}\int \frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2-x+1) + 8\cdot\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c =$$
$$= \ln(x^2-x+1) + 4\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

47. Amennyiben az integrálandó kifejezés a sin vagy cos függvények racionális törtfüggvénye, érdemes a $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ helyettesítéssel élni. Kiszámítható, hogy ekkor:
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ , \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ , \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$
Ebből pedig:
$$\int \frac{1}{1+2\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+2\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{2}{3-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{(*)}{=}$$
$$= \int \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+t} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}-t}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{3}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{3}+t} - \frac{-1}{\sqrt{3}-t}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\ln\left|\sqrt{3}+t\right| - \ln\left|\sqrt{3}-t\right|\right) + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+t}{\sqrt{3}-t}\right| + c = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\sqrt{3}+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + c$$
A $(*)$-gal jelölt résznél felhasználva, hogy
$$\frac{2}{3-t^2} = \frac{A}{\sqrt{3}+t} + \frac{B}{\sqrt{3}-t} = \frac{A(\sqrt{3}-t)+B(\sqrt{3}+t)}{3-t^2} = \frac{(B-A)t + \sqrt{3}(A+B)}{3-t^2}$$
$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} B - A = 0 \\ \sqrt{3}(A+B) = 2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad A = B = \frac{1}{\sqrt{3}}\ .$$

48. Itt egyedül a $\sin^5 x$ kifejezés integrálása okoz nehézséget:

$$\int \sin^5 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \cdot \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \int \sin x \cdot \left(\sin^2 x\right)^2 \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \sin x(1-\cos^2 x)^2 \,\mathrm{d}x = \int \sin x(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \,\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\sin x - 2\sin x\cos^2 x + \sin x \cos^4 x\right) \,\mathrm{d}x$$
$$\int \left(\sin^5 x - 13e^x + \pi - 2x\right) \,\mathrm{d}x = -\cos x + 2\frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\cos^5 x}{5} - 13e^x + \pi x - x^2 + c$$

49. Kiindulva a 11. feladatból, lineáris helyettesítéssel:

$$\int \operatorname{tg}\frac{x}{2} \,\mathrm{d}x = \int \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + 0\right) \mathrm{d}x \overset{11.\text{ fel.}}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}} \ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + c = 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + c$$

50.

$$\int (x^2 - 2x + 10) \cdot e^{-3x} \,\mathrm{d}x = (x^2 - 2x + 10)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) - \int (2x-2)\left(-\frac{1}{3}e^{-3x}\right) \mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 10)e^{-3x} + \frac{2}{3}\int (x-1)e^{-3x} \,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 10)e^{-3x} + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}(x-1)e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} \,\mathrm{d}x\right) =$$
$$= \left(-\frac{1}{3}(x^2 - 2x + 10) - \frac{2}{9}(x-1) - \frac{2}{27}\right) e^{-3x} + c$$

Végeredmények

1. $-\frac{1}{x} + c$, 2. $\frac{x^2}{2} - x + c$, 5. $\frac{t^3}{3} - 3t^2 - 5t + c$, 6. $\frac{8\sqrt[8]{x^{15}}}{15} + c$, 9. $\frac{\ln|x^2-4x|}{2} + c$, 11. $-\ln|\cos x| + c$, 12. $\ln|1+\sin^2 x| + c$, 13. $\ln|4x^2 - 7x + 11| + c$, 14. $\frac{\ln(1+e^{2x})}{2} + c$, 17. $\frac{2}{3}\sqrt{(3+2x^2)^3} + c$ 18. $-\frac{1}{2(1+x^2)} + c$, 19. $\frac{3\sqrt[3]{8x^2+27}}{16} + c$, 20. $-\sqrt{1-x^2} + c$, 21. $\frac{\sin^4 x}{4} + c$, 23. $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$, 24. $-x\cos x + \sin x + c$, 28. $-\frac{e^{-x}}{2}(\cos x + \sin x) + c$, 31. $t = \sqrt{x+1}$ helyettesítéssel $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1} + c$, 32. $-\frac{1}{e^x+1} + c$, 34. $t = \sqrt{x}$ helyettesítéssel $e^{\sqrt{x}}(2x - 4\sqrt{x} + 4) + c$, 36. $t = \operatorname{tg} x$ helyettesítéssel $\frac{\operatorname{tg}^2 x - \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1)}{2} + c$, 38. $\frac{\ln|1+x| - \ln|1-x|}{2} + c$, 41. $\ln|x^2 + 3x - 10| + c$, 44. $-\ln x + \frac{\ln|x+1| + \ln|x-1|}{2} + c$
51. $\frac{1}{2}\sin 2x - 2e^{-\frac{x}{2}} - \frac{1}{5}\ln\cos 5x + c$

2.10. Riemann-integrál, improprius integrál

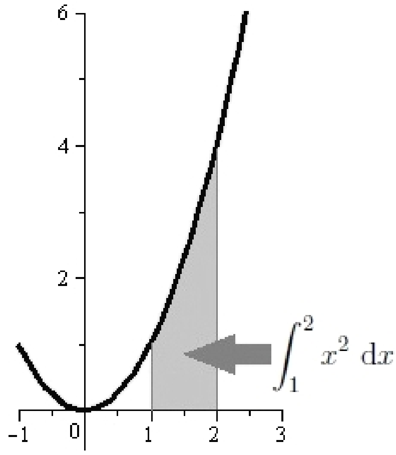
Rövid elméleti összefoglaló

Riemann-integrál

Egy $[a,b]$ intervallumon korlátos f függvény *határozott vagy Riemann-integrálja* az a szám, amelyet az ún. *Newton-Leibniz-szabállyal* az alábbi módon kaphatunk meg:

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = [F(x)]_{x=a}^{x=b} = F(b) - F(a) \ ,$$

ahol F az f függvény primitív függvénye.
A határozott integrál geometriai jelentése: az f függvény görbéje alatti *előjeles* terület az a és a b értékek között. – Például az $f(x) = x^2$ görbe alatti területe az 1 és 3 határok között: $\int_1^2 x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$.



A határozatlan integrálnál ismertetett nevezetes függvények primitív függvényeit itt is használhatjuk. Az integrálási szabályok közül két változást is észrevehetünk:

$$\int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x \,, \qquad \text{parciális integrálás}$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t \,, \qquad \text{helyettesítéses integrálás}$$

A gyakorlatban azonban sokkal egyszerűbb, ha a megszokott módon kiszámítjuk egy függvény határozatlan integrálját, és a kapott primitív függvénybe helyettesítjük az integrálás határait (ekkor a korábban szereplő c konstanst nem vesszük figyelembe).

Felhívjuk a figyelmet a következő, határozott integrálra vonatkozó szabályokra:

$$\int_a^a f(x) \, \mathrm{d}x = 0 \,,$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = -\int_b^a f(x) \, \mathrm{d}x \,,$$

$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \,, \qquad \text{ha} \;\; a < c < b \,.$$

A határozott integrálnak számos alkalmazási területe van. A görbe alatti terület kiszámításán kívül – a teljesség igénye nélkül – néhány további lehetséges alkalmazás: forgástestek térfogata, forgástestek felszíne, ívhossz-számítás stb.

A forgástestek térfogatának kiszámítását mutatja be a C és D feladat.

Improprius integrál

Célunk az, hogy a határozott integrál fogalmát kibővítsük olyan esetekre is, amikor az integrálás határaiban a függvény nem korlátos, vagy a határok végtelenek.

1. Az integrálás valamely határa a $\pm\infty$:

   (a) $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)\,\mathrm{d}x$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^b f(x)\,\mathrm{d}x$

   (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{C} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_C^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Az integrálás valamely határában a függvény nem korlátos:

   (a) ha az f értelmezve van az $[a, b[$ intervallumon, akkor
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$

   (b) ha az f értelmezve van az $]a, b]$ intervallumon, akkor
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

   (c) ha az f értelmezve van az $]a, b[$ intervallumon, akkor
   $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^C f(x)\,\mathrm{d}x + \int_C^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Ha a fenti határértékek nem léteznek, vagy $\pm\infty$ az eredményük, akkor azt mondjuk, hogy az adott improprius integrál nem létezik.

Feladatok

A. Számítsuk ki a következő integrálok értékét!

1. $\displaystyle\int_{-3}^{8}(x-6)\,\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_{-1}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x^3-6x)\,\mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_2^3\left(e^x+x^2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^3\frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{2x}{(x^2-100)^7}\,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^1\frac{e^{4x}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_{-10}^{30} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{ ha } f(x)=\begin{cases}-1, & \text{ha } x\le 0\\ 2x, & \text{ha } x>0\end{cases}$

9. $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \text{ ha } f(x)=\begin{cases}-4, & \text{ha } x<1\\ 3, & \text{ha } x=1\\ -2, & \text{ha } x>1\end{cases}$

10. $\displaystyle\int_0^4 |x-2|\ \mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int_{-10}^{10} |x|\cdot e^x\ \mathrm{d}x$

B.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{3}{x^2}\ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\ \mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln x\ \mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-2}\ \mathrm{d}x$

8. $\displaystyle\int_2^3 \ln(x-2)\ \mathrm{d}x$

9. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x+1}{(x+1)^2}\ \mathrm{d}x$ (összetett feladat – racionális törtfüggvény int. + improprius integrál + L'Hospital-szabály)

10. $\displaystyle\int_2^4 \ln|x-3|\ \mathrm{d}x$ (összetett feladat)

C. Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt{2-x}$ függvény első síknegyedbeli részének x-tengely körüli megforgatásával kapott test térfogatát!

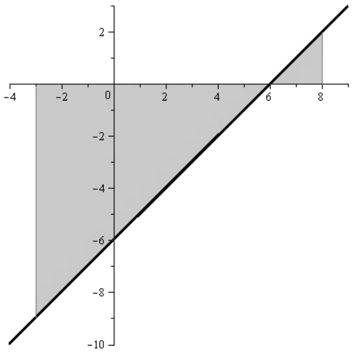
D. Számítsuk ki az $f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$ függvény második síknegyedbeli részének x-tengely körüli megforgatásával kapott test térfogatát!

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

A/1. Felhasználva, hogy $\int (x-6)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-6x$, az eredmény:

$$\int_{-3}^{8}(x-6)\ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}-6x\right]_{-3}^{8} = \frac{64}{2}-48-\left(\frac{9}{2}+18\right) = -38,5\ .$$

Amennyiben ábrázoljuk a függvény grafikonját, akár geometriai úton is kiszámíthatjuk a görbe alatti előjeles(!) területet:

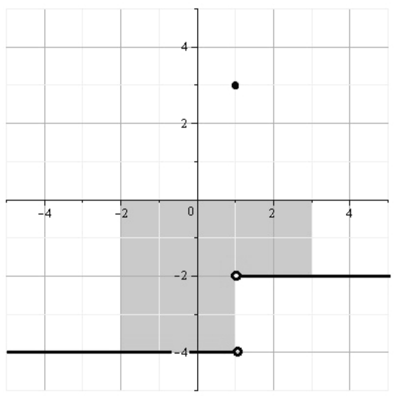


a nagyobbik háromszög negatív előjellel számítandó, míg a kisebbik pozitív előjellel, így a terület: $-\frac{81}{2}+\frac{4}{2}=-\frac{77}{2}$.

A/9. A függvény görbéje az $x=1$-ben törik, ezért az integrált itt ketté kell bontani, és a megfelelő határok között a megfelelő függvényt kell integrálni:

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{-2}^{1} -4\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} -2\,\mathrm{d}x = [-4x]_{-2}^{1} + [-2x]_{1}^{3} =$$
$$= -4-8-6+2 = -12-4 = -16$$

Ha ábrázoljuk az adott függvényt és a görbéje „alatti” területet -2 és 3 között:



(Vegyük észre, hogy szokásos geometriai területszámítással is ezt a végeredményt kapnánk.)

A/11. Elsőként bontsuk fel az abszolútértéket:

$$|x|\cdot e^x = \begin{cases} x\cdot e^x\,, & \text{ha } x\geq 0\,; \\ -x\cdot e^x\,, & \text{ha } x<0\,. \end{cases}$$

Látható, hogy ebben az esetben a függvény az $x=0$-ban törik, eszerint kell az integrálási határokat is felbontani, majd integrálni:

$$\int_{-10}^{10} |x|\cdot e^x\,\mathrm{d}x = \int_{-10}^{0} -x\cdot e^x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{10} x\cdot e^x\,\mathrm{d}x = \ldots =$$
$$= \left[-\left(xe^x-e^x\right)\right]_{-10}^{0} + \left[xe^x-e^x\right]_{0}^{10} =$$
$$= -\left(0-1+10e^{-10}-e^{-10}\right) + \left(10e^{10}-e^{10}-0+1\right) = -9e^{-10}+9e^{10}+2\,.$$

(Felhasználva a Határozatlan integrál című fejezet 22. feladatát.)

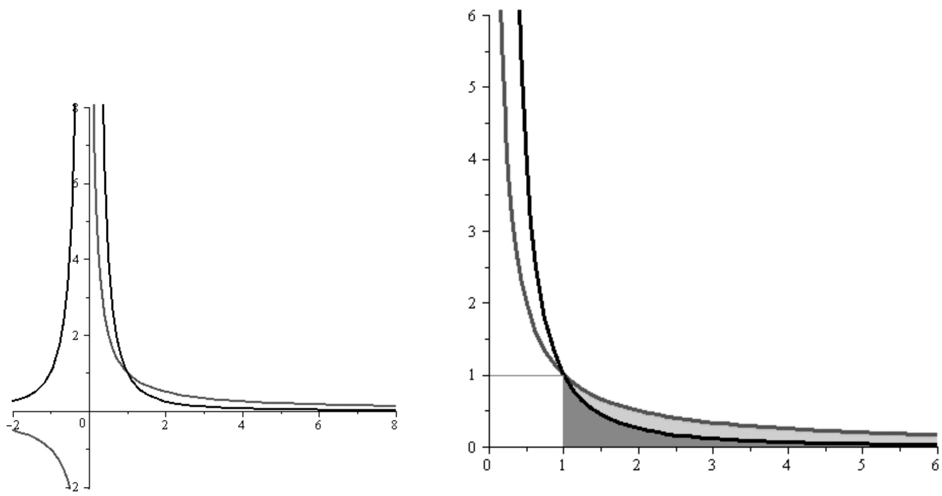
B/1. Látható, hogy az integrál felső határával „van probléma”, így az elméleti összefoglaló 1/a esetét használva:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\int_1^B \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}[\ln x]_1^B = $$
$$= \lim_{B\to+\infty}(\ln B - \ln 1) = \lim_{B\to+\infty}\ln B = +\infty$$

B/2. Az előző példa megoldási elvét követve:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\int_1^B \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{B\to+\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^B = \lim_{B\to+\infty}\left(-\frac{1}{B}+1\right) = 1$$

E két példa érdekessége, hogy első pillanatra nem látunk túl nagy különbséget a két függvény között az $[1,+\infty[$ intervallumon. Az $\frac{1}{x^2}$ azonban „gyorsabban simul” az x-tengelyhez, mint az $\frac{1}{x}$. (Az x-tengelyt egyik függvény görbéje sem érinti és nem is metszi át.) Így az $\frac{1}{x}$ görbe alatti területe $+\infty$, míg az $\frac{1}{x^2}$ görbe alatti területe pontosan 1.



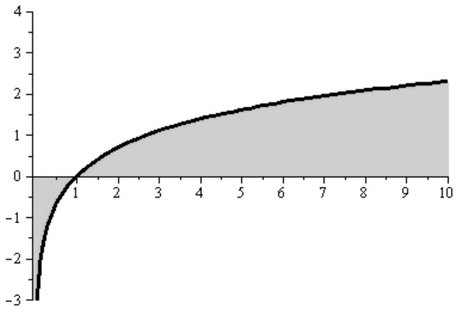
B/4. Ebben a példában az integrál alsó határát kell alakítani (1/b):

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}\int_A^0 e^x\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty}[e^x]_A^0 =$$
$$= \lim_{A\to-\infty}\left(e^0 - e^A\right) = \lim_{A\to-\infty}\left(1-e^A\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(1-e^{-A}\right) = \lim_{A\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^A}\right) = 1$$

B/5. Az elméleti rész 2/b pontja alapján:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{0+\varepsilon}^3 x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \ldots = \lim_{\varepsilon\to0+}\left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^3 = \lim_{\varepsilon\to0+}\left(2\sqrt{3}-2\sqrt{\varepsilon}\right) = 2\sqrt{3}$$

B/6. Itt az alsó és a felső határral is gond van, így egy tetszőleges (számunkra kényelmesen alkalmazható) helyen bontsuk ketté az integrált – legyen ez a hely az $x = 1$. (Ábrázoljuk a függvényt, hogy megsejthessük a végeredményt.)



$$\int_0^{+\infty} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \ln x \, \mathrm{d}x$$

Az első tagot 2/b, a második tagot 1/a szerint oldjuk meg. Számítsuk ki a két tagot külön-külön. Az első tag integrálja:

$$\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{0+\varepsilon}^1 \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[x \cdot \ln x - x\right]_\varepsilon^1 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln 1 - 1 - \varepsilon \ln \varepsilon + \varepsilon) \overset{(**)}{=} 0 - 1 - 0 + 0 = -1$$

A második tag integrálja:

$$\int_1^{+\infty} \ln x \, \mathrm{d}x = \lim_{B\to +\infty} \int_1^B \ln x \, \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \lim_{B\to +\infty} \left[x \cdot \ln x - x\right]_1^B =$$
$$= \lim_{B\to +\infty} (B \ln B - B - \ln 1 + 1) = \lim_{B\to +\infty} (B(\ln B - 1) + 1) = +\infty$$

A $(*)$ lépésnél a Határozatlan integrál című fejezet 29. feladatát használjuk; $(**)$ lépésnél pedig a L'Hospital-szabályt alkalmazzuk (lásd: A deriválás további alkalmazásai: L'Hospital-szabály 5. példa).
A végeredmény pedig:

$$\int_0^{+\infty} \ln x \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \ln x \, \mathrm{d}x = -1 + \infty = +\infty \ ,$$

azaz ez az improprius integrál nem létezik.

B/7. Vegyük észre, hogy $x \neq 2$, így az integrál az $x = 2$-ben nincs értelmezve. Ezért az $x = 2$ pontban kettébontjuk az integrált:

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_0^{2-\varepsilon} \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0+} \int_{2+\delta}^3 \frac{1}{x-2} \, \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\ln |x-2|\right]_0^{2-\varepsilon} + \lim_{\delta\to 0+} \left[\ln |x-2|\right]_{2+\delta}^3 =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln |2-\varepsilon-2| - \ln |0-2|) + \lim_{\delta\to 0+} (\ln |3-2| - \ln |2+\delta-2|) =$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0+} (\ln |-\varepsilon| - \ln |-2|) + \lim_{\delta\to 0+} (\ln 1 - \ln \delta) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln \varepsilon - \ln 2 - \lim_{\delta\to 0+} \ln \delta \quad \Longrightarrow \quad \text{nem létezik, mert } \lim_{\alpha\to 0+} \ln \alpha = -\infty$$

Ha ugyanis a részintegrálok bármely része divergens (itt például a $-\infty$-hez tart két tag is), akkor a kérdéses integrál nem létezik.
Megjegyzés: Létezik a fenti integrál úgynevezett Cauchy-féle főértéke, amelyet $\varepsilon = \delta$ választással kapunk. Így a Cauchy-féle főértéke egyenlő $-\ln 2$-vel.

B/9. Az előzőek alapján nyilvánvaló, hogy a függvény az alsó határban nincs értelmezve, ezért ismét egy improprius integrállal állunk szemben.
Oldjuk meg a feladatot először határozatlan integrálként:

$$\int \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \ln(x^2+2x+1) - \int (x+1)^{-2}\,\mathrm{d}x = \ln(x+1)^2 + \frac{1}{x+1} + c$$

Ebből pedig az integrál:

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \frac{2x+1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{-1+\varepsilon}^{1} \left(\frac{2x+2}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left[\ln(x+1)^2 + \frac{1}{x+1}\right]_{-1+\varepsilon}^{1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln 4 + \frac{1}{2} - \ln(-1+\varepsilon+1)^2 - \frac{1}{-1+\varepsilon+1}\right) =$$
$$= \ln 4 + \frac{1}{2} - \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \overset{(*)}{=} -\infty$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben a következő eredményt használtuk:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln \varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\ln \varepsilon^2 + \ln e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \ln\left(\varepsilon^2 \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) \overset{(**)}{=} +\infty$$

A $(**)$-ban pedig a L'Hospital-szabály segítségével az alábbit kapjuk:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\varepsilon^2 \cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^{-2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot (-\varepsilon^{-2})}{-2\varepsilon^{-3}} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot \varepsilon}{2} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}}}{\varepsilon^{-1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{e^{\frac{1}{\varepsilon}} \cdot (-\varepsilon^{-2})}{-\varepsilon^{-2}} = \frac{1}{2} \lim_{\varepsilon\to 0+} e^{\frac{1}{\varepsilon}} = +\infty$$

B/10. Mivel

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, & \text{ha } \ x \geq 3 \quad (x-3 \geq 0)\ , \\ 3-x, & \text{ha } \ x < 3 \quad (x-3 < 0)\ ; \end{cases}$$

ezért – az integrált kettébontva:

$$\int_2^4 \ln|x-3|\ \mathrm{d}x = \int_2^3 \ln(3-x)\ \mathrm{d}x + \int_3^4 \ln(x-3)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_2^{3-\varepsilon} \ln(3-x)\ \mathrm{d}x + \lim_{\delta\to 0+} \int_{3+\delta}^{4} \ln(x-3)\ \mathrm{d}x = \ldots$$

Parciális integrálással $\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x + c$ (ld. Határozatlan integrál fejezet 29. feladata), emiatt

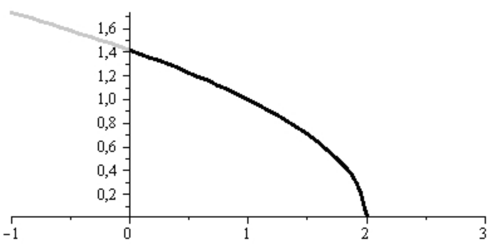
$$\int \ln(3-x)\ \mathrm{d}x = -\left((3-x)\ln(3-x) - (3-x)\right) + c =$$
$$= -(3-x)\ln(3-x) + 3 - x + c$$
$$\int \ln(x-3)\ \mathrm{d}x = (x-3)\ln(x-3) - (x-3) + c =$$
$$= (x-3)\ln(x-3) - x + 3 + c$$

Folytatva a feladatot:

$$\ldots = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(-(3-3+\varepsilon)\ln(3-3+\varepsilon)\right) + 3 - 3 + \varepsilon - \left((3-2)\ln(3-2) + 3 - 2\right) +$$
$$+ \lim_{\delta\to 0+} \left((4-3)\ln(4-3) - 4 + 3 - \left((3+\delta-3)\ln(3+\delta-3) - 3 - \delta + 3\right)\right) =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+} (-\varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon - 1) + \lim_{\delta\to 0+} (-1 - \delta\ln\delta + \delta) \overset{(*)}{=} -1 - 1 = -2\ ;$$

ahol a $(*)$ lépésben a L'Hospital-szabályt alkalmaztuk: $\lim\limits_{\alpha\to 0+} (\alpha\ln\alpha) = 0$. (Lásd L'Hospital-szabály 5. feladat.)

C. Ábrázoljuk először a függvényt. Az $f(x) = \sqrt{2-x}$ a $\sqrt{x}$-függvény transzformáltja: az y-tengelyre tükrözzük, majd $+2$-vel az x-tengely mentén eltoljuk.
Az első síknegyed azon pontok halmaza, amelyekre teljesül, hogy $x \geq 0$ és $y \geq 0$.



Az ábrán feketével jelölt „függvénydarab” forgatásával keletkező test térfogatára vagyunk kíváncsiak.
Mivel az x-tengely körül forgatunk, így a forgástest térfogatának képlete:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi \cdot (f(x))^2\ \mathrm{d}x\ ,$$

ahol x_1 és x_2 a forgatandó „függvényrész” alsó- és felső határa az x-tengelyen.
A példánkban az ábráról leolvasható, hogy $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$. A térfogat tehát:

$$V = \int_0^2 \pi \cdot \left(\sqrt{2-x}\right)^2\ \mathrm{d}x = \pi \int_0^2 (2-x)\ \mathrm{d}x =$$
$$= \pi \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \pi\,(4 - 2 - 0 + 0) = 2\pi$$

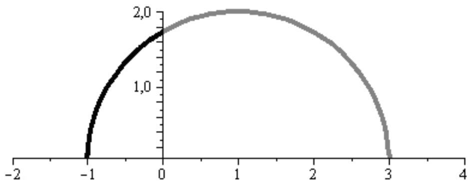
D. A függvény egy félkört ír le, ezt átalakítással könnyen láthatjuk:

$$f(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2} = \sqrt{3 - (-2x + x^2)} =$$
$$= \sqrt{3 - (x^2 - 2x + 1) + 1} = \sqrt{4 - (x-1)^2}$$

Átrendezéssel észrevehetjük, hogy $(1,0)$ középpontú, 2 sugarú kör x-tengely fölé eső részét kell ábrázolnunk:

$$(f(x))^2 = 4-(x-1)^2$$
$$(f(x))^2+(x-1)^2 = 4$$
$$(x-1)^2+y^2=4$$

Ebből a félkörből csak a második síknegyedbeli részre van szükségünk:



Az ábráról leolvashatóak az integrálás határai: -1 és 0. Így

$$V=\int_{-1}^{0}\pi\left(\sqrt{3+2x-x^2}\right)^2\ \mathrm{d}x=\pi\int_{-1}^{0}(3+2x-x^2)\ \mathrm{d}x=\ldots=\frac{5}{3}\pi$$

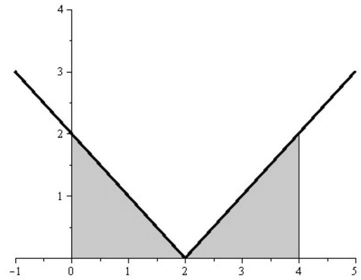
Megjegyzés: A feladatot akkor is meg tudjuk oldani, ha esetleg nem ismerjük fel, hogy az $f(x)$ egy félkört leíró függvény.
Tudjuk, hogy az x-tengely körül forgatunk és csak a második síknegyedet kell figyelnünk. Ez azt jelenti, hogy olyan görbedarabot keresünk, amelynek a két végpontja az x-tengely negatív részén és y-tengely pozitív részén van. (Elképzelhető, hogy a két végpont csak az x-tengelyre vagy csak az y-tengelyre esik; a harmadik eset, hogy a két végpont a két tengelyen van.)
Keressük tehát ezeket a végpontokat: Határozzuk meg elsőként a függvény zérushelyeit – azokat a pontokat, ahol a függvény metszi az x-tengelyt:

$$\sqrt{3+2x-x^2}=0$$
$$3+2x-x^2=0$$
$$x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{-2}=\frac{2\mp 4}{2}=1\mp 2$$
$$x_1=-1 \ \text{ és } \ x_2=3$$

A két zérushelyből az $x_1=-1$ az egyik keresett végpont, mivel a -1 az x-tengely negatív részében van. Ugyanilyen gondolatmenettel látható, hogy az $x_2=3$ „nem jó”.
Az a tény, hogy egy megfelelő végpont van az x-tengelyen jelzi, hogy a másik végpont biztosan az y-tengely pozitív részében van. Az y-tengely pontjait az $x=0$ egyenlet írja le. Jelenleg nincs is szükség arra, hogy pontosan megmondjuk ennek a pontnak a „magasságát”, hiszen az integráláshoz elegendő az $x=0$ feltétel.
Megkaptuk tehát, hogy az integrálás határai -1 és 0 – innen a feladat a fentiek szerint folytatható.

Végeredmények

(A) 2. $\frac{\pi^3+1}{3}$, 4. $e^3 - e^2 + \ln 3 - \ln 3 + \frac{19}{3}$, 6. 0, 7. a Határozatlan integrál című fejezet 33. feladata alapján: $\frac{e^3}{3} - \frac{e^2}{2} + e - \ln(1+e) + \ln 2 - \frac{5}{6}$, 8. 890, 10. 4 (segítségül szolgálhat az alábbi ábra)



(B) 3. 3, 8. −1

2.11. Differenciálegyenletekről röviden

Rövid elméleti összefoglaló

1. **Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenlet:**

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$$

A differenciálegyenlet megoldása a következő:
Helyettesítsünk $y(x)$ helyére y-t, és $y'(x)$ helyére $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$-et. Ekkor

$$\begin{aligned} y'(x) &= f(x) \cdot g(y(x)) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= f(x) \cdot g(y) \\ \frac{1}{g(y)}\ \mathrm{d}y &= f(x)\ \mathrm{d}x \\ \int \frac{1}{g(y)}\ \mathrm{d}y &= \int f(x)\ \mathrm{d}x \end{aligned}$$

írható, és a kapott egyenlőségből már kifejezhető az $y(x)$ függvény.

2. **Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenlet:**

$$y'(x) + f(x) \cdot y(x) = g(x)$$

A differenciálegyenlet megoldása 3 főbb lépésből áll:
1. lépés: Homogén rész megoldása, azaz az $y'(x) + f(x)y(x) = 0$ differenciálegyenlet megoldása, amelyet $\varphi_0(x)$-szel jelölünk.
Ekkor $\varphi_0(x) = c_0 \cdot e^{-\int f(x)\ \mathrm{d}x}$ és legyen $c_0 := 1$, így $\varphi_0(x) = e^{-\int f(x)\ \mathrm{d}x}$.
2. lépés: Konstansvariálás módszere, azaz egy $\varphi_p(x) = c(x) \cdot \varphi_0(x)$ partikuláris megoldás akarunk meghatározni úgy, hogy megkeressük a $c(x)$ függvényt.

A $\varphi_p(x)$-et az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve $c(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$ -hez jutunk, ezzel a $\varphi_p(x)$ partikuláris megoldást is fel lehet írni.
3. lépés: Az összes megoldás felírása $y(x) = c \cdot \varphi_0(x) + \varphi_p(x)$ alakban.
Az első két lépés eredményeit behelyettesítve, az összes megoldást megadja a következő képlet:

$$y(x) = \left(c + \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) \cdot e^{-\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Megjegyzés: Szétválasztható változójú differenciálegyenletre vezethető vissza az alábbi két típusú differenciálegyenlet is:
a) $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$ (ún. változóban homogén) differenciálegyenlet, ahol $y(x) := u(x)\cdot x$ választással $u(x)$-re szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk.
b) $y'(x) = f(ax+by(x)+d)$ differenciálegyenlet, ahol $z(x) := ax+by(x)+d$ választással $z(x)$-re már szétválasztható változójú a differenciálegyenlet.

Cauchy-feladat (kezdeti érték probléma): Egy-egy differenciálegyenletnek általában végtelen sok megoldása van, azaz végtelen sok függvényt – mint görbét – kapunk megoldásként. Ha ezek közül ki szeretnénk választani egy speciálisat, amelyre teljesül, hogy $y(x_0) = y_0$ (vagyis az (x_0, y_0) ponton átmenő görbét keressük), akkor beszélünk Cauchy-feladatról.

Feladatok

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1. (Szétválasztható változójú differenciálegyenletek)

   (a) $y'(x) = \dfrac{5x}{7y(x)}$
   (b) $y'(x) = k \cdot y(x)$
   (c) $y'(x) = 3y(x)(1-4x)$
   (d) $y'(x) = e^{y(x)-x}$
   (e) $x - y^2(x)y'(x) = 0$
   (f) $y^3(x)y'(x) = 1 + x + x^2$
   (g) $y'(x)\sin^2 x - y(x)\ln(y(x)) = 0$
   (h) $y'(x) = 2xy(x)$ és $y(0) = 1$
   (i) $y'(x) = 3x^2y^2(x)$ és $y(0) = \dfrac{1}{2}$
   (j) $y'(x) = 4x\sqrt{y(x)}$ és $y(1) = 1$
   (k) $y'(x) = 1 + y(x) + x^2 + y(x)x^2$ és $y(0) = 9$

2. (Elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletek)

   (a) $y'(x) + y(x) = e^x$

(b) $xy'(x) + y(x) = x$

(c) $y'(x) - \frac{5}{x}y(x) = 4$

(d) $y'(x) - y(x) = \sin x$

(e) $y'(x) - \frac{1}{1-x}y(x) = \cos x$

(f) $xy'(x) - y(x) = x + 2$ és $y(1) = 3$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/k Az egyenlet megoldásához elsőként rendezzük az egyenletet a csak x-től és a csak $y(x)$-től függő tagok szerint:

$$y'(x) = 1 + y(x) + x^2 + y(x)x^2$$
$$y'(x) = (1 + y(x)) + x^2(1 + y(x))$$
$$y'(x) = (1 + y(x))\left(1 + x^2\right)$$

Olyan alakúra hoztuk a differenciálegyenletet, amelyből valóban látható, hogy szétválasztható változójú, azaz $y'(x) = f(x) \cdot g(y(x))$ alakú. A konkrét egyenletünkben az $f(x) = 1 + x^2$, míg $g(y(x)) = 1 + y(x)$.
Helyettesítsünk az elméleti rész útmutatója szerint:

$$y'(x) = (1 + y(x))\left(1 + x^2\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + y)\left(1 + x^2\right)$$

Rendezzük át az egyik oldalra csak az x-től függő, a másik oldalra az y-tól függő tagokat, és integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{1+y}\ \mathrm{d}y = \left(1 + x^2\right)\ \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{1}{1+y}\ \mathrm{d}y = \int \left(1 + x^2\right)\ \mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálásokat, az y kifejezhető az x segítségével, és megkapjuk a keresett $y(x)$ függvényt:

$$\ln(1 + y) = x + \frac{x^3}{3} + c \qquad (c \text{ a mindkét oldalon fellépő konstansok különbsége})$$
$$1 + y = e^{x + \frac{x^3}{3} + c}$$
$$y(x) = e^{x + \frac{x^3}{3} + c} - 1$$

Megkaptuk tehát a differenciálegyenlet összes megoldását.
A feladat megoldása itt fejeződne be, ha nem lenne kezdeti feltétel.
A példánk egy kezdeti érték probléma (vagy Cauchy-feladat), és az abban szereplő kezdeti feltétel: $y(0) = 9$. Ez annyit jelent, hogy az összes megoldásból keressük

azt a megoldást, amelyre még ez a plusz feltétel is teljesül.
A megoldás általános alakjába helyettesítsük be a kezdeti feltételt:

$$\begin{aligned} 9 = y(0) &= e^{0+\frac{0^3}{3}+c} - 1 \\ 9 &= e^c - 1 \\ 10 &= e^c \\ \ln 10 &= c \end{aligned}$$

A c konstansra konkrét értéket kaptunk, így a végtelen sok megoldásból megkaptuk azt az egy megoldást, amelyre még a kezdeti feltétel is teljesül.
A kezdeti érték feladat megoldása: $y(x) = e^{x+\frac{x^3}{3}+\ln 10} - 1$.
Megjegyzés: Az, hogy a megoldásunk helyes, könnyen ellenőrizhető. Helyettesítsük be a kapott $y(x)$ függvényt az eredeti egyenletbe. Amennyiben azonosságot kapunk, úgy a megoldás jó. Nézzük meg az általános megoldást:

$$\begin{aligned} y'(x) &= (1 + y(x))\left(1 + x^2\right) \\ \left(e^{x+\frac{x^3}{3}+c} - 1\right)' &= \left(1 + e^{x+\frac{x^3}{3}+c} - 1\right)\left(1 + x^2\right) \\ e^{x+\frac{x^3}{3}+c} \cdot \left(1 + x^2\right) &= e^{x+\frac{x^3}{3}+c} \cdot \left(1 + x^2\right) \end{aligned}$$

2/c A példában szereplő differenciálegyenlet $y'(x) + f(x)y(x) = g(x)$ alakú, ahol $f(x) = -\frac{5}{x}$ és $g(x) = 4$.
Első lépésként oldjuk meg a homogén részt, azaz az $y'(x) - \dfrac{5}{x}y(x) = 0$ egyenletet. Ez egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet, és a megoldása:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{5}{x}y(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{5}{x}y \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int \frac{5}{x}\,\mathrm{d}x \\ \ln y &= 5\ln x + c \\ y(x) &= e^{5\ln x + c} = e^{5\ln x} \cdot e^c \end{aligned}$$

Az elméleti részt tekintve a homogén rész megoldását $\varphi_0(x)$-szel jelöljük, és a hozzá tartozó c_0 konstansszorzót 1-nek vesszük. A jelenlegi feladatban $c_0 = e^c$ (ezt most 1-nek tekintjük), így

$$\varphi_0(x) = e^{5\ln x} = x^5 \ .$$

Második lépésben a konstansvariálás módszerével egy partikuláris megoldást keresünk, amelynek alakja $\varphi_p(x) = c(x) \cdot \varphi_0(x)$. A $c(x)$ függvény a képlet szerint:

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{\int f(x)\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x$$

$$c(x) = \int 4 \cdot e^{\int -\frac{5}{x}\ \mathrm{d}x}\ \mathrm{d}x = \int 4 \cdot e^{-5\ln x}\ \mathrm{d}x = \int 4 \cdot x^{-5}\ \mathrm{d}x = 4 \cdot \frac{x^{-4}}{-4} = -\frac{1}{x^4}$$

Ezt felhasználva, a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\varphi_p(x) = c(x) \cdot \varphi_0(x) = -\frac{1}{x^4} \cdot x^5 = -x$$

Utolsó lépésként az összes megoldást felírhatjuk $y(x) = c \cdot \varphi_0(x) + \varphi_p(x)$ alakban, ezért a differenciálegyenlet megoldása:

$$y(x) = c \cdot x^5 - x$$

Végeredmények

1/a $y(x) = \sqrt{\frac{1}{7}(5x^2 + 2c)}$, 1/b $y(x) = e^{k(x+c)}$, 1/c $y(x) = e^{3x-6x^2+3c}$, 1/d $y(x) = -\ln(e^{-x} + c)$, 1/e $y(x) = \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2} + 3c}$, 1/f $y(x) = \sqrt[4]{4\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c\right)}$, 1/g $y(x) = e^{e^{-\operatorname{ctg} x + c}}$, 1/h $y(x) = e^{x^2}$, 1/i $y(x) = \frac{1}{2-x^3}$, 1/j $y(x) = x^4$ vagy $y(x) = (x^2-2)^2$
2/a $y(x) = ce^{-x} + \frac{e^x}{2}$, 2/b $y(x) = \frac{c}{x} + \frac{x}{2}$, 2/d $ce^x - \frac{\cos x + \sin x}{2}$,
2/e $\frac{1}{x-1}(c + x\sin x + \cos x - \sin x)$, ha $x \geq 1$ és $\frac{1}{1-x}(c - x\sin x - \cos x + \sin x)$, ha $x < 1$; 2/f $y(x) = 5x + x\ln x - 2$

3. fejezet

Többváltozós függvények analízise, vektoranalízis

3.1. Kétváltozós függvények parciális deriváltjai

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy függvény. Ha az f függvényt csak az x változó szerint deriváljuk (és az y-t konstansnak tekintjük), akkor az f függvény *első változója szerinti parciális deriváltját* kapjuk. Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial x}$ vagy $\partial_x f$. Ha az f függvényt csak az y változó szerint deriváljuk (és az x-et konstansnak tekintjük), akkor az f függvény *második változója szerinti parciális deriváltját* kapjuk. Jelölés: $\frac{\partial f}{\partial y}$ vagy $\partial_y f$.

Amennyiben a fenti parciális deriváltakat újra deriváljuk az x vagy az y változó szerint, úgy a függvény másodrendű parciális deriváltjait kapjuk. Jelölések: például $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ vagy $\partial_x \partial_y f$ vagy $\partial_{xy} f$.

Belátható, hogy $\partial_x \partial_y f = \partial_y \partial_x f$ *(Young-tétel).*

Feladatok

1. Határozzuk meg a következő függvények összes első- és másodrendű parciális deriváltját!

   (a) $f(x, y) = x^4 - 3x + 2y^2 + y + 13x^2 y - 15$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x} - \sin y + xy$

   (c) $f(x, y) = 5x \cos y - e^y + \ln x - 22$

   (d) $f(x, y) = (3x - 2)^2 (4y + 1)^3$

   (e) $f(x, y) = e^{7x} y + \ln(13y) - x + \cos \pi$

   (f) $f(x, y) = y(3 - x)^2 + \cos 2x - 8 \sin^2 y$

2. Határozzuk meg a következő függvények x és y szerinti parciális deriváltját!

   (a) $f(x, y) = xy \cos(x^2 y^2)$

   (b) $f(x, y) = e^{x^2 + y^2 - 1}$

   (c) $f(x, y) = (x^3 - 2x^2 y + y^2)^7$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/c A feladatban megadott függvény: $f(x,y) = 5x\cos y - e^y + \ln x - 22$.
Számítsuk ki először az x változó szerinti parciális deriváltat. Ekkor az x szerint a szokásos szabályok szerint deriválunk, az y-t (és így a $\cos y$-t és $\ln y$-t is) konstansnak tekintjük.

$$\partial_x f = 5\cos y - 0 + \frac{1}{x} - 0 = 5\cos y + \frac{1}{x}$$

Segítségképpen a fenti deriválást egyváltozós esetre „lefordíthatjuk" (ahol c tetszőleges valós szám):

$$(5x\cos c - e^c + \ln x - 22)' = 5\cos c + \frac{1}{x}$$

Ugyanilyen logikával határozhatjuk meg az y szerinti parciális deriváltat:

$$\partial_y f = -5x\sin y - e^y$$

Ismét tekinthetjük az f-et egy (y-tól függő) egyváltozós függvénynek (az x-et pedig egy c konstansra „cseréljük"):

$$(5c\cos y - e^y + \ln c - 22)' = -5c\sin y - e^y$$

A másodrendű parciális deriváltakat hasonló elv szerint kell felírni – a $\partial_x f$, illetve $\partial_y f$ függvényeket újra deriváljuk x vagy y szerint:

$$\begin{aligned}
\partial_x\partial_x f &= \partial_x\left(5\cos y + \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\\
\partial_x\partial_y f &= \partial_x\left(-5x\sin y - e^y\right) = -5\sin y\\
\partial_y\partial_x f &= \partial_y\left(5\cos y + \frac{1}{x}\right) = -5\sin y\\
\partial_y\partial_y f &= \partial_y\left(-5x\sin y - e^y\right) = -5x\cos y - e^y
\end{aligned}$$

Látható, hogy – a Young-tétel miatt – $\partial_x\partial_y f = \partial_y\partial_x f$.

Végeredmények

1/a) $\partial_x f = 4x^3 - 3 + 26xy$, $\partial_y f = 4y + 1 + 13x^2$, $\partial_x\partial_x f = 12x^2 + 26y$, $\partial_x\partial_y f = 26x$, $\partial_y\partial_y f = 4$; 1/b) $\partial_x f = \frac{1}{2\sqrt{x}} + y$, $\partial_y f = -\cos y + x$, $\partial_x\partial_x f = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$, $\partial_x\partial_y f = 1$, $\partial_y\partial_y f = \sin y$; 1/d) $\partial_x f = (18x-12)(4y+1)^3$, $\partial_y f = 12(3x-2)^2(4y+1)^2$, $\partial_x\partial_x f = 18(4y+1)^3$, $\partial_x\partial_y f = 12(18x-12)(4y+1)^2$, $\partial_y\partial_y f = 96(3x-2)^2(4y+1)$; 1/e) $\partial_x f = 7e^{7x}y - 1$, $\partial_y f = e^{7x} + \frac{1}{y}$, $\partial_x\partial_x f = 49e^{7x}y$, $\partial_x\partial_y f = 7e^{7x}$, $\partial_y\partial_y f = -\frac{1}{y^2}$; 1/f) $\partial_x f = -2y(3-x) - 2\sin 2x$, $\partial_y f = (3-x)^2 - 16\sin y\cos y$, $\partial_x\partial_x f = 2y - 4\cos 2x$, $\partial_x\partial_y f = -6 + 2x$, $\partial_y\partial_y f = -16(\cos^2 y - \sin^2 y)$
2/a) $\partial_x f = y\cos(x^2y^2) - 2x^2y^3\sin(x^2y^2)$, $\partial_y f = x\cos(x^2y^2) - 2x^3y^2\sin(x^2y^2)$; 2/b) $\partial_x f = e^{x^2+y^2-1}2x$, $\partial_y f = e^{x^2+y^2-1}2y$; 2/c) $\partial_x f = 7(x^3 - 2x^2y + y^2)^6(3x^2 - 4xy)$, $\partial_y f = 7(x^3 - 2x^2y + y^2)^6(-2x^2 + 2y)$

3.2. Kétváltozós függvények szélsőértéke

Rövid elméleti összefoglaló

Kétváltozós függvény (feltétel nélküli) szélsőértéke

Az f függvénynek egy (x_0, y_0) pontban akkor van *helyi szélsőértéke*, ha az alábbi két feltétel teljesül:

I. $\partial_x f(x_0, y_0) = 0$ és $\partial_y f(x_0, y_0) = 0$

II. $\left(\partial_x\partial_x f \cdot \partial_y\partial_y f - (\partial_x\partial_y f)^2\right)(x_0, y_0) > 0$

Amennyiben a II. feltételben szereplő kifejezés értéke 0, úgy az (x_0, y_0)-ban lehet szélsőérték, de nem biztos (további vizsgálatokra van szükség); míg ha ez a kifejezés negatív az adott pontban, úgy ott nem létezik szélsőérték.
Ha (x_0, y_0) pontban szélsőérték van, úgy az
helyi minimum, ha $\partial_x\partial_x f(x_0, y_0) > 0$; és *helyi maximum*, ha $\partial_x\partial_x f(x_0, y_0) < 0$.

Kétváltozós függvények feltételes szélsőértéke

Tegyük fel, hogy egy $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény szélsőértékeit keressük a $g(x, y) = 0$ feltétel mellett.
Lagrange-féle multiplikátorok módszere: Tekintsük az alábbi F háromváltozós függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot g(x, y)$$

Ennek az F függvénynek meghatározzuk a lehetséges szélsőértékhelyeit (a kétváltozós esettel analóg módon):

$$\partial_x F = 0 \quad \text{és} \quad \partial_y F = 0 \quad \text{és} \quad \partial_\lambda F = 0 \; .$$

Ha egy (x_0, y_0) pont és az ahhoz tartozó λ_0 érték megoldása a fenti egyenletrendszernek, akkor a λ_0-t visszahelyettesítve az $F(x, y, \lambda)$ függvénybe, egy új $\tilde{F}(x, y)$ kétváltozós függvényt kapunk. Ennek a függvénynek az (x_0, y_0) pont (az egyik) lehetséges szélsőértékhelye, így a problémát visszavezettük a feltétel nélküli esetre.

Megjegyzés: Ha a $g(x, y) = 0$ feltételből valamelyik ismeretlen kifejezhető (például y), akkor azt az f függvénybe visszahelyettesítve egy módosított $\tilde{f}$ egyváltozós(!) függvényt kapunk (például $\tilde{f}(x)$). Ekkor $\tilde{f}$ szélsőértékeit a korábban megismert módszer szerint kereshetjük meg.

Feladatok

1. Határozzuk meg az alábbi függvények szélsőértékhelyeit, és az abban felvett függvényértéket!

   (a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x - 2y - 1$
   (b) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$
   (c) $f(x, y) = (1 - x)^2 + (2 + y)^2 - 4$
   (d) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 7$
   (e) $f(x, y) = x^2y - 3xy + 3y^3$
   (f) $f(x, y) = x^2y - 3xy + 2y^4$

(g) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

(h) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

(i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$

2. Határozzuk meg az f függvény szélsőértékeit a megadott feltétel mellett!

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3$, ha $x + y = 2$

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy$, ha $2x - y = 1$

(c) $f(x,y) = x + y$, ha $x^2 + 3xy + 3y^2 = 3$

(d) $f(x,y) = 2x + 3y$, ha $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

(e) $f(x,y) = 10\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, ha $2x + 3y = 5$

3. Határozza meg a $2x^2 + 3y^2 = 1$ ellipszisbe írható maximális területű téglalap adatait!

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/d A szélsőérték kiszámításához az $f(x,y) = 2x^2+2xy+y^2-7$ függvény első- és második változója szerinti parciális deriváltjait, majd a másodrendű parciális deriváltjait kell meghatározni:

$$\partial_x f = 4x + 2y \qquad \partial_y f = 2x + 2y$$
$$\partial_x\partial_x f = 4 \qquad \partial_x\partial_y f = 2 \qquad \partial_y\partial_y f = 2$$

Az f függvénynek abban a pontban van szélsőértéke, ahol mindkét változó szerinti parciális deriváltja nulla és eleget tesz a $(*)$-gal jelölt feltételnek.
Az I. feltétel miatt:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x = y = 0$, így az egyetlen lehetséges(!) szélsőértékhely az $(x_0, y_0) = (0,0)$ pont.
A II. feltétel ellenőrzése:

$$\left(\partial_x\partial_x f \cdot \partial_y\partial_y f - (\partial_x\partial_y f)^2\right)(x_0,y_0) = 4 \cdot 2 - 4 = 4 > 0 \ ,$$

tehát a $(0,0)$ pont valóban szélsőérték.
Vizsgáljuk meg, hogy itt a függvénynek minimumát vagy maximumát kapjuk.
Ehhez a $\partial_x\partial_x f$-nek a $(0,0)$-beli értékét kell megnézni.
Az $\partial_x\partial_x f(0,0)$ (most speciálisan minden pontban) 4-gyel egyenlő, amely pozitív szám, ezért a $(0,0)$ pontban a függvények *minimuma* van.
Ebben a pontban a függvényérték: $f(0,0) = 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 - 7 = -7$.
Ellenőrizzük le, hogy a kapott minimumhely globális minimumhely-e. Definíció szerint, a $(0,0)$-ban akkor van a függvénynek globális minimuma, ha minden más (x,y) pontban felvett értéke nagyobb, mint ott felvett érték, azaz

$$\begin{aligned} f(x,y) &\geq f(0,0) \\ 2x^2 + 2xy + y^2 - 7 &\geq 2 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 - 7 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 - 7 &\geq -7 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

írható. A $(0,0)$ pont akkor lesz globális minimumhely, ha az utolsó egyenlőtlenség bármely (x,y)-ra teljesül – ezt kell most igazolni:

$$\begin{aligned}
2x^2+2xy+y^2 &\geq 0 \qquad \text{(emeljünk ki 2-t, és alakítsuk a kifejezést teljes négyzetté)}\\
2\left(x^2+xy+\frac{y^2}{2}\right) &\geq 0\\
x^2+xy+\frac{y^2}{2} &\geq 0\\
x^2+xy+\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{4} &\geq 0\\
\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{y^2}{4} &\geq 0
\end{aligned}$$

A kapott kifejezés mindkét tagja biztosan nem negatív, hiszen mindkettő egy valós szám négyzete. Az egyenlőtlenség tehát bármely (x,y) esetén teljesül, ezért a $(0,0)$ pont az f függvény globális minimumhelye.

1/f Az előző példa mintájára, először határozzuk meg a megfelelő parciális deriváltakat:

$$\partial_x f = 2xy-3y \qquad \partial_y f = x^2-3x+8y^3$$
$$\partial_x\partial_x f = 2y \qquad \partial_x\partial_y f = 2x-3 \qquad \partial_y\partial_y f = 24y^2$$

Ismét keressük a szélsőérték-helyeket. Az elméleti összefoglalóbeli két feltételt kell ellenőrizni.
Az I. feltétel szerint:

$$\begin{cases} 2xy-3y=0\\ x^2-3x+8y^3=0\end{cases}$$

Az első egyenletből y-t kiemelve $y(2x-3)=0$ -t kapunk. Ez pontosan akkor teljesül, ha A) $y=0$ vagy B) $x=\frac{3}{2}$.
A) Ha $y=0$, akkor a második egyenlet: $x^2-3x=0$, amelynek két gyöke az $x_1=0$ és $x_2=3$. Így ez az eset két lehetséges szélsőértékhelyet ad: $(0,0)$ és $(3,0)$.
B) Ha $x=\frac{3}{2}$, akkor a második egyenletbe helyettesítve $y=\sqrt[3]{\frac{9}{32}}$. Ebből az esetből egy harmadik lehetséges szélsőértékhelyet kaptunk: $\left(\frac{3}{2},\sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)$.
Ellenőrizzük le a II. feltételt mindhárom lehetséges szélsőérték-helyre:

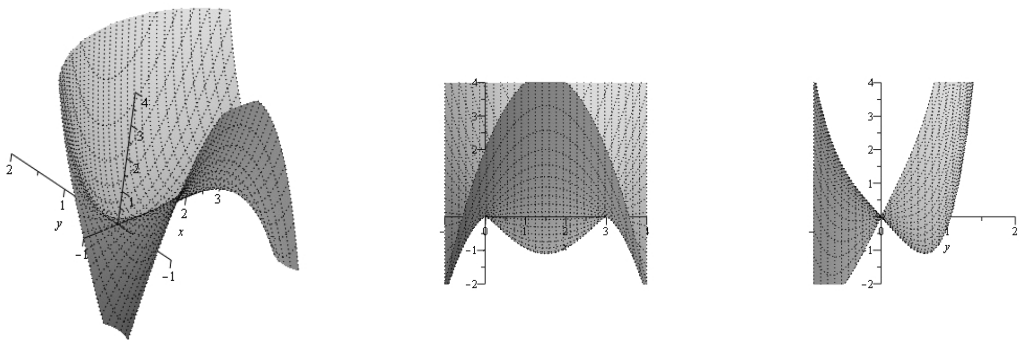
$$\begin{aligned}
(x_0,y_0)&: \quad \left(2y\cdot 24y^2-(2x-3)^2\right)(x_0,y_0)=\left(48y^3-(2x-3)^2\right)(x_0,y_0)\overset{?}{>}0\\
(0,0)&: \quad 48\cdot 0^3-(2\cdot 0-3)^2=-9\\
(3,0)&: \quad 48\cdot 0^3-(2\cdot 3-3)^2=-9\\
\left(\frac{3}{2},\sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)&: \quad 48\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)^3-\left(2\cdot\frac{3}{2}-3\right)^2=48\cdot\frac{9}{32}=\frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Látható, hogy csupán az utolsó lehetséges szélsőérték-hely lesz valódi szélsőértékhely, mivel az első kettő nem teljesíti a második feltételt.
A $\left(\frac{3}{2},\sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)$ minimum- vagy maximumhely?

Számítsuk ki, hogy a $\partial_x\partial_x f$ pozitív vagy negatív ebben a pontban:

$$\partial_x\partial_x f\left(\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right) = 2\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{32}} > 0\ ,$$

ezért a $\left(\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)$ pont a függvény lokális minimumhelye.
Az itt felvett függvényérték: $f\left(\frac{3}{2}, \sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\frac{9}{32}} - 3\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{32}} + 2\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{9}{32}}\right)^4 =$
$= -\frac{27}{16}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{32}}$.
Végül néhány ábra (egy tetszőleges és két oldalnézet) a feladatban szereplő függvényről:



2/b Az $f(x,y) = x^2+2y^2-xy$ függvény szélsőértékeit keressük a $g(x,y) = 2x-y-1 = 0$ feltétel mellett.
Írjuk fel először a Lagrange-féle függvényt:

$$F(x,y,\lambda) = x^2 + 2y^2 - xy + \lambda(2x - y - 1)$$

Határozzuk meg az F függvény lehetséges szélsőértékhelyeit. Ezeknek megkeresése a kétváltozós esethez hasonló. Írjuk fel F mindhárom változóra vonatkozó parciális deriváltját. Ennek a három kifejezésnek egyszerre nullának kell lennie – ez egy három egyenletből álló háromismeretlenes egyenletrendszert jelent:

$$\partial_x F = 2x - y + 2\lambda = 0$$
$$\partial_y F = 4y - x - \lambda = 0$$
$$\partial_\lambda F = 2x - y - 1 = 0$$

A második egyenletből a λ kifejezhető: $\lambda = 4y - x$. Ezt az első egyenletbe visszahelyettesítve $2x - y + 2(4y - x) = 7y = 0$, azaz $y = 0$ adódik. Tekintsük most a harmadik egyenletet és írjuk be az előbb kapott $y = 0$-t. Ekkor $2x - 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amiből $x = \frac{1}{2}$.
Így az egyetlen lehetséges (feltételes) szélsőértékhely az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pont. Ehhez a ponthoz tartozó λ érték: $\lambda = 4y - x = -\frac{1}{2}$.
A következő lépésben helyettesítsük vissza a kapott λ-t az F függvénybe, így egy $\tilde{F}$ kétváltozós függvényhez jutunk:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{2}\right) = x^2 + 2y^2 - xy - \frac{1}{2}(2x - y - 1)$$
$$\tilde{F}(x,y) = x^2 + 2y^2 - xy - x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

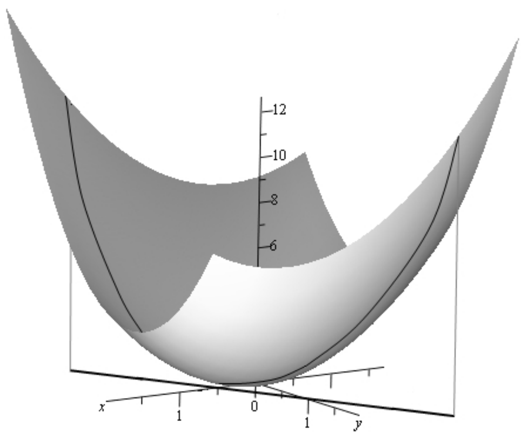
Határozzuk meg $\tilde{F}$ lehetséges szélsőértékhelyeit, amelyek között szerepelni fog az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pont is. Ekkor erről a pontról megállapítható az is, hogy minimum- vagy maximumhely. Ezzel a feltételes szélsőértékhely-keresést így visszavezettük feltétel nélküli esetre (ahol az I. és a II. feltételt kell ellenőrizni).
Az I. feltétel ellenőrzése:

$$\partial_x \tilde{F} = 2x - y - 1 = 0 \qquad \text{és } \partial_y \tilde{F} = 4y - x + \frac{1}{2} = 0$$

A részletes számolásokat mellőzzük (lásd 1. feladat kidolgozott példáit). Az $\tilde{F}$ függvény egyedüli lehetséges szélsőértékhelye valóban az $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pont.
A II. feltétel ellenőrzése:

$$\partial_x \partial_x \tilde{F} = 2 \qquad \partial_x \partial_y \tilde{F} = -1 \qquad \partial_y \partial_y \tilde{F} = 4$$
$$\left(\partial_x \partial_x \tilde{F} \cdot \partial_y \partial_y \tilde{F} - \left(\partial_x \partial_y \tilde{F}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2 \cdot 4 - (-1)^2 = 9 > 0$$

A $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ pont tehát valódi szélsőértékhelye $\tilde{F}$-nek, ezért valódi feltételes(!) szélsőértékhelye f-nek.
Mivel $\partial_x \partial_x \tilde{F}\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2 > 0$, ezért lokális minimumhelyet találtunk.
A függvényérték: $f\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4}$.
Érdekességképpen megmutatjuk, hogy a kapott eredmény szemléletesen mit jelent. Az f függvény egy paraboloidot ad a térben, míg a feltétel egy egyenes az $[x, y]$-koordinátasíkban. A feltételes szélsőérték-keresés jelen esetben arra kérdezett rá, hogy hol van szélsőértékhelye a paraboloidnak az $[x, y]$-beli egyenes felett. Az egyenes feletti rész egy parabolát „vág ki" a felületből, ezért a végeredmény – amely szerint egyetlen minimumhelyet találtunk – egybevág a szemlélettel.



2/c Az előző feladat mintájára oldhatjuk meg ezt a példát is. Írjuk fel a Lagrange-függvényt:

$$F(x, y, \lambda) = x + y + \lambda(x^2 + 3xy + 3y^2 - 3)$$

Keressük meg az F függvény szélsőértékeit:

$$\begin{aligned}
\partial_x F &= 1 + 2\lambda x + 3\lambda y = 0\\
\partial_y F &= 1 + 3\lambda x + 6\lambda y = 0\\
\partial_\lambda F &= x^2 + 3xy + 3y^2 - 3 = 0
\end{aligned}$$

Az első két egyenletből:

$$2\lambda x + 3\lambda y = 3\lambda x + 6\lambda y \overset{\lambda\neq 0}{\iff} 2x + 3y = 3x + 6y \iff x = -3y$$

(Ha $\lambda = 0$ teljesülne, akkor $F(x, y, \lambda) = f(x, y)$ lenne, azaz visszakapnánk az eredeti függvényt.)
A kapott eredményt a harmadik egyenletbe helyettesítve:

$$\begin{aligned}
(-3y)^2 + 3(-3y)y + 3y^2 - 3 &= 0\\
9y^2 - 9y^2 + 3y^2 - 3 &= 0\\
y^2 &= 1\\
y &= \pm 1 \qquad \Longrightarrow x = -3y = \mp 3
\end{aligned}$$

Két lehetséges feltételes szélsőértékhelyet kaptunk: A) $(-3, 1)$ és B) $(3, -1)$.
Az A) esetben – például az első egyenletet felhasználva – $\lambda = \frac{1}{3}$ adódik. Ekkor az F függvénybe a kapott λ-t visszahelyettesítve:

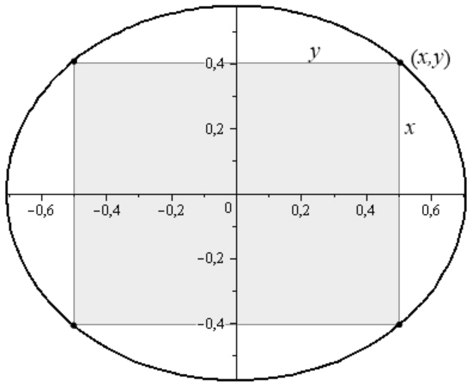
$$\tilde{F}_A(x, y) = x + y + \frac{1}{3}(x^2 + 3xy + 3y^2 - 3) = x + y + \frac{1}{3}x^2 + xy + y^2 - 1$$

Az $\tilde{F}_A$-nak keressük a szélsőértékeit (lásd feltétel nélküli eset). Ismét mellőzve az ismert módszer számolásának részleteit azt kapjuk, hogy $\tilde{F}_A$-nak a $(-3, 1)$ valódi minimumhelye, ezért a $(-3, 1)$ az f-nek valódi feltételes minimumhelye.
(A függvényérték: $f(-3, 1) = -2$).
A B) esetben hasonlóan járhatunk el. Ismét meghatározzuk – valamelyik egyenletbe való visszahelyettesítéssel – az erre az esetre vonatkozó λ értéket: $\lambda = -\frac{1}{3}$.
Ekkor az ehhez tartozó $\tilde{F}_B$ függvény:

$$\tilde{F}_B(x, y) = x + y - \frac{1}{3}(x^2 + 3xy + 3y^2 - 3) = x + y - \frac{1}{3}x^2 - xy - y^2 + 1$$

Az A) esettel teljesen analóg számolással kapjuk, hogy az $\tilde{F}_B$-nek $(3, -1)$ valódi maximumhelye, ezért ez a pont f-nek valódi feltételes maximumhelye.
(A függvényérték: $f(3, -1) = 2$.)

3. Az ellipszis origó középpontú, féltengelyei $\frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\frac{1}{\sqrt{3}}$ hosszúak. (A feladat megoldásához ezt nem is kell feltétlenül tudnunk.) Egy a és b oldalhosszúságú téglalap területe $T = ab$. Mivel az ellipszisbe szeretnénk beleírni a téglalapot, ezért annak mind a négy csúcsa illeszkedik az ellipszisre, azaz kielégíti az ellipszis egyenletét.



Az ábráról leolvasható, hogy a keresett téglalap oldalhosszúságai $2x$ és $2y$. A függvény, aminek a maximumát keressük a T-vel jelölt terület: $T(x, y) = 4xy$.
A feltétel pedig az, hogy az (x, y) pontok rajta legyenek az ellipszisen, ezért az $2x^2 + 3y^2 = 1$ egyenletnek eleget kell tenniük.
A feladatunk tehát az, hogy keressük a $T(x, y) = 4xy$ függvény maximumát a $g(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0$ feltétel mellett.
Felírva a Lagrange-féle F függvényt, és megkeresve annak lehetséges szélsőértékeit, a következő számolást kapjuk:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= 4xy + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 1) \\ \partial_x F &= 4y + 4\lambda x = 0 \\ \partial_y F &= 4x + 6\lambda y = 0 \\ \partial_\lambda F &= 2x^2 + 3y^2 - 1 = 0 \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x = \pm\frac{1}{2} \quad \text{és} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0,408$$

A 4 db lehetséges szélsőértékhely: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ és $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.
Hátra van még annak ellenőrzése, hogy ezen szélsőértékhelyek valódi szélsőértékhelyek-e és mind a négy maximumhely. Ez a 2. feladatnak megfelelően történik, így – gyakorlásképpen – az Olvasóra bízzuk.
Látható, hogy ez éppen a maximális területű téglalap 4 csúcsát adja, így a feladatot megoldottuk.

Végeredmények

1/a) $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{4}$ (globális) minimumhely, 1/b) nincs szélsőértékhelye, 1/c) $f(1, -2) = -4$ (globális) minimumhely, 1/e) $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ lokális minimumhely és $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ lokális maximumhely, 1/g) $f(0, 0) = 0$ lokális maximumhely, és $f\left(\pm\frac{1}{2}, \pm 1\right) = \frac{9}{16}$ 4 db (globális) minimumhely, 1/h) $f(1, 1) = f(-1, -1) = -2$ 2 db (globális) minimumhely és $f(0, 0) = 0$ pont lehetséges szélsőértékhely, de ezzel a vizsgálattal nem eldönthető, 1/i) nincs szélsőértékhelye

2/a) $f(1, 1) = 2$ feltételes minimumhely, 2/d) $f(9, 4) = 30$ feltételes minimumhely, 2/e) $f\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right) = 10\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ feltételes maximumhely

3.3. Kettős integrál

Rövid elméleti összefoglaló

Tekintsünk egy $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (kétváltozós) függvényt. Ennek a függvénynek az *integrál*ja az $[a,b] \times [c,d]$ tartományon:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Az $f(x,y)$ fenti integrálja a függvény $\mathbb{R}^3$-beli képe alatti térfogatot mutatja meg, az $[a,b] \times [c,d]$ téglalap fölött.

*Elsőfajú normáltartomány*on olyan ($\mathbb{R}^2$-beli) A tartományt értünk, amelyet „alulról" és „felülről" görbék, balról és jobbról (az y-tengellyel párhuzamosan) egyenesek határolnak. *Másodfajú normáltartomány* esetében a tartományt „balról" és „jobbról" határolják görbék, míg az x-tengellyel párhuzamosan egyenesek.

Feladatok

1. Számítsuk ki az alábbi integrálokat:

   a) $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,1]} xy\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   b) $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,2]} e^{x+y}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

   c) $\displaystyle\iint_{[a,b]\times[c,d]} xy^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

2. Integrálja az alábbi függvényeket az A tartományon:

   a) $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\qquad A = \left\{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\right\}$

   b) $\displaystyle\iint_A \cos(x+y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\qquad A = \{(x,y) \mid x \ge 0, y \ge 0, x+y \le \pi\}$

   c) $\displaystyle\iint_A (x^2+y^2+1)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\qquad A = \left\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ nx \ge y\right\}$

   d) $\displaystyle\iint_A r\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ $\qquad A = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le 2, -\pi \le \varphi \le \pi\}$

   e) $\displaystyle\iint_A r^2\sin\varphi\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ $\qquad A = \left\{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le \cos\varphi\right\}$

   f) $\displaystyle\iint_A x\sqrt{y^2-x^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\qquad A = \{0 \le x \le y, 1 \le y \le 2\}$

   g) $\displaystyle\iint_A (x+y+z)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\qquad A = \{(x,y,z) \mid 0 \le x \le y, 0 \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$

3. Számítsuk ki az $f(x,y) = x$ függvény integrálját a D tartományon, ahol D az $y = x^2$ görbe és az $y = x$ egyenes által határolt tartomány!

4. Számítsuk ki az $f(x,y) = y^2$ függvény integrálját a D tartományon, ahol D az $y = 2x$, az $y = 5x$ és az $x = 1$ egyenesek által határolt tartomány!

5. Számítsuk ki a következő kétváltozós függvények integrálját azon a véges síkrészen, amelyet az alábbi egyenletekkel megadott egyenesek zárnak közre:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$	$x = 0,\ y = 0,\ x + 2y = 2$
b) $f(x,y) = 3y^2 - x$	$x = 0,\ y = \frac{1}{2}x,\ y + x = 3$
c) $f(x,y) = 4xy - 3y^2$	$y - 2x = 2,\ y - x = 3,\ y = 6$
d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2 + 8}$	$y = x,\ y + x = 2,\ x = 0$

6. Számítsuk ki az alábbi kétváltozós függvények integrálját az adott A, B, C csúcspontú háromszögtartományon:

a) $f(x,y) = 3x^2 + 2xy$	$A = (-1,0),\ B = (1,0),\ C = (0,1)$
b) $f(x,y) = x^2 + xy$	$A = (0,0),\ B = (2,0),\ C = (1,1)$
c) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$	$A = (1,1),\ B = (2,3),\ C = (3,3)$
d) $f(x,y) = 2x + 3y + 1$	$A = (-1,-1),\ B = (2,-4),\ C = (1,3)$
e) $f(x,y) = \dfrac{3y^2}{x}$	$A = (1,1),\ B = (2,3),\ C = (3,3)$
f) $f(x,y) = \sin(x+y)$	$A = (0,0),\ B = (0,3),\ C = (-1,2)$
g) $f(x,y) = e^{2x-y}$	$A = (0,0),\ B = (1,-2),\ C = (2,-2)$

7. Integráljuk az alábbi kétváltozós függvényeket az adott egyenes és parabola által bezárt véges tartományon:

a) $f(x,y) = 2xy$	$y = x - 2,\ y^2 = x$
b) $f(x,y) = x + 2y$	$y = x + 2,\ y = x^2$

8. Határozzuk meg annak a síkrésznek a területét, amelyet az $y = x^2$ parabola és az $y = x + 2$ egyenes határol!

9. Határozzuk meg a $T\colon 1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$ téglalap fölötti és a $z = 3x + 4y$ sík alatti térrész térfogatát!

10. Határozzuk meg annak a tetraédernek a térfogatát, amelyet a $z = 6 - 2x + 3y$ egyenletű sík és a koordinátasíkok határolnak!

11. *Hármas integrál:* Integráljuk az $f(x,y,z) = 2xy$ függvényt azon a tartományon, amelyet az $x + y + z = 1$ egyenletű sík és a koordinátasíkok határolnak!

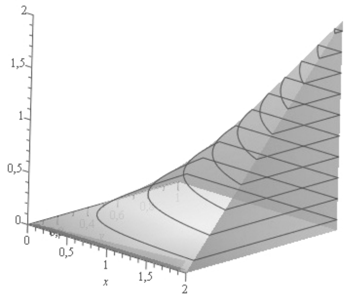
Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

(Minden esetben érdemes kis rajzot készíteni a tartományról, hogy az integrálás határait megkapjuk.)

1/a Ebben a példában egy 2 egység széles, 1 egység magas téglalapon integrálunk.

$$\iint_{[0,2]\times[0,1]} xy \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 xy \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^2 xy \ \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} y \right]_{x=0}^{x=2} \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\frac{2^2}{2} y - \frac{0^2}{1} y \right) \ \mathrm{d}y = \int_0^1 2y \ \mathrm{d}y = \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=1} = 1^2 - 0^2 = 1 \ .$$

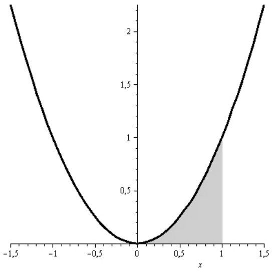


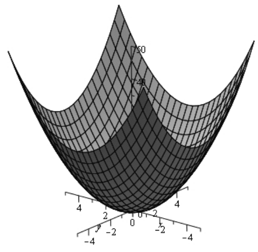
2/a Az integrálás határai az A tartomány definíciójában adottak. Az integrálás sorrendjére azonban figyelni kell, mivel az y integrálási határai az x-től függnek. Valójában az $y = x^2$ egyenletű parabola $x = 0$ és $x = 1$ közötti görberésze alatt lévő terület az intergálási tartomány.

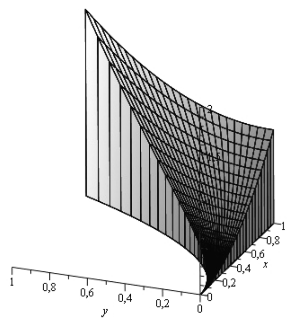
$$\iint_A (x^2 + y^2) \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) \ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=x^2} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) \ \mathrm{d}x = \left[\frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{3 \cdot 7} \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = \frac{26}{105} \ .$$

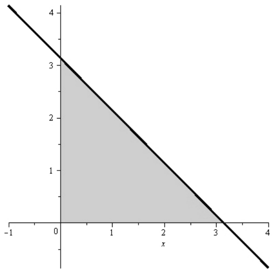
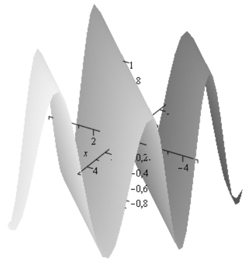
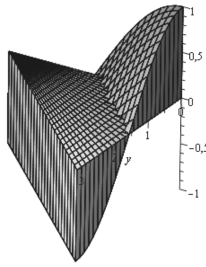
A következő szemléltető ábrákon látható az integrálási tartomány, a $z = x^2 + y^2$ egyenletű paraboloid (mint integrálandó függvény), valamint az előbb megkapott tartomány alatti részéhez tartozó térfogat.







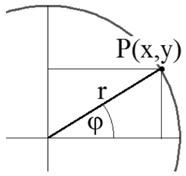
2/b *Útmutatás:* A feladat egyedüli nehézsége az integrálási határok megállapítása. Az $x + y \leq \pi$ egyenlőtlenség az $y = \pi - x$ egyenes alatti területre mutat. Így az y a 0 és a $\pi - x$ között mozog. Az x határai egyrészt a 0 (ez azonnal leolvasható), másrészt a π, mivel a fenti egyenes az x-tengelyt a π-ben metszi. Összefoglalva: $0 \leq x \leq \pi$ és $0 \leq y \leq \pi - x$.

2/c A nehézség szintén az integrálási határok felírása. Az A megadásából leolvasható, hogy a két határoló görbe egy origó középpontú, egységsugarú kör, illetve egy n meredekségű egyenes. Célszerű ilyenkor *polárkoordinátá*kkal felírni a körlemez pontjait (és az egyenes pontjait is).

Ha egy P pont koordinátái egy r sugarú körben x és y, akkor a pont polárkoodinátái (r, φ). A φ a P-be mutató vektor x-tengellyel bezárt szöge. A polárkoordináták kiszámítása tetszőleges $P(x, y)$ pont esetén:

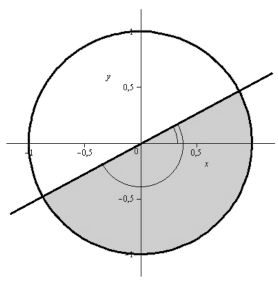
$$x = r \cdot \cos\varphi \ , \qquad y = r \cdot \sin\varphi \ .$$



Az új (polár)koordinátákra való áttéréskor *megváltoznak* az integrálás határai, ennek általános képlete:

$$\iint_A f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\bar{A}} f(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi) \cdot r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$$

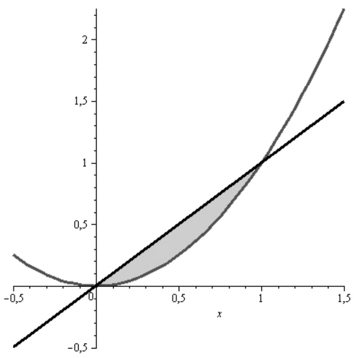
A feladat esetében az $x^2 + y^2 \leq 1$ feltétel azt jelenti, hogy az origó középpontú, egységsugarú körlemezt kell tekintenünk. Az $nx \leq y$ feltétel az (origón átmenő) $y = nx$ egyenes alatti területet jelenti. E két terület metszetére van szükség.



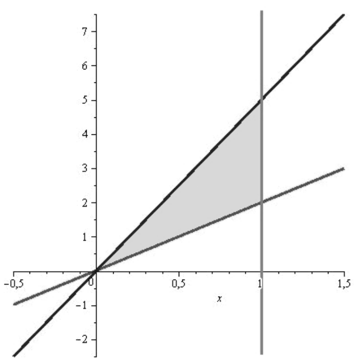
A polárkoordinátákra való áttérés miatt most az integrálási határokat NEM az x és y szerint állapítjuk meg, hanem az r sugár és φ szög szerint. Az r 0-tól 1-ig mehet (végigcsúszik az origótól a körlemez végéig). A φ szög egyik határa az egyenes x-tengellyel bezárt szöge, ezért meg kell állapítani, hogy mekkora az egyenes meredeksége. Az $y = mx + b$ általános (egyenes)egyenletből kapjuk, hogy a meredekség éppen n. Egy egyenes meredeksége, az egyenesnek az x-tengellyel bezárt szögének a tangense, ez itt $n = \operatorname{tg}\alpha$, azaz $\alpha = \operatorname{arctg} n$. Az egyenes a körből egy félkört metsz ki, így a másik integrálási határ φ számára: $\operatorname{arctg} n - \pi$.

$$\iint_A (x^2 + y^2 + 1)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\bar{A}} \left(r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi + 1\right) \cdot r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \iint_{\bar{A}} (r^2 + 1)r\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \iint_{\bar{A}} (r^3 + r)\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \int_{\operatorname{arctg} n - \pi}^{\operatorname{arctg} n} \int_0^1 (r^3 + r)\ \mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_{\operatorname{arctg} n - \pi}^{\operatorname{arctg} n} \left[\frac{r^4}{4} + \frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\varphi = \int_{\operatorname{arctg} n - \pi}^{\operatorname{arctg} n} \frac{3}{4}\ \mathrm{d}\varphi = \left[\frac{3}{4}\varphi\right]_{\varphi = \operatorname{arctg} n - \pi}^{\varphi = \operatorname{arctg} n} =$$
$$= \frac{3}{4}\operatorname{arctg} n - \frac{3}{4}(\operatorname{arctg} n - \pi) = \frac{3\pi}{4}\ .$$

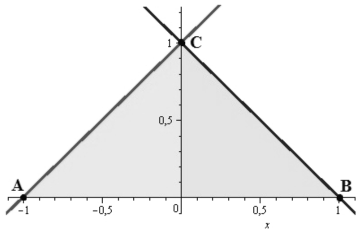
3. *Útmutatás:* Az integrálási határok megállapításához szükség van az egyenes és a parabola metszéspontjaira, ezek az $x = 0$ és $x = 1$. Az x számára az alsó és felső határ már adott. Az y számára az alsó határ a parabola, a felső az egyenes, így $x^2 \leq y \leq x$.



4. *Útmutatás:* A 3. feladathoz hasonló ez a példa. Vegyük észre, hogy a harmadik egyenes az $x = 1$-en átmenő függőleges egyenes. Így a három egyenes egy háromszöget ad meg. Az $y = 2x$ és $y = 5x$ átmegy az origón, így $x = 0$ az x számára alsó határ, míg az $x = 1$ egyenes zárja a háromszöget, ezért: $0 \leq x \leq 1$. Az y számára a két egyenes adja a határokat: $2x \leq y \leq 5x$.



6/a *Útmutatás:* Az A és B pontok által meghatározott egyenes az $y = x + 1$, míg a B és C pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = -x + 1$.



A háromszöget két kisebbre érdemes bontani: az AOC háromszögre és az OBC háromszögre (ahol O az origó) – azaz két elsőfajú normáltartományra. Az első háromszög esetén az integrál

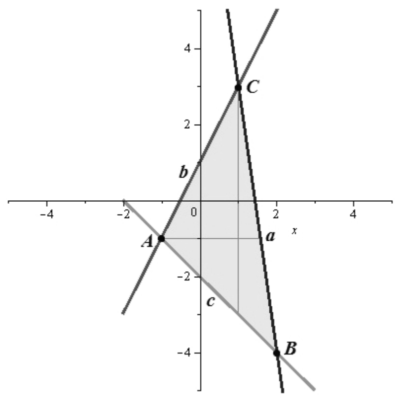
$$\int_{-1}^{0} \int_{0}^{x+1} (3x^2 + 2xy) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \ ;$$

a másik háromszögnél

$$\int_{0}^{1} \int_{0}^{-x+1} (3x^2 + 2xy) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \ .$$

A két integrál összege a feladat megoldása.
Egy másik megoldás lehet, ha az integrálási határok $0 \leq y \leq 1$ és $y-1 \leq x \leq 1-y$, így egyetlen integrállal megoldható a feladat (vagyis másodfajú normáltartományként tekintjük a háromszöget).

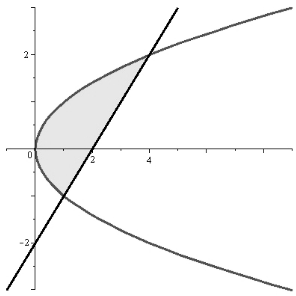
6/d *Útmutatás:* Az előző feladat mintájára a háromszög oldalegyenesei:
a: $y = -7x + 10$, b: $y = 2x + 1$ és c: $y = -x - 2$.



Ebben a feladatban mindenképpen fel kell bontani a háromszöget, így kapunk vagy két elsőfajú, vagy két másodfajú normáltartományt. Amennyiben két elsőfajú normáltartományra bontjuk a háromszöget, úgy a megoldáshoz a következő integrál(oka)t kell kiszámítani:

$$\int_{-1}^{1} \int_{-x-2}^{2x+1} (2x + 3y + 1) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \int_{-x-2}^{-7x+10} (2x + 3y + 1) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}x \ .$$

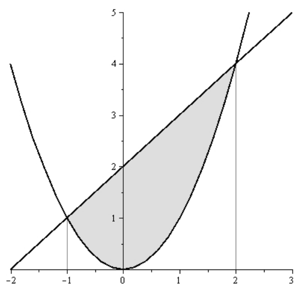
7/a *Útmutatás:* Egy jól megrajzolt ábra ismét megmutatja a helyes megoldáshoz vezető integrált:



(További segítség: Érdemes ezt a tartományt másodfajú tartományként kezelni.)

8. *Útmutatás:* Egy A síkrész területe kiszámítható a $\iint_A 1 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$ formula segítségével. Ebben az esetben a síkrészt elsőfajú normáltartományként felírva a keresett terület:

$$\int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} 1 \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$



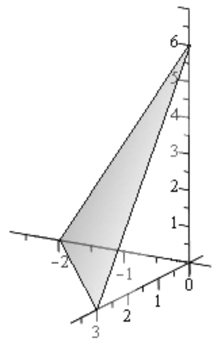
9. *Útmutatás:* Térfogat kiszámításhoz a

$$V = \iint_T f(x, y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

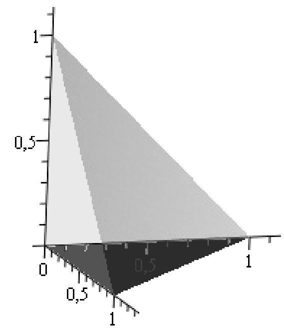
képletet kell használni. Az $f(x, y)$ függvény valójában a $z = 3x+4y$ (azaz $f(x, y) = 3x + 4y$)), a határok adottak, ezért:

$$V = \int_0^3 \int_1^2 (3x + 4y) \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \ .$$

10. *Útmutatás:* A tetraéder térfogata nem más, mint az $\iint_A (6 - 2x + 3y) \, \mathrm{d}A$ kettős integrál, ahol A a tetraéder $[x, y]$-koordinátasíkon lévő oldala.
A sík az x-tengelyt a 3-ban, az y-tengelyt a -2-ben metszi. Az A tartomány az origó, a $(3, 0)$ és a $(0, -2)$ pontok által alkotott háromszög. Ezt például elsőfajú normáltartományként felírva a határok: $0 \leq x \leq 3$ és $0 \leq y \leq \frac{2}{3}x - 2$ (felhasználva, hogy a sík $[x, y]$-koordinátasíkban fekvő egyenesét a $z = 0$ plusz feltétel jellemzi).



11. A feladatbeli tartomány egy V tetraéder (mint test), amelyet a következőképpen lehet jellemezni:



A tartomány felírásához használt módszer a kettős integrálnál megismert normáltartományok meghatározásának általánosítása. Meg fogjuk határozni x, y és z számára is a határokat.
Induljunk ki például az x határaiból. Az x a 0 és az 1 között mozoghat, ezért $0 \leq x \leq 1$.
Tekintsük az $[x, y]$-koordinátasíkot. Az y-t „alulról" az $y = 0$, míg „felülről" az $y = 1 - x$ egyenes határolja. (A felső határt a sík egyenletéből és a $z = 0$ plusz feltételből kapjuk.) Így $0 \leq y \leq 1 - x$.
(Eddig a pontig minden megegyezik a kettős integrálnál tanultakkal.)
A z „mozgását" alulról az $[x, y]$-koordinátasík (azaz a $z = 0$ egyenletű sík), felülről az $x + y + z = 1$ sík (azaz a $z = 1 - x - y$ sík) határolja. Emiatt z határai: $0 \leq z \leq 1 - x - y$.
Az integrál határainak felírása és a kiszámítási módszer a kettős integrállal analóg, így a számítások részletezését mellőzve:

$$\iiint_V 2xy \, \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} 2xy \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \ldots = \frac{1}{60}$$

Végeredmények

1. b) $e^3 - e^2 - e + 1$, c) $\frac{(b^2-a^2)(d^3-c^3)}{6}$
2. b) -2, d) 0, e) $\frac{1}{12}$, f) $\frac{5}{4}$, g) $\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{12}$

4. $\frac{117}{12}$

5. a) $\frac{5}{6}$, b) 17,5, c) $-42\frac{2}{3}$, d) $-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\ln 2$

6. a) $-\frac{1}{2}$, b) $\frac{3}{2}$, c) $\frac{9}{2}\ln 3-4\ln 2-1$, d) 3, e) $27\ln 3-28\ln 2-2$, f) $-\frac{1}{2}\sin 3+\frac{3}{2}\sin 1$, g) $\frac{e^6}{6}-\frac{e^4}{4}+\frac{1}{12}$

7. a) 11,25, b) 16,65

8. $\frac{9}{2}$

9. $\frac{63}{2}$

10. -6

3.4. Jacobi-mátrix. Gradiensvektor, iránymenti derivált

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen $f=(f^1,f^2,\dots,f^m)\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ függvény (koordinátafüggvényei: $f^1,f^2,\dots,f^m$). Ekkor az f függvény *deriváltja* az $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ pontban olyan f' lineáris leképezés, amelynek mátrixa ($\mathbb{R}^n$ és $\mathbb{R}^m$ kanonikus bázisaira vonatkozóan):

$$J_f(x_1,x_2,\dots,x_n):=\begin{pmatrix} \partial_{x_1}f^1(x_1,x_2,\dots,x_n) & \partial_{x_2}f^1(x_1,x_2,\dots,x_n) & \dots & \partial_{x_n}f^1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \partial_{x_1}f^2(x_1,x_2,\dots,x_n) & \partial_{x_2}f^2(x_1,x_2,\dots,x_n) & \dots & \partial_{x_n}f^2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{x_1}f^m(x_1,x_2,\dots,x_n) & \partial_{x_2}f^m(x_1,x_2,\dots,x_n) & \dots & \partial_{x_n}f^m(x_1,x_2,\dots,x_n) \end{pmatrix}$$

Ezt a mátrixot szokás az f függvény *Jacobi-mátrixá*nak is nevezni.

Legyen $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ függvény, $p\in\mathbb{R}^n$ tetszőleges pontja a függvénynek.
Az f függvény $p=(p_1,\dots,p_n)$ pontbeli *gradiensvektor*a a

$$\operatorname{grad} f(p):=(\partial_{x_1}f(p_1,\dots,p_n),\partial_{x_2}f(p_1,\dots,p_n),\dots,\partial_{x_n}f(p_1,\dots,p_n))$$

(A pontbeli gradiensvektor megmutatja a függvény adott pontbeli maximális változásának irányát, hossza pedig a maximális változás nagysága.)

Amennyiben adott egy $v\in\mathbb{R}^n$ vektor, akkor az f függvény p pontbeli $v=(v_1,\dots,v_n)$ vektor (mint irány) szerinti *iránymenti deriváltja* kiszámítható a

$$D_vf(p)=\left\langle \operatorname{grad} f(p),\frac{v}{\|v\|}\right\rangle\in\mathbb{R}$$

formula alapján (ahol $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a $\mathbb{R}^n$ kanonikus belső szorzata).
(Az iránymenti derivált megmutatja, hogy az adott pontban és az adott irányban milyen gyorsan változik a függvény.)

Feladatok

1. Adott az $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (4x^2 + y, x - \cos y, xy)$ függvény. Adja meg a derivált-leképezés mátrixát egy (x,y) pontban, a kanonikus bázisokra vonatkozóan! Határozza meg a J_f mátrixot az $(1,0)$ pont esetén!

2. Adott az $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (xy\sin z, x^2 + \cos y - 16z, x + y - \sqrt{z})$ függvény. Adja meg a derivált-leképezés mátrixát egy (x,y,z) pontban, a kanonikus bázisokra vonatkozóan!

3. Számítsa ki az $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ függvény $p = (2,0)$ pontbeli gradiensét, majd az iránymenti deriváltját a $v = (3,-4)$ irány szerint!

4. Számítsa ki az alábbi kétváltozós függvények iránymenti deriváltját az adott v irány szerint az adott p pontban!

   (a) $f(x,y) = \frac{1}{\cos^2(x-y)}$, $\quad v = (-\sqrt{3}, -1)$, $\quad p = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

   (b) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, $\quad v = (\sqrt{3}, 1)$, $\quad p = \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{3}}\right)$

   (c) $f(x,y) = \cos \frac{\pi y}{x^2+y^2}$, $\quad v = (1,1)$, $\quad p = (2,2)$

   (d) $f(x,y) = \frac{\ln x}{\ln y} - \frac{\ln y}{\ln x}$, $\quad v = (-3,4)$, $\quad p = (e, e^2)$

5. Határozza meg az $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$ függvénynek az $(1,2)$ pontbeli v irányú deriváltját, ahol v az x-tengellyel 45 fokot bezáró egységvektor!

6. Határozza meg az $f(x,y) = x - \sin(xy)$ függvény deriváltját az $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ pontban a $v = \left(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3}\right)$ irányban!

7. Határozza meg az $f(x,y) = xy^2$ függvény deriváltját az $(1,3)$ pontban, az onnan(!) $(4,5)$ pont felé mutató irányban!

8. Határozza meg az $f(x,y,z) = x^2y^2z$ függvény deriváltját a $(2,4,1)$ pontban az $(1,2,2)$ vektor irányában!

9. Határozza meg az $f(x,y) = 8 - 4x^2 - 2y^2$ függvénnyel leírt domb legmeredekebb lejtőjének irányát az $(1,1)$ pontban!

10. Milyen irányba induljon el az ember az origóból, ha az $f(x,y,z) = (3 - x + y)^2 + (4x - y + z + 2)^3$ függvény leggyorsabb ütemű emelkedését szeretné elérni?

11. Ha az elektromos potenciál egy tetszőleges (x,y) pontban $\Phi(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, határozza meg a Φ változásának az ütemét a $(3,4)$ pontban a $(2,6)$ pont felé(!) mutató vektor irányában!

12. Ha a hőmérsékletet az $f(x,y,z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ függvény írja le, és az $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ pontban tartózkodunk, akkor milyen irányban induljunk el, ha hűvösebbet akarunk, amilyen gyorsan csak lehet?

13. Az elektromos potenciál az (x,y,z) pontban $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$. Döntse el, hogy a $p = (2,3,4)$ pontból a $v = (2,6,1)$ vektor irányába indulva növekszik vagy csökken a potenciál értéke. Milyen irányba kellene elindulni a p pontból ahhoz, hogy az elektromos potenciál növekedése maximális legyen?

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. Először ki kell számítani minden koordinátafüggvény összes parciális deriváltját, hiszen ezek alkotják a mátrix elemeit:

$$\begin{array}{ll} \partial_{x_1} f^1(x,y) = 8x & \partial_{x_2} f^1(x,y) = 1 \\ \partial_{x_1} f^2(x,y) = 1 & \partial_{x_2} f^2(x,y) = \sin y \\ \partial_{x_1} f^3(x,y) = y & \partial_{x_2} f^3(x,y) = x \end{array}$$

Innen a derivált-leképezés J_f mátrixa:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} 8x & 1 \\ 1 & \sin y \\ y & x \end{pmatrix}$$

Speciálisan az $(1,0)$ pont esetén:

$$J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. *1. lépés: A függvény parciális deriváltjainak felírása.* A gradiensvektor felírásához meg kell határozni az f parciális deriváltjait:

$$\partial_x f(x,y) = e^y - y\sin(xy)\ , \qquad \partial_y f(x,y) = xe^y - x\sin(xy)\ .$$

2. lépés: A gradiensvektor felírása általános pontban.

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (e^y - y\sin(xy), xe^y - x\sin(xy))$$

3. lépés: A gradiensvektor kiszámítása az adott pontban.

$$\operatorname{grad} f(2,0) = \Big(e^0 - 0\sin(2\cdot 0), 2e^0 - 2\sin(2\cdot 0)\Big) = (1,2)\ .$$

Amennyiben egy feladat csak adott pontbeli gradiensvektor meghatározását kéri, úgy az első 3 lépéssel meg is oldottuk azt.
4. lépés: Az adott vektor hosszának meghatározása. Az iránymenti derivált képletében szerepel a pontbeli gradiensvektor (ezt az első három lépésben meghatározuk), valamint az irányként működő v vektorból származó egységnyi hosszúságú vektor. Az egységnyi hosszúságot úgy érjük el, hogy a v vektort beosztjuk a hosszával ($\|v\|$). Ezért kell kiszámítani a v hosszát (vagy normáját):

$$\|v\| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

5. lépés: A $\frac{v}{\|v\|}$ egységvektor felírása.

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{5}(3,-4) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$$

6. lépés: Az iránymenti derivált kiszámítása. Minden adat a birtokunkban van, hogy az iránymenti derivált formuláját használhassuk:

$$D_v f(p) = \left\langle \operatorname{grad} f(p), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \left\langle (1,2), \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \right\rangle = 1\cdot\frac{3}{5} + 2\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = \ldots = -1\ .$$

13. *Útmutató:* A függvény adott irány szerinti változását az iránymenti derivált mutatja meg; míg a maximális változás irányát a gradiensvektor adja.

Végeredmények

2.

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} y\sin z & x\sin z & xy\cos z \\ 2x & -\sin y & -16 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2\sqrt{z}} \end{pmatrix}$$

4. a) $D_v f(p) = 2 - 2\sqrt{3}$, b) $D_v f(p) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + 1\right)$, c) $D_v f(p) = \frac{\pi}{16}$,
d) $D_v f(p) = -\frac{8+17e}{10e^2}$
5. $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D_v f(p) = \frac{15}{\sqrt{2}}$,
6. $v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D_v f(p) = \frac{1}{2}$,
7. $v = (4,5) - (1,3) = (3,2)$, $D_v f(p) = 3\sqrt{13}$,
8. $D_v f(p) = \frac{256}{3}$

Megjegyzés: A 9., 10. és 12. feladatokban az adott pontbeli gradiensvektort, a 11. feladatban az irány-menti deriváltat kell meghatározni.

9. $-\operatorname{grad} f(p) = (8,4)$,
10. $\operatorname{grad} f(p) = (42,-6,12) = 6(7,-1,2)$,
11. $v = (2,6) - (3,4) = (-1,2)$, $D_v f(p) = \frac{\sqrt{5}}{25}$,
12. $-\operatorname{grad} f(p) = -(2,-2,2) = -2(1,-1,1)$
13. $D_v f(p) = \frac{52}{\sqrt{2870}}$ (a potenciál nő); $\operatorname{grad} f(p) = \frac{2}{\sqrt{70}}(1,3,6)$

3.5. Parciális differenciálegyenletek alapjai

A fejezetben csak a legegyszerűbb parciális differenciálegyenletekkel ismerkedünk meg.

Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi parciális differenciálegyenleteket:

   (a) $\partial_y u = x^2 y + 3y^2$

   (b) $\partial_x \partial_y u = xy^3 + 4$

2. Keressük meg az $\partial_y u = 0$ elsőrendű parciális differenciálegyenlet azon megoldását, melyre $u(x,x) = x^2$ fennáll!

3. Keressük meg az $\partial_x \partial_y u = x + y$ másodrendű parciális differenciálegyenlet azon megoldását, amelyre $u(x,x) = x$ és $\partial_x u(x,x) = 0$ teljesül!

4. Döntsük el, hogy megoldható-e az

$$\begin{cases} \partial_x u = 3x^2 y^2 \\ \partial_y u = 2x^3 y \end{cases}$$

   parciális differenciálegyenlet-rendszer. Ha igen, akkor határozzuk meg az egyenlet-rendszer azon $u(x,y)$ megoldását, amire $u(0,1) = 3$!

5. Döntsük el, hogy megoldható-e az

$$\begin{cases} \partial_x u = x^3 y \\ \partial_y u = x y^3 \end{cases}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer!

6. Döntsük el, hogy megoldható-e az

$$\begin{cases} \partial_x u = 6(xy + x^2) \\ \partial_y u = 3x^2 \end{cases}$$

parciális differenciálegyenlet-rendszer. Ha igen, akkor határozzuk meg az egyenlet-rendszer azon $u(x, y)$ megoldását, amire $u(0, 1) = 2$!

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/a Az egyenlet azt jelenti, hogy az $u(x, y)$ függvényt y szerint deriválva az $x^2 y + 3y^2$ függvényt kapjuk. Amennyiben integráljuk ezt a függvényt y szerint, megkapjuk a keresett $u(x, y)$ függvényt.

$$\int (x^2 y + 3y^2)\ \mathrm{d}y = \frac{x^2 y^2}{2} + y^3 + c(x) = u(x, y)$$

Itt a $c(x)$ egy olyan függvény, amely csak x-től függ, azaz y számára konstans.

1/b A megoldás elve hasonló az előzőhöz, csak most kétszer kell azt végrehajtani. Integráljuk a függvényt először az egyik, majd a másik változó szerint, így megkapjuk a keresett $u(x, y)$ függvényt.
Ne feledkezzünk meg a konstans szerepét betöltő függvényekről (a példában $c_1(x)$ és $c_2(y)$)!

$$\int (xy^3 + 4)\ \mathrm{d}y = \frac{xy^4}{4} + 4y + c_1(x)$$

$$\int \left(\frac{xy^4}{4} + 4y + c_1(x) \right)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2 y^4}{8} + 4xy + C_1(x) + c_2(y) = u(x, y)$$

(Itt $C_1(x)$ a $c_1(x)$ primitív függvénye/határozatlan integrálja.)

2. (Kezdeti érték-probléma)
A megoldás első lépésének elve megegyezik az 1/a) feladat megoldásával:

$$\int 0\ \mathrm{d}y = c(x) = u(x, y)\ .$$

Látható, hogy a függvény y szerinti deriváltja 0. Ez annyit jelent, hogy a keresett $u(x, y)$ függvény csupán x-től függ.
A második lépés célja az, hogy a $c(x)$ függvényt (vagy az általános feladat esetében egy c konstans értékét) meghatározzuk. Itt használjuk fel az előre megkapott *kezdeti érték*ünket: $u(x, x) = x^2$.

$$u(x, y) = c(x) \quad \Longrightarrow \quad u(x, x) = c(x) \quad \overset{\text{kezd.ért.}}{\Longrightarrow} \quad u(x, x) = c(x) = x^2$$
$$\Longrightarrow \quad u(x, y) = x^2\ .$$

3. (Kezdeti érték-probléma)
A megoldás első lépésének módszerét az 1/b) feladatból vehetjük, míg a második lépés hasonló a 2. feladat második lépéséhez.
Elsőként meghatározzuk a parciális differenciálegyenlet megoldásának általános alakját:

$$\int (x+y)\ \mathrm{d}y = xy + \frac{y^2}{2} + c_1(x)$$
$$\int \left(xy + \frac{y^2}{2} + c_1(x)\right)\ \mathrm{d}x = \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + C_1(x) + c_2(y) = u(x,y)$$

A keresett $u(x,y)$ függvény általános alakját megkaptuk. Azonban nem ismerjük még a $C_1(x)$ és $c_2(y)$ függvényeket. Ezért a második lépésben felhasználjuk az előre adott kezdeti feltételeket.
Az $u(x,x) = x$ feltételből:

$$u(x,x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + C_1(x) + c_2(x) = x^3 + C_1(x) + c_2(x) = x$$
$$c_2(x) = x - x^3 - C_1(x)$$

A $\partial_x u(x,x) = 0$ feltételből:

$$\partial_x u(x,y) = \partial_x \left(\frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + C_1(x) + c_2(y)\right) = xy + \frac{y^2}{2} + c_1(x)$$
$$\partial_x u(x,x) = x^2 + \frac{x^2}{2} + c_1(x) = \frac{3}{2}x^2 + c_1(x) = 0$$

Ebből következik, hogy

$$c_1(x) = -\frac{3}{2}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1(x) = \int -\frac{3}{2}x^2\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^3\ .$$

A $C_1(x)$ függvény ismeretében:

$$c_2(x) = x - x^3 - \left(-\frac{1}{2}x^3\right) = x - \frac{1}{2}x^3\ .$$

Azaz $c_2(y) = y - \frac{1}{2}y^3$. Innen (a kezdeti feltételeket figyelembe véve) a keresett függvény:

$$u(x,y) = \frac{x^2y + xy^2}{2} - \frac{1}{2}x^3 + y - \frac{1}{2}y^3\ .$$

A megoldást könnyű ellenőrizni. Ezt az $u(x,y)$ függvényt deriválni kell x, majd y szerint (vagy fordítva) és $(x+y)$ lesz az eredménye; $u(x,x)$-nek x-szel kell megegyeznie; végül az x szerinti parciális deriváltat (x,x)-be helyettesítve 0-t kell kapni.

4. Elsőként keressük meg az egyenletrendszer általános megoldását, majd határozzuk meg azt a konkrét megoldást, amelyre a feladatban adott $u(0,1) = 3$ kezdeti feltétel teljesül.
Integráljuk az egyik egyenletet aszerint a változója szerint, ami szerint a függvény

deriváltja adott – tehát vagy az első egyenletet x szerint, vagy a másodikat y szerint. Induljunk ki például az első egyenletből:

$$\int 3x^2y^2 \; \mathrm{d}x = x^3y^2 + c(y) = \tilde{u}(x,y) \; .$$

Az $\tilde{u}(x,y)$ valószínűleg a jó megoldást adja. Bizonyosságot úgy szerezhetünk, ha $\tilde{u}(x,y)$-t a másik(!) változó szerint deriváljuk:

$$\partial_y \tilde{u} = 2x^3y + c'(y) \; .$$

Hasonlítsuk össze a kapott kifejezést, és az egyenletrendszer második tagját:

$$\partial_y u = 2x^3y \qquad = \qquad \partial_y \tilde{u} = 2x^3y + c'(y) \; .$$

A két egyenlet csupán a $c'(y)$-ban különbözik, ezért $c'(y) = 0$. Egy függvény deriváltja pontosan akkor nulla, ha maga a függvény konstans. Azt már korábban láttuk, hogy a c függvény nem függ x-től, és most már azt is tudjuk, hogy y-tól sem függ – egy valós számot várunk eredményként.
Tekintsük most az előre adott kezdeti feltételt, és helyettesítsük be a kapott eredményünkbe. Így a c konstans értékét pontosan megkapjuk:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= x^3y^2 + c \\ u(0,1) &= 0 + c = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 3 \\ u(x,y) &= x^3y^2 + 3 \; . \end{aligned}$$

Megjegyzés: Ugyanezt a megoldást kapjuk akkor is, ha az első lépésben az y szerinti egyenletből indulunk ki, később a kapott kifejezést x szerint deriváljuk stb.

5. A megoldás menete a 4. feladatnál látottakkal egyezik meg.
Integráljuk az első egyenletet:

$$\int x^3y \; \mathrm{d}x = \frac{x^4y}{4} + c(y)$$

Deriváljuk ezt a második változó szerint:

$$\left(\frac{x^4y}{4} + c(y)\right)_y = \frac{x^4}{4} + c'(y) \; .$$

Látható, hogy ez soha nem egyezhet meg az $\partial_y u = xy^3$ kifejezéssel, így az egyenletrendszer nem oldható meg.

6. A megoldás menete a 4. feladatnál látottakkal egyezik meg.
Integráljuk az első egyenletet, majd deriváljuk azt a másik változó szerint:

$$\begin{aligned} \int 6\left(xy + x^2\right) \; \mathrm{d}x &= 3x^2y + 2x^3 + c(y) = \tilde{u}(x,y) \\ \partial_y \tilde{u} &= 3x^2 + c'(y) \; . \end{aligned}$$

A legutóbbi egyenlet az eredeti egyenletrendszer $\partial_y u$-ra vonatkozó tagjától csupán a $c'(y)$-ban tér el, így $c'(y) = 0$ – tehát $c(y)$ konstans, jelöljük c-vel. A c meghatározásához szükségünk van a kezdeti feltételre:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= 3x^2y + 2x^3 + c \\ u(0,1) &= 0 + 0 + c = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 2 \\ u(x,y) &= 3x^2y + 2x^3 + 2 \; . \end{aligned}$$

3.6. Divergencia, rotáció, potenciálfüggvény

Rövid elméleti összefoglaló

Legyen adott egy $X = (X_1, X_2, X_3)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező (szokásos jelölés még: $X = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$), és legyen ∇ (nabla) egy formális(!) vektor:

$$\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\ .$$

Az X vektormező *divergenciá*ja egy pontból kiinduló (vagy egy pontba összetartó) erővonalak (források, nyelők) mennyiségi jellemzője, és kiszámítható a következő formula segítségével:

$$\operatorname{div} X := \langle \nabla, X\rangle = \partial_x X_1 + \partial_y X_2 + \partial_z X_3\ .$$

Ha az X divergenciája nulla, úgy a vektormezőt *forrásmentes*nek nevezzük.

Az X vektormező *rotáció*ja a hurkokat méri, és az alábbi képlettel számítható ki:

$$\operatorname{rot} X := \nabla \times X = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{vmatrix} = (\partial_y X_3 - \partial_z X_2, \partial_z X_1 - \partial_x X_3, \partial_x X_2 - \partial_y X_1)\ .$$

Ha az X rotációja a nullvektor, úgy a vektormezőt *örvénymentes*nek mondjuk.
Az X vektormező *potenciál*ja (potenciálfüggvénye) olyan f függvény, amelyre

$$X = \operatorname{grad} f\ , \quad \text{azaz} \quad (X_1, X_2, X_3) = (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)$$

teljesül. Egy vektormezőnek csak akkor létezik potenciálja, ha örvénymentes, azaz $\operatorname{rot} X = \underline{0}$.

Feladatok

1. Határozza meg az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját!

   (a) $X = xye_1 + yze_2 + xze_3 = (xy, yz, xz)$

   (b) $X = (x, y, 2z)$

   (c) $X = (x^2, y^2, z^2)$

   (d) $X = (xyz, 2x + 3y + z, x^2 + z^2)$

   (e) $X = (y^2z, z^2x, x^2y)$

   (f) $X = (5xz + 3, 9y^2 - \pi, z - 1)$

   (g) $X = (9 - 15z^3, 3xyz - 2, 2 - e + x)$

   (h) $X = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$

   (i) $X = (\sqrt{x}, 2yz, y^2 + 1)$

   (j) $X = (-\cos y, x + \sin y, xyz)$

2. Számítsa ki az *1(d)* feladatbeli vektormező $P(1, 2, 3)$ pontbeli divergenciáját és rotációját!

3. Adja meg az alábbi vektormezők potenciálfüggvényét, amennyiben az létezik!
   (a) $X = (2xy - z - 2, x^2 + 1, 2z - x)$
   (b) $X = (5x^2y - 4xy, 3x^2 - 2y)$ ($\mathbb{R}^2$-ben: $\operatorname{rot} X = \partial_x X_2 - \partial_y X_1$)
   (c) $X = (2x, 3y, 4z)$
   (d) $X = (y + z, x + z, x + y)$
   (e) $X = (8x - \pi, x - y - z, 3y)$
   (f) $X = (2xy - z^2 - yz, x^2 + z^2 - xz, 2yz - 2xz - xy)$
   (g) $X = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$
   (h) $X = (e^x \cos y + yz, xz - e^x \sin y, xy + z)$
   (i) $X = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)$

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1/a) A ∇ formális vektort tekintve, a divergencia és a rotáció definícióit felhasználva a megoldás:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} X &= \langle \nabla, X\rangle = \partial_x(xy) + \partial_y(yz) + \partial_z(xz) = y + z + x \ , \\
\operatorname{rot} X &= \nabla \times X = (\partial_y(xz) - \partial_z(yz), \partial_z(xy) - \partial_x(xz), \partial_x(yz) - \partial_y(xy)) = \\
&= (0 - y, 0 - z, 0 - x) = (-y, -z, -x) \ .
\end{aligned}$$

3/a) Először azt kell ellenőrizni, hogy a vektormező rotációja a nullvektor:

$$\begin{gathered}
\operatorname{rot} X = \\
= \Big(\partial_y(2z - x) - \partial_z(x^2 + 1), \partial_z(2xy - z - 2) - \partial_x(2z - x), \partial_x(x^2 + 1) - \partial_y(2xy - z - 2)\Big) = \\
= (0 - 0, -1 - (-1), 2x - 2x) = (0, 0, 0) \ .
\end{gathered}$$

Létezik tehát az f potenciálfüggvény. Ennek definíciója: $\operatorname{grad} f = X$. Írjuk fel ezt a definíciót a komponensfüggvények szerint:

$$\begin{aligned}
\partial_x f &= 2xy - z - 2 \ , \\
\partial_y f &= x^2 + 1 \ , \\
\partial_z f &= 2z - x \ .
\end{aligned}$$

Ez a három feltétel nem más, mint egy parciális differenciálegyenlet-rendszer (amelyről már korábban tanultunk).
Integráljuk az első egyenletet x szerint:

$$\int (2xy - z - 2)\, \mathrm{d}x = x^2y - zx - 2x + c_1(y, z) = f(x, y, z) \ ,$$

ahol $c_1(y, z)$ egy csak y-tól és z-től függő függvény (x számára konstans).
Deriváljuk ezt a függvényt y szerint:

$$\partial_y(x^2y - zx - 2x + c_1(y, z)) = x^2 + \partial_y c_1(y, z) \ .$$

Ennek a deriváltnak meg kell egyeznie (x^2+1)-gyel, ezért

$$\partial_y c_1(y,z) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c_1(y,z) = y + c_2(z)\ .$$

(Mivel ha c_1-et y szerint deriválva 1-et kapunk, az csak akkor lehetséges, ha y 1-gyel van megszorozva, és még lehet egy y-tól független – de z-től függő – konstans rész.)
Ebből a megoldás alakja eddig a következő: $f(x,y,z) = x^2y - zx - 2x + y + c_2(z)$. Deriváljuk most ezt a függvényt z szerint, és hasonlítsuk össze a harmadik feltétellel:

$$\partial_z(x^2y - zx - 2x + y + c_2(z)) = -x + \partial_z c_2(z)\ ,$$
$$-x + \partial_z c_2(z) = 2z - x \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_z c_2(z) = 2z \quad \Longleftrightarrow \quad c_2(z) = z^2 + k\ .$$

Innen a keresett potenciálfüggvény:

$$f(x,y,z) = x^2y - zx - 2x + y + z^2 + k\ .$$

Végeredmények

1. (b) $\operatorname{div} X = 4$, $\operatorname{rot} X = (0,0,0)$ – X örvénymentes;
   (c) $\operatorname{div} X = 2x + 2y + 2z$, $\operatorname{rot} X = (0,0,0)$ – X örvénymentes;
   (d) $\operatorname{div} X = yz + 3 + 2z$, $\operatorname{rot} X = (-1, xy - 2x, 2 - xz)$;
   (e) $\operatorname{div} X = 0$, $\operatorname{rot} X = (x^2 - 2zx, y^2 - 2xy, z^2 - 2yz)$ – X forrásmentes;
   (f) $\operatorname{div} X = 5z + 18y + 1$, $\operatorname{rot} X = (0, 5x, 0)$;
   (g) $\operatorname{div} X = 3xz$, $\operatorname{rot} X = (-3xy, -45z^2 - 1, 3yz)$;
   (h) $\operatorname{div} X = 0$, $\operatorname{rot} X = (2y - 2z, 2z - 2x, 2x - 2y)$ – X forrásmentes;
   (i) $\operatorname{div} X = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2z$, $\operatorname{rot} X = (0,0,0)$ – X örvénymentes;
   (j) $\operatorname{div} X = \cos y + xy$, $\operatorname{rot} X = (xz, -yz, 1 - \sin y)$

2. $\operatorname{div} X(1,2,3) = 15$, $\operatorname{rot} X(1,2,3) = (-1, 0, -1)$.

3. (b) $\operatorname{rot} X \neq \underline{0}$, ezért nem létezik potenciálfüggvénye
   (c) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + k$
   (d) $f(x,y,z) = xy + xz + yz + k$
   (e) $\operatorname{rot} X \neq \underline{0}$, ezért nem létezik potenciálfüggvénye
   (f) $f(x,y,z) = x^2y - xz^2 - xyz + yz^2 + k$
   (g) $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + k$
   (h) $f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + k$
   (i) $f(x,y,z) = x\ln x - x + \operatorname{tg}(x+y) + \frac{1}{2}\ln(y^2 + z^2) + k$

3.7. Görbementi integrál (Vonalintegrál)

Rövid elméleti összefoglaló

A továbbiakban az $\mathbb{R}^3$ valós térben dolgozunk, ahol (e_1, e_2, e_3) a kanonikus bázis, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pedig a kanonikus belső szorzat.

Legyen $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ egy parametrizált (tér)görbe. Ennek a sebességvektormezőjét $\dot\gamma$-tal jelöljük, és

$$\dot\gamma(t) = (\gamma_1'(t), \gamma_2'(t), \gamma_3'(t)) \ .$$

Ekkor egy $X = (X_1, X_2, X_3) = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3$ vektormező γ *görbementi integrál*ja kiszámítható a

$$\int_\gamma X = \int_a^b \langle X(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle \ \mathrm{d}t =$$

$$= \int_a^b (X_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + X_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + X_3(\gamma(t))\gamma_3'(t)) \ \mathrm{d}t$$

formula segítségével.
A fenti integrált szokás még γ görbe menti *skalárértékű vonalintegrál*nak is nevezni. (Amennyiben a γ *zárt* görbe, úgy a görbementi integrál jelölése: $\oint_\gamma X$.)

Megjegyzés: Egy (egyszeresen összefüggő tartományon értelmezett) X vektormező görbementi integrálja akkor és csak akkor független az úttól, ha a vektormező örvénymentes, azaz $\operatorname{rot} X = 0$. Ekkor a görbementi integrál értéke csak a kezdő- és végponttól függ. (Ebből következik, hogy egy X vektormező görbementi integrálja pontosan akkor nulla minden zárt görbe mentén, ha $\operatorname{rot} X = 0$.) – Ezt az állítást felhasználva, ha az X vektormező örvénymentes, akkor az f *potenciálfüggvény*ét a következőképpen is meghatározhatjuk:

$$\int_\gamma X = \ldots = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \qquad \overset{(*)}{\Longrightarrow} \qquad f(v) = \int_\gamma X + k$$

A $(*)$ lépésben átalakítással, valamint $f(\gamma(a)) = k \in \mathbb{R}$ és $f(\gamma(b)) = f(v)$ választással éltünk, ami azt vonja maga után, hogy a γ görbe kezdőpontja az origó, végpontja a tér egy tetszőleges $v = (a, b, c)$ pontja. Mivel az integrál értéke független az úttól, ezért válasszunk a két végpont között egy könnyen kezelhető görbét – például egy koordinátatengelyekkel párhuzamos töröttvonalat (több műszaki szakirodalom ezt részesíti előnyben) vagy egyszerűen a két pontot összekötő egyenes szakaszt, amelynek paraméteres leírása (a p-n átmenő, v irányvektorú egyenes $p + t \cdot v$ leírásából): $\gamma(t) = (ta, tb, tc)$, $t \in [0, 1]$.
Az így kapott görbementi integrál $a = x$, $b = y$ és $c = z$ helyettesítéssel a keresett potenciálfüggvényt adja. (Lásd a kidolgozott példát.)

Feladatok

1. Számítsa ki az $X = (x^3, -y^3)$ vektormező integrálját $\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$ parametrizált kör első negyedkörének mentén!

2. Határozza meg az $X = xe_1 + ye_2 + ze_3$ vektormező integrálját $\gamma(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ parametrizált csavarvonal mentén, ha $t \in [0, 2\pi]$!

3. Számítsa ki az alábbi vektormezők görbementi integráljait!

   (a) $X = (x, z, y)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$;

   (b) $X = (3x^2 + y^2, x^2 - y^2)$, $\gamma(t) = (t, 2 - 3t)$, $0 \le t \le 1$;

   (c) $X = (yz, xz, xy)$, $\gamma(t) = (2t - 1, t + 2, 3t)$, $0 \le t \le 1$;

   (d) $X = (y^2 - z^2, 4yz, -x^2)$, $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$, $0 \le t \le 1$;

(e) $X = \left(2x, -\dfrac{y}{z}, x-z\right)$, $\gamma(t) = (1-t, t^2-1, t^3)$, $1 \le t \le 2$;

(f) $X = \left(x^2, -y, \dfrac{1}{z}\right)$, $\gamma(t) = \left(\dfrac{1}{1+t}, \dfrac{1}{1+2t}, \dfrac{1}{1+3t}\right)$, $0 \le t \le 1$;

(g) $X = (x-y, x+y, xy)$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

(h) $X = \left(\dfrac{1}{1+x}, 2yz, y^2+1\right)$, $\gamma(t) = \left(\dfrac{1}{t}, \sqrt{t+1}, t\right)$, $1 \le t \le 3$;

(i) $X = (y+z, x+z, x+y)$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, 1)$, $0 \le t \le 2\pi$;

(j) $X = (y+z, z+x, x+y)$, $\gamma(t) = (\sin^2 t, \sin 2t, \cos^2 t)$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{4}$.

4. Határozza meg a „Divergencia, rotáció, potenciálfüggvény” fejezet 3. feladatában található vektormezők potenciálfüggvényeit görbementi integrál segítségével!

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

3/a A képlet alkalmazásához három adatra van szükségünk: az integrálás határaira, az $X(\gamma(t))$ vektormezőre és a $\dot\gamma(t)$ vektormezőre.
A feladat szövege alapján az integrálás határai: 0 és $\frac{\pi}{2}$, azaz a görbe értelmezési tartományának végpontjai.
A keresett két vektormező:

$$\begin{aligned} X(\gamma(t)) &= (\cos t, t, \sin t) \ ; \\ \dot\gamma(t) &= (-\sin t, \cos t, 1) \ . \end{aligned}$$

Ennek alapján az integrál:

$$\begin{aligned} \int_\gamma X &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos t \sin t + t\cos t + \sin t)\ \mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\cos t \sin t\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{d}t \overset{(*)}{=} \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\ \mathrm{d}t = \\ &= \left(\frac{\cos^2\frac{\pi}{2}}{2} + \frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\cos^2 0}{2} + 0\sin 0\right) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi-1}{2} \ . \end{aligned}$$

4/g Az $X = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z})$ vektormező f potenciálfüggvényét keressük. Kiszámítható, hogy rot $X = 0$. Az elméleti összefoglalóban leírt meggondolást felhasználva, tekintsük azt az egyenes szakaszt (mint görbét), amely az origót és a tér egy $v = (a, b, c)$ pontját köti össze: $\gamma(t) = (ta, tb, tc)$, $t \in [0, 1]$. Adott tehát az X vektormező és a γ görbe, így a feladat megoldása visszavezethető az előző kidolgozott példára.
A γ sebességvektormezője: $\dot\gamma(t) = (a, b, c)$.
Az $X(\gamma(t))$ vektormező: $X(\gamma(t)) = (e^{tb+2tc}, tae^{tb+2tc}, 2tae^{tb+2tc})$.
Ezek belső (skaláris) szorzata:

$$\begin{aligned} \langle X(\gamma(t)), \dot\gamma(t)\rangle &= ae^{tb+2tc} + btae^{tb+2tc} + c2tae^{tb+2tc} = \ldots = \\ &= ae^{(b+2c)t} + (ab+2ac)te^{(b+2c)t} \end{aligned}$$

A kiszámítandó integrál:

$$\int_\gamma X = \int_0^1 \left(ae^{(b+2c)t} + (ab+2ac)te^{(b+2c)t} \right)\, \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{a}{b+2c} e^{(b+2c)t} + \frac{ab+2ac}{b+2c} te^{(b+2c)t} - \frac{ab+2ac}{(b+2c)^2} e^{(b+2c)t} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{a}{b+2c} e^{b+2c} + \frac{ab+2ac}{b+2c} e^{b+2c} - \frac{ab+2ac}{(b+2c)^2} e^{b+2c} - \frac{a}{b+2c} + \frac{ab+2ac}{(b+2c)^2} =$$

$$= \frac{a}{b+2c} e^{b+2c} + ae^{b+2c} - \frac{a}{b+2c} e^{b+2c} - \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+2c} = ae^{b+2c}$$

Mivel $f(v) = \int_\gamma X + k$, ezért $f(a,b,c) = ae^{b+2c} + k$.
A $a = x$, $b = y$ és $c = z$ helyettesítésekkel élve, a keresett potenciálfüggvény: $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + k$.

Végeredmények

1. $-\frac{r^4}{2}$
2. $2b^2\pi^2$
3. (b) 4, (c) 9, (d) $\frac{3}{5}$, (e) $-\frac{143}{4}$, (f) $\frac{11}{72} - \ln 4$, (g) 2π, (h) $12 + \ln\frac{2}{3}$, (i) 0, (j) $\frac{5}{4}$.
4. (lásd korábban)

Megjegyzés: Néhány hasznos integrálási képlet:

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}} + k\ , \quad \text{ha} \quad D > 0\ ;$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} + k\ , \quad \text{ha} \quad D < 0\ .$$

3.8. Felületi integrál

Rövid elméleti összefoglaló

A továbbiakban az $\mathbb{R}^3$ valós térben dolgozunk, ahol (e_1, e_2, e_3) a kanonikus bázis, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pedig a kanonikus belső szorzat.
Legyen F egy felület, ennek egy paraméterezése legyen

$$\underline{r}\colon (u,v) \in [a,b] \times [c,d] \longmapsto \underline{r}(u,v) \in \mathbb{R}^3\ .$$

A felület paramétervonalainak érintővektorai a $\partial_u \underline{r}$ és $\partial_v \underline{r}$ vektorok. E két vektor vektoriális (külső) szorzata egy olyan vektort ad, amely a két vektorra merőleges, ezt a vektort a felület adott pontbeli *normális*ának nevezzük: $\underline{n} = \partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r}$.

Ekkor egy $X = (X_1, X_2, X_3) = X_1e_1 + X_2e_2 + X_3e_3$ vektormező F felület szerinti *felületi integrál*ját kiszámíthatjuk a

$$\iint_F X = \int_a^b \int_c^d \langle X(\underline{r}(u,v)), \underline{n} \rangle \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

formula segítségével.

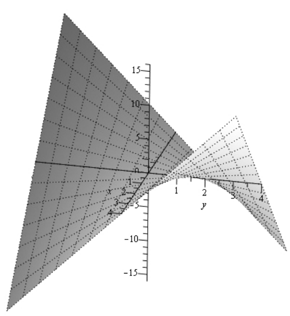
Feladatok

Számítsa ki az alábbi X vektormező F felület szerinti (illetve az F felület megadott részei szerinti) felületi integrálját!

1. $X = (yz, xz, xy)$, $F\colon z = xy$, $x \in [0,1]$, $y \in \left[0, \sqrt{x}\right]$;
2. $X = (x^2 - y^2, y^2 - x^2, z)$, $F\colon z = xy$, $x \in [-1,1]$, $y \in [-2,1]$;
3. $X = (x, y, z)$, $\underline{r}(u,v) = ((3+\cos u)\cos v, (3+\cos u)\sin v, \sin u)$, $[x,y]$-koordinátasík feletti része;
4. $X = (x, x, z)$, $\underline{r}(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $[x,y]$-koordinátasík feletti része;
5. $X = (x, y, 0)$, $\underline{r}(u,v) = (4\cos u \cos v, 4\cos u \sin v, 4\sin u)$, $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$, $v \le u \le \dfrac{\pi}{2}$;
6. $X = (yz, -xz, z)$, $\underline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 2v)$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2\pi$;
7. $X = (y, z, x)$, $\underline{r}(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$, $0 \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le \pi$;
8. $X = (x, y, z)$, $\underline{r}(u,v) = (3\cos u \cos v, 3\cos u \sin v, 3\sin u)$, $v \le u \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le v \le \dfrac{\pi}{2}$;
9. $X = (z - x, x + y, x - z)$, $\underline{r}(u,v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$, $0 \le u, v \le \dfrac{\pi}{2}$;
10. $X = (-xy, xy, z)$, $F\colon z = x^2 - y^2$, $-2 \le x \le 2$, $-3 \le y \le 3$;
11. $X = (x + y + z, xy, -z)$, $F\colon z = x^2 + 2y$, $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 1$;
12. $X = (2x + y, -xy, z)$, $F\colon z = xy$, $x = 0$, $y = 0$, $x + 2y = 4$ egyenesek határolják a tartományt (Ebben a feladatban tartomány alatt az $[x,y]$-koordinátasík egy részét értjük, amelyhez tartozó felületi pontok alkotta felületdarabon integrálunk.);
13. $X = (-y, x, z)$, $F\colon x + y + z = 3$, az F első térnyolcadba eső része szerinti integrál.

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. *Megjegyzés:* A feladatban szereplő felület egy ún. nyeregfelület/hiperbolikus paraboloid.



Először vizsgáljuk meg az alkalmazni kívánt képletet, és határozzuk meg, hogy milyen adatokra van szükség az integrál kiszámításához.
A felület nem paraméteres alakban adott, hanem úgynevezett implicit alakban, ezért első lépésben a paraméteres alakot kell felírni. Felhasználhatjuk az úgynevezett Euler-Monge-féle paraméterezést:

$$x := u \ , \qquad y := v \ , \qquad z := uv \; (= f(u,v)) \ .$$

Szemléletesen, ez a paraméterezési módszer az $[x, y]$-koordinátasík egy darabjának minden pontja „fölé” (vagy „alá”) helyez egy térbeli pontot, így adódik a felület. (**FONTOS!** Ezt a paraméterezést nem alkalmazhatjuk minden esetben!!! Ellenpéldaként szolgálhat az $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ egységsugarú, origó középpontú gömb, ahol az egyenletből nem tudjuk előállítani a fenti paraméteres alakot. Ettől függetlenül a gömb nyilvánvalóan paraméterezhető, az Euler-Monge paraméterezéstől eltérő módon, például: $\underline{r}(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$.)
A felület paraméteres alakban:

$$\underline{r}(u, v) = (u, v, uv) \ .$$

A képlet kiszámításához szükség van:

- $(X \circ \underline{r})\,(u, v) = X\,(\underline{r}(u, v))$ vektorra ($\sim$ vektormezőre);
- a $\partial_u \underline{r}$ és $\partial_v \underline{r}$ érintővektorokra, továbbá azok vektoriális szorzatára, azaz az $\underline{n}$ felületi normálisra;
- a felületi normális és az $X \circ \underline{r}$ vektorok skaláris (belső) szorzatára. Ezt a belső szorzatot kell majd integrálni.

Az $(X \circ \underline{r})\,(u, v)$ vektor:

$$X\,(\underline{r}(u, v)) = (v \cdot uv, u \cdot uv, u \cdot v) = \left(uv^2, u^2 v, uv\right)$$

(az X definícióját tekintve x helyére u, y helyére v, míg z helyére uv került).
Az (u, v) paraméterekhez tartozó felületi pont érintővektorai, illetve a felületi normális:

$$\partial_u \underline{r} = (1, 0, v) \ , \qquad\qquad \partial_v \underline{r} = (0, 1, u) \ ;$$

$$\underline{n} = \partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & v \\ 0 & 1 & u \end{vmatrix} = \ldots = -ve_1 - ue_2 + e_3 = (-v, -u, 1) \ .$$

Az integrálandó belső szorzat:

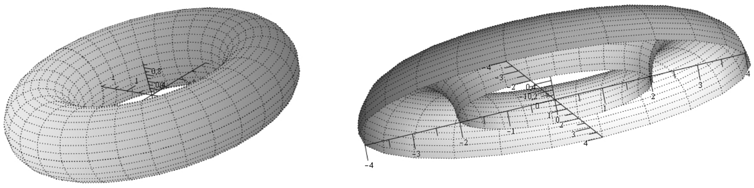
$$\langle (X(\underline{r}(u, v)))\,, \underline{n} \rangle = \left\langle \left(uv^2, u^2 v, uv\right), (-v, -u, 1) \right\rangle =$$
$$= -uv^3 - u^3 v + uv \ .$$

A konkrét (kettős) integrál felírása előtt az integrálási határokat kell megállapítani. Az $x \in [0, 1]$ és $y \in [0, \sqrt{x}]$ feltételeket át kell írni u-ra és v-re vonatkozó feltételekre.

Mivel $x = u$ és $y = v$, így a legegyszerűbb esettel állunk szemben: az új feltételek $u \in [0,1]$, illetve $v \in [0, \sqrt{u}]$ (ezek adják az integrálás határait).

$$\iint_F X = \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{u}} \left(-uv^3 - u^3 v + uv \right) \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u =$$
$$= \int_0^1 \left[-u\frac{v^4}{4} - u^3\frac{v^2}{2} + u\frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \ldots = \int_0^1 \left(-\frac{u^3}{4} - \frac{u^4}{2} + \frac{u^2}{2} \right) \mathrm{d}u =$$
$$= \left[-\frac{u^4}{16} - \frac{u^5}{10} + \frac{u^3}{6} \right]_{u=0}^{u=1} = \ldots = \frac{1}{240} \; .$$

3. *Útmutató:* A felület egy tórusz, amelynek az $[x, y]$ koordinátasík feletti részét kell meghatározni – e pontokat az jellemzi, hogy a harmadik (azaz z) koordinátájuk nemnegatív. A tórusz pontjainak z koordinátája eleget tesz a $z = \sin u$ egyenlőségnek, tehát a tórusz felső részére a $\sin u \geq 0$ jellemző.
A második paraméter végigfuthat egy teljes periódust, azaz $0 \leq v \leq 2\pi$, míg az első paraméterre $0 \leq u \leq \pi$ teljesül (a $\sin u \geq 0$ feltétel miatt). Az integrálás határait így megkaptuk: az u számára 0 és π, a v számára 0 és 2π.



9. Az 1. feladat megoldási algoritmusát felhasználva:

- $X(\underline{r}(u,v)) = (\cos u - \sin u \cos v, \sin u \cos v + \sin u \sin v, \sin u \cos v - \cos u)$
- A felületi normális:

$$\partial_u \underline{r} = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u) \;, \qquad \partial_v \underline{r} = (-\sin u \sin v, \sin u \cos v, 0)$$
$$\underline{n} = \partial_u \underline{r} \times \partial_v \underline{r} = \ldots =$$
$$= (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v) =$$
$$= (\sin^2 u \cos v, \sin^2 u \sin v, \cos u \sin u)$$

- Az integrálandó belső szorzat:

$$\langle X(\underline{r}(u,v)), \underline{n} \rangle = \ldots =$$
$$= (\cos u - \sin u \cos v) \sin^2 u \cos v + \sin u (\cos v + \sin v) \sin^2 u \sin v +$$
$$+ (\sin u \cos v - \cos u) \cos u \sin u = \cos u \sin^2 u \cos v - \sin^3 u \cos^2 v +$$
$$+ \sin^3 u \cos v \sin v + \sin^3 u \sin^2 v + \sin^2 u \cos u \cos v - \cos^2 u \sin u =$$
$$= 2 \cos u \sin^2 u \cos v - \sin^3 u (\cos^2 v - \sin^2 v) + \sin^3 u \cos v \sin v - \cos^2 u \sin u =$$
$$= 2 \cos u \sin^2 u \cos v - \sin^3 u \cos 2v + \sin^3 u \cos v \sin v - \cos^2 u \sin u$$

Így a következő integrált kell kiszámítani:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(2\cos u\sin^2 u\cos v-\sin^3 u\cos 2v+\sin^3 u\cos v\sin v-\cos^2 u\sin u\Big)\,dv du=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[2\cos u\sin^2 u\sin v-\sin^3 u\frac{1}{2}\sin 2v+\sin^3 u\frac{1}{2}\sin^2 v-\cos^2 u\sin u\cdot v\right]_{v=0}^{v=\frac{\pi}{2}}du=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos u\sin^2 u-0+\frac{1}{2}\sin^3 u-\frac{\pi}{2}\cos^2 u\sin u-0+0-0+0\right)du=$$

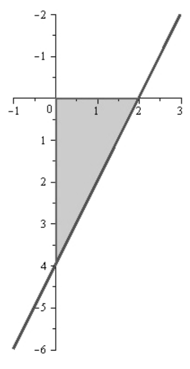
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos u\sin^2 u+\frac{1}{2}\sin u(1-\cos^2 u)-\frac{\pi}{2}\cos^2 u\sin u\right)du=$$

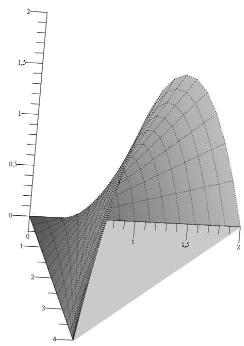
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos u\sin^2 u+\frac{1}{2}\sin u-\frac{1}{2}\sin u\cos^2 u-\frac{\pi}{2}\cos^2 u\sin u\right)du=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cos u\sin^2 u+\frac{1}{2}\sin u-\frac{1+\pi}{2}\cos^2 u\sin u\right)du=$$

$$=\left[\frac{2\sin^3 u}{3}-\frac{\cos u}{2}+\frac{(1+\pi)\cos^3 u}{6}\right]_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}-0+0-0+\frac{1}{2}-\frac{1+\pi}{6}=1-\frac{\pi}{6}$$

12. *Útmutató:* A felület egyenletét tekintve láthatjuk, hogy ebben az esetben használhatjuk az Euler-Monge-féle paraméterezést, így a felület egy paraméteres alakja: $\underline{r}(u,v)=(u,v,uv)$. (A bemutató példánál is ugyanezt a nyeregfelületet tekintettük.) Az $[x,y]$-koordinátasíkon a 3 egyenes egy háromszöget határol, az ehhez tartozó felületdarabon fogunk integrálni. Az integrálási határok megállapításához ezt a háromszöget kell figyelembe venni, és a *kettős integrál témakör*ében tanultakhoz hasonlóan járunk el.
Az első két egyenes az x-tengely és az y-tengely. A harmadik egyenes egyenlete $x+2y=4$, amiből vagy $x=4-2y$, vagy pedig $y=2-\frac{x}{2}$ írható; továbbá ez az egyenes az y-tengelyt a 2-ben, az x-tengelyt a 4-ben metszi.

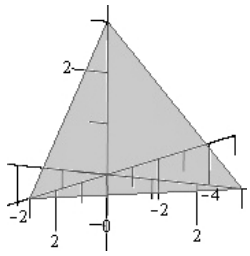




Az első, illetve a második esetben az integrálás határai (figyelembe véve, hogy $x:=u$ és $y:=v$) :

$$\int_0^2\int_0^{4-2v}\dots\,du\,dv\qquad\text{vagy}\qquad\int_0^4\int_0^{2-\frac{u}{2}}\dots\,dv\,du\,.$$

13. *Útmutató:* Az F felület egy sík, amelynek az első térnyolcadba eső része egy háromszög. Ennek a háromszögnek a csúcsai a sík és a három koordinátatengely metszéspontjai. A sík egyenletéből könnyen leolvashatjuk, hogy a három csúcspont koordinátája: $(3,0,0)$, $(0,3,0)$ és $(0,0,3)$.



A háromszög $[x,y]$-koordinátasíkon lévő oldalának egyenlete: $y = 3 - x$. Az integrálás határai a korábbi tanulmányok alapján például: $0 \leq u \leq 3$ és $0 \leq v \leq 3 - u$ (felhasználva, hogy a felület Euler-Monge paraméterezése során $x = u$ és $y = v$).

Végeredmények

2. $-\frac{13}{2}$, 3. $-9\pi^2$, 4. $\frac{4}{3}\pi$, 5. $-\frac{64}{9}(3\pi - 7)$, 6. $6\pi^2$, 7. $-\frac{2}{3}$, 8. $27\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$, 10. -40, 11. -26, 12. $-\frac{16}{15}$, 13. $\frac{9}{2}$.

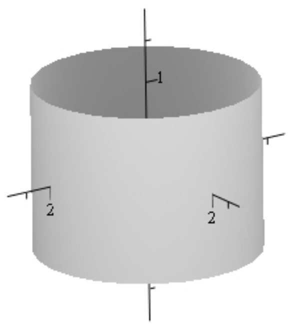
3.9. Példák az integrálátalakító tételekre

GAUSS-OSZTROGRADSZKIJ-TÉTEL: Ha az X vektormező az F zárt felülettel határolt V test minden pontjában és a test határán is folytonosan differenciálható, továbbá n a felületi P pontban a testből kifelé mutató egységnyi felületi normálvektor, akkor igaz a következő összefüggés:

$$\iint_F X = \iiint_V \operatorname{div} X \; \mathrm{d}V$$

(azaz X F-re vonatkozó felületi integrálja egyenlő a div X V-re vonatkozó térfogati integráljával).

1. példa: Számítsuk ki $X = (x, y, z)$ vektormező F felületre vonatkozó integrálját, ahol F az $x^2 + y^2 \leq 4$, $-1 \leq z \leq 1$ hengertest felszíne!



Az F felület az ábrán látható henger palástja, hozzáadva az alsó- és a felső „fedőköröket”.

1. megoldás: $\iint_F X$ kiszámítása
Elsőként bontsuk 3 részre az integrált: az F_1 alapkör, az F_2 fedőkör és az F_3 hengerpalást uniója adja az F felületet:

$$\iint_F X = \iint_{F_1} X + \iint_{F_2} X + \iint_{F_3} X$$

I. Az F_1 alapkörre vonatkozó felületi integrál kiszámításához írjuk fel F_1 paraméteres alakját. Az alapkör ún. implicit egyenletrendszere: $x^2+y^2 \leq 4$ és $z=-1$ (2 sugarú körlap, -1-es magasságban), ebből a paraméteres alak

$$\underline{r}_1(u,v) = (u\cos v, u\sin v, -1) \qquad 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

(felhasználva, hogy egy 2 sugarú kör előállítása a síkban: $\gamma(v) = (2\cos v, 2\sin v)$, $0 \leq v \leq 2\pi$).
A felületi integrálhoz szükség van a felületi normálisra ($\underline{n}_1$):

$$\partial_u \underline{r}_1 = (\cos v, \sin v, 0)\ , \qquad \partial_v \underline{r}_1 = (-u\sin v, u\cos v, 0)\ ;$$
$$\underline{n}_1 = \partial_u \underline{r}_1 \times \partial_v \underline{r}_1 = \ldots = (0,0,u\cos^2 v + u\sin^2 v) = (0,0,u)$$

Mivel $u \geq 0$, ezért itt $\underline{n}_1$ a z-tengelyen „felfelé”, a henger belsejébe mutat. Emiatt $\underline{n}_1 = (0,0,-u)$ választással élünk, így már kifelé mutató a normálvektor. Folytatva a felületi integrál kiszámítását:

$$X(\underline{r}_1(u,v)) = (u\cos v, u\sin v, -1) \quad \Longrightarrow \quad \langle X(\underline{r}_1(u,v)), \underline{n}_1\rangle = u$$
$$\iint_{F_1} X = \int_0^2 \int_0^{2\pi} u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^2 [uv]_{v=0}^{v=2\pi} \, \mathrm{d}u = \int_0^2 2\pi u \, \mathrm{d}u = \left[\pi u^2\right]_{u=0}^{u=2} = 4\pi$$

II. Az F_2 fedőlapnál az előző ponthoz hasonlóan járunk el. A fedőlap implicit előállítása $x^2+y^2 \leq 4$ és $z=1$, így a paraméteres alakja

$$\underline{r}_2(u,v) = (u\cos v, u\sin v, 1) \qquad 0 \leq u \leq 2,\ 0 \leq v \leq 2\pi$$

A részletes számolásokat mellőzve, itt az $\underline{n}_2 = (0,0,u)$. (Ez most jó irányú normálvektor, mert a henger belsejét tekintve kifelé mutató.) Az alapkörnél látottak alapján

$$\iint_{F_2} X = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \langle X(\underline{r}_2(u,v)), \underline{n}_2\rangle \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^2 \int_0^{2\pi} u \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \ldots = 4\pi$$

III. Végül kiszámítjuk a hengerpalástra (F_3) vonatkozó felületi integrált. A palást implicit előállítása: $x^2+y^2=4$ (az $[x,y]$-koordinátasíkra való vetülete kör) és $-1 \leq z \leq 1$. Innen

$$\underline{r}_3(u,v) = (2\cos u, 2\sin u, v) \qquad 0 \leq u \leq 2\pi,\ -1 \leq v \leq 1$$

adódik. Az $\underline{n}_3$ normálvektor:

$$\partial_u \underline{r}_3 = (-2\sin u, 2\cos u, 0)\ , \qquad \partial_v \underline{r}_3 = (0,0,1)\ ;$$
$$\underline{n}_3 = \partial_u \underline{r}_3 \times \partial_v \underline{r}_3 = (2\cos u, 2\sin u, 0)$$

(Az $\underline{n}_3$ a hengert tekintve kifelé mutató, tehát jó.) Folytatva a számolásunkat:

$$X(\underline{r}_3(u,v)) = (2\cos u, 2\sin u, v) \quad \Longrightarrow \quad \langle X(\underline{r}_3(u,v)), \underline{n}_3\rangle = 4\cos^2 u + 4\sin^2 u = 4$$
$$\iint_{F_3} X = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 4 \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} [4v]_{v=-1}^{v=1} \, \mathrm{d}u = \int_0^{2\pi} 8 \, \mathrm{d}u = [8u]_{u=0}^{u=2\pi} = 16\pi$$

Összegezve a 3 integrált:

$$\iint_F X = \iint_{F_1} X + \iint_{F_2} X + \iint_{F_3} X = 4\pi + 4\pi + 16\pi = 24\pi$$

2. megoldás: $\iiint_V \operatorname{div} X \, \mathrm{d}V$ kiszámítása

Az X vektormező divergenciája: $\operatorname{div} X = 1 + 1 + 1 = 3$.

A hengert mint testet polárkoordinátákra* áttérve célszerű felírni: x és y helyett két új ismeretlent vezetünk be r-et és φ-t. Az $x^2 + y^2 \leq 4$ feltétel egy 2 sugarú körlapot ír le az $[x, y]$-koordinátasíkban (vagy az azzal párhuzamos síkokban). Ezt a körlapot úgy is felírhatjuk, hogy a körlapon belül a kör sugarát mozgatjuk 0 és 2 között, a sugár x-tengellyel bezárt szögét pedig 0 és 2π között változtathatjuk: $0 \leq r \leq 2$ és $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. A harmadik (azaz z) koordináta változatlanul -1 és 1 között mozog.

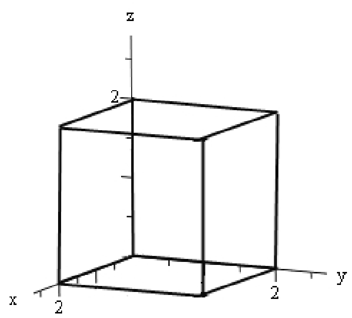
Ezek alapján a térfogati integrál:

$$\iiint_V \operatorname{div} X \, \mathrm{d}V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} 3 \, \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_0^2 \int_0^{2\pi} [3z]_{z=-1}^{z=1} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6 \, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}r = \int_0^2 [6\varphi]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}r = \int_0^2 12\pi \, \mathrm{d}r = [12\pi r]_{r=0}^{r=2} = 24\pi$$

*(Polárkoordinátákat lásd még Kettős integrál fejezet 2/c feladata.)

2. példa: Számítsuk ki az $X = (-x^2 + y + z, x - y^2 + z, x + y - z^2)$ vektormező felületi integrálját az $F\colon 0 \leq x, y, z \leq 2$ kocka felszínére vonatkozóan!



Az F felület 6 részre bontható, a kocka 6 oldalára.

1. megoldás: $\iint_F X$ kiszámítása

A kocka 6 lapjára vonatkozó felületi integrálokat kell összeadni:

$$\iint_F X = \iint_{F_1} X + \iint_{F_2} X + \ldots + \iint_{F_6} X$$

I. Legyen F_1 a $(2, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(0, 2, 0)$ és $(0, 0, 0)$ pontok által meghatározott négyzet. Itt $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$ és $z = 0$, ezért e négyzet paraméteres felírása:

$$\underline{r}_1(u, v) = (u, v, 0) \qquad 0 \leq u, v \leq 2$$

A felület normálvektora: $\partial_u \underline{r}_1 \times \partial_v \underline{r}_1 = (0, 0, 1)$, ezt kifelé mutató normálvektorra cserélve: $\underline{n}_1 = (0, 0, -1)$. Az $X(\underline{r}_1(u, v)) = (-u^2 + v, u - v^2, u + v)$, továbbá $\langle X(\underline{r}_1(u, v)), \underline{n}_1 \rangle = -u - v$, így az integrál:

$$\iint_{F_1} X = \int_0^2 \int_0^2 (-u - v) \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u = -\int_0^2 \left[uv + \frac{v^2}{2} \right]_{v=0}^{v=2} \mathrm{d}u =$$

$$= -\int_0^2 (2u + 2) \, \mathrm{d}u = -\left[u^2 + 2u \right]_{u=0}^{u=2} = -8$$

A többi lapnál is hasonló a számolás, és minden esetben az integrál értéke -8.

II. F_2 felület: $(2,0,0)$, $(2,2,0)$, $(2,2,2)$ és $(2,0,2)$ pontok alkotta négyzet, ahol $\underline{r}_2(u,v) = (2,u,v)$, $0 \le u,v \le 2$ és $\underline{n}_2 = (1,0,0)$.

III. F_3 felület: $(2,2,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,2)$ és $(2,2,2)$ pontok alkotta négyzet, ahol $\underline{r}_3(u,v) = (u,2,v)$, $0 \le u,v \le 2$ és $\underline{n}_3 = (0,1,0)$.

IV. F_4 felület: $(0,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,2,2)$ és $(0,0,2)$ pontok alkotta négyzet, ahol $\underline{r}_4(u,v) = (0,u,v)$, $0 \le u,v \le 2$ és $\underline{n}_4 = (-1,0,0)$.

V. F_5 felület: $(0,0,0)$, $(0,0,2)$, $(2,0,2)$ és $(2,0,0)$ pontok alkotta négyzet, ahol $\underline{r}_5(u,v) = (u,0,v)$, $0 \le u,v \le 2$ és $\underline{n}_5 = (0,-1,0)$.

VI. F_6 felület: $(2,0,2)$, $(2,2,2)$, $(0,2,2)$ és $(0,0,2)$ pontok alkotta négyzet, ahol $\underline{r}_6(u,v) = (u,v,2)$, $0 \le u,v \le 2$ és $\underline{n}_6 = (0,0,1)$.

A keresett felületi integrál:

$$\iint_F X = \iint_{F_1} X + \iint_{F_2} X + \ldots + \iint_{F_6} X = -8 - 8 - \ldots - 8 = 6 \cdot (-8) = -48$$

2. megoldás: $\iiint_V \operatorname{div} X \,\mathrm{d}V$ kiszámítása
Az X vektormező divergenciája: $\operatorname{div} X = -2x - 2y - 2z$. Az x, y, z ismeretlenek 0 és 2 között mozognak, így a térfogati integrál:

$$\iiint_V \operatorname{div} X \,\mathrm{d}V = \int_0^2 \int_0^2 \int_0^2 (-2x - 2y - 2z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^2 \int_0^2 \Big[2xz + 2yz + z^2\Big]_{z=0}^{z=2} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_0^2 \int_0^2 (4x + 4y + 4)\mathrm{d}y\mathrm{d}x =$$
$$= -\int_0^2 \Big[4xy + 2y^2 + 4y\Big]_{y=0}^{y=2} \mathrm{d}x = -\int_0^2 (8x + 16)\mathrm{d}x = -\Big[4x^2 + 16x\Big]_{x=0}^{x=2} = -48$$

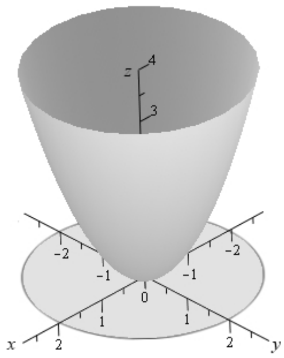
STOKES-TÉTEL: Ha az X vektormező a γ zárt görbével határolt egyszeresen összefüggő, irányítható F felületen és annak határvonalán folytonosan differenciálható, továbbá $(\underline{n}, \dot{\gamma})$ pozitív irányítású (ahol $\underline{n}$ a felület normálvektormezője) akkor

$$\int_\gamma X = \iint_F \operatorname{rot} X$$

(azaz az X γ szerinti görbementi integrálja megegyezik a rotációjának F-re vonatkozó felületi integráljával).

Példa: Számítsuk ki az $X = (x + y + z, xyz, x^2)$ vektormező rotációjának felületi integrálját a $z = x^2 + y^2$ paraboloid $z \le 4$ feltételnek eleget tevő részén!

Először írjuk fel paraméteresen a feladatban szereplő paraboloidot. Az Euler-Monge paraméterezést ($x = u$, $y = v$ és $z = f(u,v)$) felhasználva: $\underline{r}(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u, v \in \mathbb{R}$. – A paraboloidnak csupán arra a részére van szükségünk, amelyre teljesül, hogy $z \le 4$. E paraboloid-darab elhelyezkedése a térben:



Látható, hogy az (u, v) számpár egy körlapon helyezkedik el, ezért érdemes polárkoodinátákra áttérni: $u = \mathrm{r}\cos\varphi$ és $v = \mathrm{r}\sin\varphi$. Ebből a felületdarab egy másik paraméterezését nyerjük:

$$\underline{r}(\mathrm{r}, \varphi) = (\mathrm{r}\cos\varphi, \mathrm{r}\sin\varphi, \mathrm{r}^2) \qquad 0 \le \mathrm{r} \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

A rajzról leolvasható a határoló görbe is, egy 2 sugarú, $z = 4$ magasságban lévő kör:

$$\gamma(t) = (2\cos t, 2\sin t, 4) \qquad 0 \le t \le 2\pi \ .$$

1. megoldás: $\iint_F \mathrm{rot}\, X$ kiszámítása

Az X rotációja: $\mathrm{rot}\, X = \ldots = (-xy, 1 - 2x, yz - 1)$.

A felületi integrál felírásához szükséges adatok (amíg lehet, a felület eredeti paraméterezését használjuk):

$$\begin{gathered} \partial_u \underline{r} = (1, 0, 2u),\ \partial_v \underline{r} = (0, 1, 2v) \quad \Longrightarrow \quad \underline{n} = (-2u, -2v, 1) \\ \mathrm{rot}\, X(\underline{r}(u, v)) = (-uv, 1 - 2u, u^2 v + v^3 - 1) \\ \langle \mathrm{rot}\, X(\underline{r}(u, v)), \underline{n} \rangle = \ldots = 3u^2 v + 4uv - 2v + v^3 - 1 \end{gathered}$$

(Az $\underline{n}$ 3. koordinátájából látható, hogy a vektor – minden pontban – felfelé mutat és így pozitív irányítású vektorrendszert képez a $\dot{\gamma}$ vektorral.) Áttérve a polárkoordinátás paraméterezésre ($u = \mathrm{r}\cos\varphi$ és $v = \mathrm{r}\sin\varphi$), továbbá felhasználva a 3.3. fejezet 2/c feladatának megoldásában leírtakat, a felületi integrál:

$$\iint_F \mathrm{rot}\, X = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(3\mathrm{r}^3\cos^2\varphi\sin\varphi + 4\mathrm{r}^2\cos\varphi\sin\varphi - 2\mathrm{r}\sin\varphi + \mathrm{r}^3\sin^3\varphi - 1\right) \cdot \mathrm{r}\ \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\mathrm{r} =$$

$$= \int_0^2 \left[-\mathrm{r}^4\cos^3\varphi + 2\mathrm{r}^3\sin\varphi + 2\mathrm{r}^2\cos\varphi - \mathrm{r}^4\cos\varphi + \mathrm{r}^4\frac{\cos^3\varphi}{3} - \mathrm{r}\cdot\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \mathrm{d}\mathrm{r} =$$

$$= \ldots = \int_0^2 -2\pi \cdot r\ \mathrm{d}\mathrm{r} = \left[-\pi\mathrm{r}^2\right]_{\mathrm{r}=0}^{\mathrm{r}=2} = -4\pi$$

A fenti integrál kiszámításánál felhasználtuk, hogy $\int \sin^3\varphi\ \mathrm{d}\varphi = \int \sin\varphi(1 - \cos^2\varphi)\ \mathrm{d}\varphi$.

2. megoldás: $\int_\gamma X$ kiszámítása

Egyszerű görbementi integrált kell meghatároznunk:

$$\begin{aligned} X(\gamma(t)) &= (2\cos t + 2\sin t + 4, 16\cos t\sin t, 4\cos^2 t) \\ \dot{\gamma}(t) &= (-2\sin t, 2\cos t, 0) \\ \langle X(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle &= -4\sin t\cos t + 4\sin^2 t - 8\sin t + 32\cos^2 t\sin t = \\ &= -(2\sin 2t + 4\sin^2 t + 8\sin t - 32\cos^2 t\sin t) \end{aligned}$$

Így az integrál:

$$\int_\gamma X = -\int_0^{2\pi} \left(2\sin 2t + 4\sin^2 t + 8\sin t - 32\cos^2 t \sin t\right) \mathrm{d}t =$$

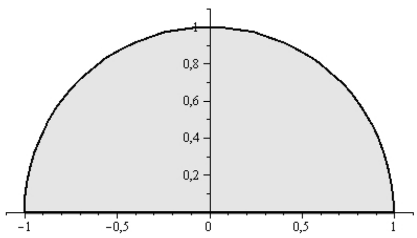
$$= -\left[-\cos 2t + 2(t - \sin t\cos t) - 8\cos t + 32\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{2\pi} = -2\cdot 2\pi = -4\pi$$

Felhasználva, hogy a $\sin^2 t$ kifejezést parciálisan integráltuk.

SÍKBELI STOKES-TÉTEL (Green-formula): Ha a pozitív körüljárású γ zárt görbe az $F \subset \mathbb{R}^2$ síkbeli tartományt fogja közre, és $X = (X_1, X_2)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik, akkor

$$\int_\gamma X = \int_A (\partial_x X_2 - \partial_y X_1)\mathrm{d}A\ .$$

Példa: Számítsuk ki az $X = (xy, 3x^2)$ vektormező görbementi integrálját, ahol a görbe az $x^2 + y^2 = 1$ egységkör y szerinti pozitív részét határolja!



1. megoldás: $\int_\gamma X$ kiszámítása
A γ mint határoló görbe két részre bontható. Egyik része az x-tengely -1-től 1-ig tartó szakasza, a másik része az egységkör „felső” fele:

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$$
$$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad -1 \le t \le 1 \qquad \text{és} \qquad \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \le t \le \pi$$

I. Tekintsük először a γ_1 görbére vonatkozó görbementi integrált. A szükséges adatok:

$$X(\gamma_1(t)) = (0, 3t^2)$$
$$\dot\gamma_1(t) = (1, 0)$$
$$\langle X(\gamma_1(t)), \dot\gamma_1(t)\rangle = 0$$

Az integrál: $\displaystyle\int_{\gamma_1} X = \int_0^1 0\ \mathrm{d}t = 0\ .$

II. A γ_2-re vonatkozó görbementi integrál:

$$X(\gamma_2(t)) = (\cos t \sin t, 3\cos^2 t)$$
$$\dot\gamma_2(t) = (-\sin t, \cos t)$$
$$\langle X(\gamma_2(t)), \dot\gamma_2(t)\rangle = -\sin^2 t\cos t + 3\cos^3 t$$

Így:

$$\int_{\gamma_2} X = \int_0^\pi (-\sin^2 t\cos t + 3\cos^3 t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(-\sin^2 t\cos t + 3\cos t(1-\sin^2 t)\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\pi \Big(-\sin^2 t\cos t + 3\cos t - 3\cos t\sin^2 t\Big)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(-4\sin^2 t\cos t + 3\cos t\Big)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-4\frac{\sin^3 t}{3} + 3\sin t\right]_0^\pi = \ldots = 0\ .$$

A keresett integrál értéke: $\int_\gamma X = \int_{\gamma_1} X + \int_{\gamma_2} X = 0$.

2. megoldás: $\int_A(\partial_x X_2 - \partial_y X_1)\mathrm{d}A$ kiszámítása
A komponensfüggvények megfelelő parciális deriváltjai: $\partial_x X_2 = 6x$ és $\partial_y X_1 = x$. Ezek különbsége: $\partial_x X_2 - \partial_y X_1 = 6x - x = 5x$.
A félkör egy elsőfajú normáltartomány, ahol $-1 \le x \le 1$ és $0 \le y \le \sqrt{1-x^2}$:

$$\int_A(\partial_x X_2 - \partial_y X_1)\mathrm{d}A = \int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 5x\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = 5\int_{-1}^1 [xy]_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}x =$$

$$= 5\int_{-1}^1 x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\int_{-1}^1 -2x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{5}{2}\left[\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^1 = 0\ .$$

4. fejezet

A valószínűségszámítás alapjai

4.1. Kombinatorika. Klasszikus valószínűségi mező

Rövid elméleti összefoglaló

1. *Ismétlés nélküli permutáció:* n elem sorba rendezése n helyre. Az összes lehetséges eset száma: $P_n = n!$

2. *Ismétléses permutáció:* n elem sorba rendezése n helyre, ahol r-féle különböző elem szerepel. Az összes lehetséges esetek száma: $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$

3. *Ismétlés nélküli kombináció:* n elemből k kiválasztása. Az összes lehetséges esetek száma: $C_n^k = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $k \leq n$

4. *Ismétléses kombináció:* n elemből k kiválasztása, ahol egy elem többször is kiválasztható. Az összes lehetséges esetek száma: $C_n^{k,i} = \dbinom{n+k-1}{k}$

5. *Ismétlés nélküli variáció:* n elemből k kiválasztása és sorba rendezése. Az összes lehetséges esetek száma: $V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $k \leq n$

6. *Ismétléses variáció:* n elemből k kiválasztása és sorba rendezése, ahol egy elem többször is kiválasztható. Az összes lehetséges esetek száma: $V_n^{k,i} = n^k$

Egy kísérlet lehetséges kimeneteleit *elemi esemény*eknek, az elemi események halmazát *eseménytér*nek hívjuk. Az eseménytér részhalmazai az *esemény*ek. Tekintsünk egy P függvényt, amely minden eseményhez (azaz halmazhoz) hozzárendel egy 0 és 1 közötti számot: az esemény *valószínűség*ét. Jelölés: egy A esemény valószínűsége $P(A) \in \mathbb{R}$. Ennek a függvénynek rendelkeznie kell azzal a tulajdonsággal, hogy a *lehetetlen esemény* (azaz az üres halmaz) valószínűsége 0, a *biztos esemény* (azaz a teljes eseménytér) valószínűsége 1 legyen, és diszjunkt események valószínűségeinek összege egyezzen meg a két esemény uniójának (azaz a két esemény *összeg*ének) valószínűségével. Ekkor azt mondjuk, hogy megadtunk egy *valószínűségi mező*t. Amennyiben az eseménytér véges halmaz, és minden elemi esemény egyenlő valószínűségű, *klasszikus valószínűségi mező*ről beszélünk.

Klasszikus valószínűségi mezőben egy A esemény valószínűségét meghatározhatjuk az alábbi képlettel:

$$P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}} .$$

A fenti fogalmak megértéséhez tekintsünk egy egyszerű példát. – Vegyünk egy dobókockát, és dobjuk fel egyszer. Egy ilyen kockadobás egy elemi esemény. A teljes eseménytér a dobás 6 lehetséges kimenetelét tartalmazza. Legyen A az az esemény, hogy „egyet vagy kettőt vagy ... vagy hatot dobok a kockával" – ez biztosan bekövetkezik, ez a biztos esemény, valószínűsége pedig 1. Legyen B az az (elemi) esemény, hogy „hármast dobok". Összesen 6 eset fordulhat elő a kockadobásnál, ebből nekünk egyetlen eset jó, így a valószínűség: $P(B) = \frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}} = \frac{1}{6}$. Legyen C : { páros számot dobok}. Ekkor 3 jó eset létezik: kettőt, négyet vagy hatot dobok; ebből a C esemény valószínűsége: $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Feladatok

1. Hány olyan hatjegyű telefonszámot alkothatunk az 1,3,4,6,8,9 számjegyekből, amelyben a harmadik jegy 4-es, és minden számjegy csak egyszer fordul elő?
2. Hány hétjegyű szám állítható elő a 0,1,2,3,4,5,6 számjegyekből, ha egy számjegy csak egyszer szerepelhet a számban?
3. Az A, B, C, D, E, F, G betűkből hány olyan permutáció képezhető, amelyben a magánhangzók egymás mellett szerepelnek?
4. Hány 13 betűből álló „szó" alkotható a KOMBINATORIKA szóból?
5. Hány ötjegyű szám írható fel a 2,2,4,4,4 számjegyekből?
6. Egy pénzérmét nyolcszor egymás után feldobunk. Hányféle olyan dobássorozat van, amelyben 4 fej és 4 írás fordul elő?
7. Egy sakkversenyen 16 sakkozó vesz részt. Körmérkőzést játszanak, mégpedig úgy, hogy minden pár kétszer mérkőzik, világos és sötét színekkel felváltva. Hány mérkőzésre kerül sor a versenyen?
8. Hányféleképpen lehet egy dobókockát négyszer egymás után feldobni úgy, hogy legalább az egyik dobás 6-os legyen?
9. Hány különböző lottószelvényt tölt ki az, aki három számot állandónak vesz minden szelvényen?
10. A raktárban 15 üveg bor van: 10 üveg fehér és 5 üveg vörös bor. Hányféleképpen választhatunk ki 6 üveget úgy, hogy köztük kettőben legyen vörös bor?
11. Három egyforma kockát feldobunk. Hányféle eredményt kaphatunk, ha a kockákat nem különböztetjük meg?
12. 20 termék közül, melyek között 8 A-osztályú, a többi B-osztályú, kiválasztunk ötöt. Hány olyan választás létezik, melyben 2 db A-osztályú és 3 db B-osztályú termék van?
13. A 3,5,6,8,9 számjegyekből legalább hány számjegyből álló számokat kell felírnunk, hogy legalább 625 különböző számot kapjunk?

14. Hány négyjegyű, 2000-nél nem nagyobb számot képezhetünk az 1,2,3,4,5 számjegyekből, ha
    (a) a számjegyek ismétlődését nem engedjük meg?
    (b) a számjegyek ismétlődését megengedjük?
15. Az egyik áruházba egy árucikkből naponta 6 egyforma nagyságú láda érkezik. Egy-egy láda minősülhet I., II. vagy III. osztályúnak. Hányféle lehetőség adódik az áru minőség szerinti napi elosztására?
16. Egy üzletben 20 eladó közül 11 szakképzett, 9 szakképzetlen. Hányféleképpen lehet közülük 8 tagú csoportot kiválasztani úgy, hogy a csoportban a szakképzetlenek száma legfeljebb 2 legyen?
17. Egy kockával öt egymás utáni dobásból álló sorozatot dobunk. Hány olyan dobássorozat lehet, amelyben egy darab 1-es és egy darab 2-es dobás fordul elő (a dobások sorrendjét is figyelembe véve)?
18. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy kockával dobva
    (a) legalább négyet dobunk?
    (b) legfeljebb négyet dobunk?
    (c) párosat dobunk?
    (d) ötnél kisebb páratlan számot dobunk?
    (e) kettőnél nagyobb páros, vagy ötnél kisebb páratlan számot dobunk?
19. Feldobunk egy érmét. Ha az eredmény fej, még egyszer dobunk, ha írás, még kétszer. Mennyi a valószínűsége, hogy összesen egy fejet dobunk?
20. Egy egyetem 500 hallgatója közül 300 beszél német nyelven, 200 beszél angolul, 50 beszél franciául, 20 beszél németül és franciául, 30 beszél angolul és franciául, 20 beszél németül és angolul, 10 beszél mindhárom nyelven. Ha találomra kiválasztunk egy hallgatót, akkor mennyi a valószínűsége annak, hogy az illető
    (a) mindhárom nyelven beszél?
    (b) angolul beszél?
    (c) csak angolul beszél?
21. Egy kockát egymás után hatszor feldobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy
    (a) az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számok mindegyike felülre kerül?
    (b) az első dobás eredménye 6-os, a többi pedig ettől különböző?
    (c) az első két dobás 6-os, a többi pedig 6-tól és egymástól is különböző?
    (d) két dobás 6-os, a többi pedig ettől különböző?
    (e) egyik dobás sem lesz 6-os?
    (f) mind a hat dobás páros szám lesz?

22. Négy pénzdarabot dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy
    (a) mind a négy fej lesz?
    (b) kettő fej, kettő írás lesz?
    (c) legalább az egyik fej lesz?

23. Három kockát dobunk fel egyszerre. Mennyi a valószínűsége, hogy a dobott számok összege 9 lesz?

24. Egy dobozban 3 piros golyó van. Hány fehér golyót kell hozzátenni, hogy annak valószínűsége, hogy először fehér golyót húzunk, nagyobb legyen 0,9-nél?

25. Egy urnában 4 piros, 3 fehér és 2 zöld golyó van. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ha egyszerre két golyót kihúzunk, azok egyforma színűek lesznek?

26. Mennyi a valószínűsége annak, hogy n ember között nincs két olyan, akinek ugyanazon a napon van a születésnapja?

27. 50 termékből, melyek között 5 selejtes található, találomra kiválasztunk ötöt.
    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy ezek között 2 selejtest találunk, ha a mintavétel visszatevéssel történik?
    (b) Megváltozik-e az előbbi valószínűség, ha 100 termékből történik a mintavétel, változatlan selejtarány mellett?

28. Mennyi a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kitöltött ötöslottó-szelvényen 0, 1, 2, 3, 4, 5 találatunk lesz?

29. Egy felvonó a földszintről 7 személlyel indul felfelé. Az épület 10 emeletes. Ha minden emeleten egyforma számú szoba van, és mindenkit lifttel szállítanak, akkor feltehető, hogy az utasok azonos valószínűséggel szállnak ki bármelyik emeleten. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a hét utas közül egyik emeleten se száll ki egynél több?

30. Elhelyeztünk 3 dobozba 8 különböző tárgyat. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyes dobozokba rendre 2, 4, 2 tárgy kerül?

31. Egy üzletben 3 pénztárhoz véletlenszerűen 10 vásárló érkezik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első pénztárhoz 4, a másodikhoz és a harmadikhoz pedig 3-3 vásárló kerül?

32. Egy 9 tagú társaság felszáll a három kocsiból álló villamosra; a nagy tolongásban a társaság minden tagja csak azt nézi, hogy feljusson a villamosra és nem törődik azzal, hogy társai melyik kocsiba szállnak. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a három kocsiba a társaság 3-3 tagja jut?

33. Egy vendéglő egyik asztalánál 9 vendég ül. Összesen 3 üveg sört, 4 tésztát és 2 kávét rendelnek. (Mindegyik vendég csak egy dolgot rendel.) A pincér emlékszik arra, hogy miből mennyit kell hoznia, de teljesen elfelejtette, hogy kinek mit kell adnia. Találomra szétosztja, amit hozott. Mennyi a valószínűsége annak, hogy mindenki azt kapja, amit kért?

34. Egy három házaspárból álló társaság táncol. Az egyes párokra oszlás egyenlően valószínű. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy bizonyos pillanatban senki se táncol a saját feleségével?

35. Egy háziasszony négy vendégének feketekávét készít, és ízlésüknek megfelelően a kávékba 0, 1, 2 illetve 3 cukrot tesz. Mire a felkevert kávékat beviszi, már elfelejti, hogy melyik kié. Mennyi a valószínűsége, hogy egyik vendég sem jut a kívánt édességű kávéhoz?

36. Egy 1000 darabot tartalmazó alapsokaságból 50 darabból álló mintát veszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy a mintában egy selejtes darabot találunk, ha a selejtes darabok aránya 2%?

37. Egy urnában 5 fehér, 2 fekete és 3 vörös golyó van. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az urnából 6 golyót kihúzva azok között 2 fehér, 1 fekete és 3 vörös legyen? (A húzás egyszerre, vagy ami vele ekvivalens, egymás után visszatevés nélkül történik.)

38. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kitöltött totószelvény 10, 11, 12, illetve 13 találatos lesz?

39. Két fiú és három lány sakkversenyen vesz részt. A nyerés valószínűsége nemenként azonos, de minden fiú kétszer esélyesebb, mint bármelyik lány. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a sakkversenyt lány nyeri?

40. Egy rekeszbe rendezetlenül lett behelyezve 20 nő és 10 férfi személyi nyilvántartási lapja. A férfiaknak is és a nőknek is a fele mérnök. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiemelt lapok egy férfi, egy mérnök, illetve egy férfi mérnök adatai vannak?

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

2. A feladat szerint 7 számjegyet kell 7 helyre elhelyezni úgy, hogy minden számjegy csak egyszer szerepelhet, így ismétlés nélküli permutációról van szó. Azonban 0-val nem kezdődhet a szám, csak 1-6 számok valamelyikével. Ez hatféle lehetőség. A fennmaradó 6 helyre a maradék 6 szám kerül, ezért a megoldás:

$$6 \cdot P_6 = 6 \cdot 6! = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6 \cdot 720 = 4320 \ .$$

5. A 2,2,4,4,4 számjegyekből 5 jegyű szám úgy alakítható ki, hogy minden számjegyet felhasználunk. Más megfogalmazásban 5 elemet kell 5 helyre elrendezni úgy, hogy vannak azonos „típusú” elemek – ez ismétléses permutáció:

$$P_5^{2,3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 = 10 \ .$$

7. Tegyük fel, hogy a két helyet tüntetünk ki: a versenyző fehér színnel játszik, illetve fekete színnel játszik. Erre a két helyre „ültethetjük” a 16 versenyzőt – ezzel a módszerrel minden lehetséges játszmát lefedtünk, például azt is, hogy minden pár kétszer mérkőzik meg egymással (világos és sötét színekkel felváltva). Röviden 16

elemből 2-t választunk ki úgy, hogy a sorrend számít (világos vagy sötét színnel játszik). Ez egy ismétlés nélküli variáció:

$$V_{16}^2 = \frac{16!}{(16-2)!} = \frac{16!}{14!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 14} = 15 \cdot 16 = 240 \ .$$

Egyszerű okoskodással is erre az eredményre jutottunk volna. Ha rögzítjük azt, hogy egy sakkozó (a 16-ból) például világos színnel játszik, akkor 15 ellenfele lesz: $16 \cdot 15$. Ezzel a gondolatmenettel biztosítottuk azt is, hogy minden pár kétszer játszik (minden játékos világos és sötét színnel is).

8. Egy dobókocka négyszer egymás utáni feldobását a következőképpen írhatjuk le. A 4 dobás 4 helynek számít. Minden helyre 1-től 6-ig kerülhetnek számok, így nyilván egy szám több helyre is kerülhet. Ez egy ismétléses variációnak felel meg: $V_6^{4,i}$. A „legalább az egyik dobás 6-os” felírása úgy is lehetséges, hogy az összes esetből kivonjuk azokat az eseteket, amikor „nincs 6-os dobás”. (Ez jóval egyszerűbb, mint azon esetek felírása, hogy „1 db 6-os dobás van”, „2 db 6-os dobás van” stb.) A „nincs 6-os dobás” állítás annyit tesz, hogy a 6-oson kívül minden számot felhasználhatunk a 4 helyre (dobásra): $V_5^{4,i}$. A keresett esetek száma:

$$V_6^{4,i} - V_5^{4,i} = 6^4 - 5^4 = 1296 - 625 = 671 \ .$$

10. A feladatban a kérdés az, hogy hányféleképpen tudunk kiválasztani a borok közül 4 fehéret és 2 vöröset. Az 5 üveg vörösborból 2 üveget és a 10 üveg fehérborból 4-et kell kiválasztani úgy, hogy a sorrend nem számít – ez két ismétlés nélküli kombináció. Mivel a kétféle bor kiválasztásait minden lehetséges módon párosítani kell, ez a két kombináció szorzatát jelenti:

$$C_5^2 \cdot C_{10}^4 = \binom{5}{2} \cdot \binom{10}{4} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 10 = 2100 \ .$$

11. Ha a kockák feldobása egyszerre, a kockák megkülönböztetése nélkül történik, akkor azt úgy is tekinthetjük, hogy a „sorrendjük” nem számít. Mind a 3 kocka 6 különböző értéket vehet fel, azaz 6 elem kerül 3 „helyre” – a megoldás egy ismétléses kombináció:

$$C_6^{3,i} = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 7 \cdot 8 = 56 \ .$$

19. Annak a valószínűsége, hogy először fejet dobunk: $\frac{1}{2}$. Ekkor újabb dobás következik, ahol az eredmény szintén lehet fej vagy írás, ugyanakkora valószínűséggel. E két esemény együttes valószínűsége $\frac{1}{2}$, így az egyes események valószínűsége $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{4}$. Ugyanúgy $\frac{1}{2}$ valószínűséggel dobunk először írást. Ebben az esetben két további dobás következik. Az első plusz dobás – az előző logikát követve – $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{4}$ valószínűséggel fej vagy írás. A második plusz dobás szintén kétféle lehet. Ha az első plusz dobás fej volt, akkor a második plusz dobásnál a fej vagy írás dobásának valószínűsége már csak $\frac{1}{8}$ és $\frac{1}{8}$ lehet. Ugyanígy járunk el akkor is, ha az első plusz dobás írás volt. – Összegezve: Jelöljük el a dobásokat mint eseményeket. Például: $F = \{\text{az első dobás fej}\}$, $FFI = \{\text{az első két dobás fej, a harmadik írás}\}$, stb.

Ekkor az egyes események valószínűsége:

$$P(F) = P(I) = \frac{1}{2}$$
$$P(FF) = P(FI) = \frac{1}{4}$$
$$P(IFF) = P(IFI) = P(IIF) = P(III) = \frac{1}{8}$$

Az adott $A = \{\text{egy fejet dobtunk}\}$ esemény 3 esetben következik be: FI vagy IFI vagy IIF esetekben. A keresett valószínűség e három esemény valószínűségének összege:

$$P(A) = P(FI) + P(IFI) + P(IIF) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\ .$$

23. Jelölje A a kérdéses eseményt. A feladatot a $P(A) = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$ képlettel oldjuk meg.
A 3 kocka együttes feldobása esetén elvileg nem számít a sorrend, így azt gondolhatnánk, hogy az összes eseményt $C_6^{3,i}$ adja. Ebben van igazság, azonban ez a gondolatmenet most tévútra vezet.
Nagyon fontos ugyanis, hogy klasszikus valószínűségi mezőben a fent említett képletnél *minden egyes elemi esemény ugyanakkora valószínűséggel következik be.* Egyszerűen végiggondolható, hogy annak a valószínűsége, hogy „3 db 6-ost dobtunk" kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy „2 db 6-ost és 1 db 1-est dobtunk".
Ezt a problémát úgy oldjuk fel, hogy a dobókockákat – bár egyszerre dobunk velük – mégis megkülönböztetjük. A kockák megkülönböztetésével külön eseménynek minősül például a $(6,6,6)$, $(1,6,6)$, $(6,1,6)$ és $(6,6,1)$ dobássorozat. A megkülönböztetés egyfajta sorbarendezést jelent (1. kocka, 2. kocka és 3. kocka).
Így az összes esemény 6 elem 3 helyre történő, ismétlést megengedő kiválasztása és sorba rendezése: $V_6^{3,i}$.
A kedvező eseteket egyszerűen írjuk fel: Vizsgáljuk meg, hogy mikor kapunk a 3 dobott érték összegeként 9-et, feltüntetve mellette, hogy hány esetben fordul elő:

$$\begin{array}{ll}
9 = 1 + 2 + 6 & P_3 = 3! = 6 \\
9 = 1 + 3 + 5 & P_3 = 6 \\
9 = 1 + 4 + 4 & P_3^{1,2} = \dfrac{3!}{1! \cdot 2!} = 3 \\
9 = 2 + 2 + 5 & P_3^{1,2} = 3 \\
9 = 2 + 3 + 4 & P_3 = 6 \\
9 = 3 + 3 + 3 & 1
\end{array}$$

Ez összesen 25 db eset, így a keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{25}{V_6^{3,i}} = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216} \approx 0,116\ .$$

27. A feladat (a) részében az összes eset $V_{50}^{5,i}$, mivel 50 elemből választottunk ki sorrendben ötöt visszatevéssel ($\sim$ ismétléssel). A sorrendi megkülönböztetésre azért

volt szükség, hogy minden elemi esemény azonos valószínűségű legyen. (Lásd 23. feladat kidolgozása)
A kedvező eseteket tekintve rögzítsünk két húzást (mint „helyet") az öt húzásból. Ebben a két húzásban legyen az 5 selejtes valamelyike – ez összesen $5 \cdot 5 = V_5^{2,i}$ lehetőség. A két húzás az öt húzást tekintve $C_5^2 = \binom{5}{2}$-féle helyen lehet. A fennmaradó 3 húzásban a 45 db jó terméket húzzuk ki: $45 \cdot 45 \cdot 45 = V_{45}^{3,i}$. Így az $A = \{2 \text{ selejtet találtunk az 5-ből visszatevéses mintavételnél}\}$ esemény keresett valószínűsége:

$$P(A) = \frac{\binom{5}{2} \cdot V_5^{2,i} \cdot V_{45}^{3,i}}{V_{50}^{5,i}} = \frac{10 \cdot 5^2 \cdot 45^3}{50^5} = \frac{10 \cdot 5^2 \cdot 45^3}{5^5 \cdot 10^5} = \frac{45^3}{5^3 \cdot 10^4} = \frac{91125}{1250000} = 0,0729\ .$$

A (b) részben – az itt szereplő kérdéses eseményt B-vel jelölve – hasonló gondolatmenettel adódik, hogy

$$P(B) = \frac{\binom{5}{2} \cdot V_{10}^{2,i} \cdot V_{90}^{3,i}}{V_{100}^{5,i}} = \frac{10 \cdot 10^2 \cdot 90^3}{100^5} = \frac{10^6 \cdot 9^3}{10^{10}} = \frac{9^3}{10^4} = \frac{729}{10000} = 0,0729\ .$$

Megjegyzés: Ez a mintavételi feladat később az ún. binomiális eloszlásra lesz jó példa.

30. Ismét a $\frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes esetek száma}}$ képletet használjuk. Egy elemi eseménynél a 3 dobozba (I., II. és III. dobozba) tesszük a 8 megkülönböztethető(!) tárgyat. Legyenek ezek 1., 2., …, 8. számú tárgy. Gondolatban „címkézzük fel" a tárgyakat aszerint, hogy melyik dobozba kerültek. A 3-féle címke 8-féle tárgyra kerülhet úgy, hogy egy címkét többször is felhasználhatunk, ezért az összes esetek száma $V_3^{8,i}$.
A kedvező esetek száma $P_8^{2,4,2}$, mivel a 8 db tárgyra (mint 8 db helyre) 2 db I-es, 4 db II-es és 2 db III-as címke kerül.
Ha a feladatbeli eseményt A-val jelöljük, akkor A bekövetkezésének valószínűsége:

$$P(A) = \frac{P_8^{2,4,2}}{V_3^{8,i}} = \frac{\frac{8!}{2!\cdot 4!\cdot 2!}}{3^8} = \frac{420}{6561} = \frac{140}{2187} \approx 0,064\ .$$

37. A feladat szerint egyszerre húzunk ki 6 golyót, ez felel meg egy elemi eseménynek: 10 elemből 6 kiválasztása ismétlés nélkül: C_{10}^6.
Egy kedvező esetnek számít, ha az 5 fehér golyóból 2-t kiválasztok és a 2 feketéből 1-et és mind a három pirosat. Így az összes kedvező eset: $C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^3$.
Ha A-val jelöljük a feladatbeli eseményt, akkor:

$$P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_2^1 \cdot C_3^3}{C_{10}^6} = \frac{\binom{5}{2} \cdot 2 \cdot 1}{\binom{10}{6}} = \frac{10 \cdot 2}{\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}} = \frac{20}{210} = \frac{2}{21} \approx 0,095\ .$$

38. A totószelvény kitöltésének összes lehetséges esete: $V_3^{14,i}$, mivel 3 elemet (1,2 és x) teszünk 13+1 helyre úgy, hogy egy elemet többször is felhasználhatunk és a sorrend számít.
A kedvező esetek összeszámlálása: Tekintsük például azt a kérdést, amikor 10 találatunk van a 14-ből. A 14-ből 10 találat elérése $C_{14}^{10} = \binom{14}{10}$-féleképpen lehetséges. A fennmaradó 4 találat sikertelen, tehát azok 2-félék lehetnek (ha például az 1-es

nyert volna, akkor 2-es vagy x): $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = V_2^{4,i}$.
Annak valószínűsége, hogy a véletlenszerűen kitöltött totószelvényünkön 10 találat lesz (10 jó találat és(!) 4 rossz):

$$P(A) = \frac{C_{14}^{10} \cdot V_2^{4,i}}{V_3^{14,i}} = \frac{\binom{14}{10} \cdot 2^4}{3^{14}} = \frac{\frac{11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 16}{3^{14}} = \frac{1001 \cdot 16}{4782969} = \frac{16016}{4782969} \approx 0,00335 \,.$$

Ha k jelöli a találatok számát, akkor annak valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kitöltött totószelvényen k találatunk lesz:

$$P(A) = \frac{C_{14}^{k} \cdot V_2^{14-k,i}}{V_3^{14,i}} \,.$$

Végeredmények

1. P_5, 3. $2 \cdot P_6$, 4. $P_{13}^{2,2,2,2}$, 6. $P_8^{4,4}$, 9. C_{87}^2, 12. $C_8^2 \cdot C_{12}^3$, 13. $V_5^{k,i}$, $k \geq 4$, 14/a. V_4^3, 14/b. $V_5^{3,i}$, 15. $C_3^{6,i}$, 16. $C_{11}^8 + C_{11}^7 \cdot 9 + C_{11}^6 \cdot C_9^2$, 17. $V_5^2 \cdot V_4^{3,i}$, 18/a. $\frac{1}{2}$, 18/b. $\frac{2}{3}$, 18/c. $\frac{1}{2}$, 18/d. $\frac{1}{3}$, 18/e. $\frac{2}{3}$, 20/a. $\frac{1}{50}$, 20/b. $\frac{2}{5}$, 20/c. $\frac{8}{25}$, 21/a. $\frac{P_6}{V_6^{6,i}}$, 21/b. $\frac{V_5^{5,i}}{V_6^{6,i}}$, 21/c. $\frac{V_5^4}{V_6^{6,i}}$, 21/d. $\frac{\binom{6}{2} \cdot V_5^{4,i}}{V_6^{6,i}}$, 21/e. $\frac{V_5^{6,i}}{V_6^{6,i}}$, 21/f. $\frac{V_3^{6,i}}{V_6^{6,i}}$, 22/a. $\frac{1}{V_2^{4,i}}$, 22/b. $\frac{P_4^{2,2}}{V_2^{4,i}}$, 22/c. $1 - \frac{1}{V_2^{4,i}}$, 24. $k > 27$, 25. $\frac{C_4^2 + C_3^2 + 1}{C_9^2}$, 26. $\frac{V_{365}^n}{V_{365}^{n,i}}$, 28. $\frac{C_5^k \cdot C_{85}^{5-k}}{C_{90}^5}$, 29. $\frac{V_{10}^7}{V_{10}^{7,i}}$, 31. $\frac{P_{10}^{4,3,3}}{V_3^{10,i}}$, 32. $\frac{P_9^{3,3,3}}{V_3^{9,i}}$, 33. $\frac{1}{P_9^{3,4,2}}$, 34. $\frac{2}{P_3}$, 35. $\frac{9}{P_4}$, 36. $\frac{C_{20}^1 \cdot C_{980}^{49}}{C_{1000}^{50}}$, 39. $\frac{3}{7}$, 40. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ és $\frac{1}{6}$

4.2. Geometriai valószínűség

Rövid elméleti összefoglaló

Amennyiben egy kísérlettel kapcsolatos eseményeket (az eseményteret) egy geometriai alakzatnak tudjuk megfeleltetni úgy, hogy az egyes események valószínűsége arányos a hozzájuk tartozó geometriai (rész)alakzat geometriai mértékével (hossz, terület, térfogat stb.), akkor az események *geometriai valószínűségi mezőt* alkotnak, az események valószínűségét pedig *geometriai valószínűség*nek nevezzük. Ebben az esetben is alkalmazható a „$\frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}}$" képlet.

Feladatok

1. Egy távbeszélőállomás és a központ közötti vezeték hossza 450 méter. Mennyi annak a valószínűsége, hogy hiba lép fel a vezetéknek a központtól 180 méternél távolabbi helyén, ha a vezeték mentén mindenhol azonos a meghibásodás veszélye?

2. Két személy megbeszéli, hogy délelőtt 10 és 11 óra között egy adott helyen találkoznak. Érkezésük a megbeszélt időn belül véletlenszerű. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a korábban érkezőnek nem kell egy negyed óránál többet várnia a másikra?

3. Egy m hosszúságú szakasz egyik végpontja legyen P. Ezen a szakaszon két pontot választunk találomra úgy, hogy a szakasz bármely részébe esés valószínűsége

arányos a P végpontú rész-szakasz hosszával. Legyenek ezek Q és R pontok. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a Q pont közelebb van a P-hez, mint az R-hez!

4. Egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen kijelölünk két pontot. Mekkora a valószínűsége annak, hogy távolságuk kisebb vagy egyenlő, mint egy adott h $(0 < h < 1)$ hossz?

5. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon találomra választunk két pontot. Így a szakaszt három részre bontottuk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezekből a szakaszokból háromszög szerkeszthető?

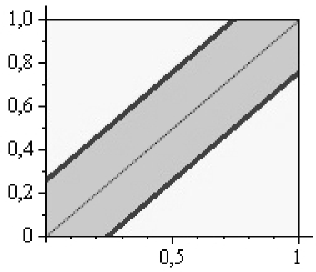
6. Egy egységnyi hosszúságú szakaszon véletlenszerűen választunk két pontot. Mennyi a valószínűsége annak, hogy ezek közelebb vannak egymáshoz, mint bármelyik végponthoz?

7. Egy kikötőhöz 24 órás időtartamon belül véletlen időpontban két hajó érkezik. Az előbb érkezőn rögtön megkezdik a rakodást, mely az egyiken egy órát, a másikon két órát vesz igénybe. Ha a második hajó akkor érkezik, amikor az elsőn még rakodnak, úgy várakoznia kell a rakodás befejeztéig. Mennyi a valószínűsége annak, hogy valamelyik hajónak várakoznia kell a rakodásra?

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. A vezeték teljes hossza 450 méter, és minden pontján ugyanolyan valószínűséggel hibásodik meg. A teljes eseménytér így ez a 450 méter (ez játssza az „összes eset” szerepét). A központtól 180 méternél távolabbi helyek összessége egy 270 méter hosszúságú szakaszt alkot, ez a „kedvező esetek száma”.
   Ha A jelöli azt az eseményt, hogy „hiba lép fel a központtól 180 méternél távolabbi helyen”, akkor $P(A) = \frac{270}{350} = \frac{3}{5}$.

2. Legyen $A : \{$a korábban érkező személynek nem kell negyed óránál többet várni a másikra$\}$. Feleltessük meg a 10 és 11 óra közötti időtartamot a 0 és 1 közötti zárt intervallumnak. Egy illető bármikor érkezik meg 10 és 11 között, annak egyértelműen megfelel a $[0, 1]$-ben egy (valós) szám. Két személyünk van, akik egymástól függetlenül érkeznek meg. Mindkét személy érkezéséhez hozzá lehet rendelni a $[0, 1]$ intervallum pontjait, a két érkezési időpont ezért egy számpárt ad: (x, y) azt jelenti, hogy az első személy $x \in [0, 1]$-nek megfelelő időpontban, míg a második személy $y \in [0, 1]$-hez tartozó időpontban érkezett meg. (Például $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ azt mutatja, hogy az első ember 10:15-kor, a második 10:30-kor érkezett.)



Látható, hogy az (x, y) számpár a $[0,1]\times[0,1]$ intervallum-párban van, ez pedig nem más, mint egy 1 oldalhosszúságú egységnégyzet a szokásos derékszögű koordinátarendszerben (egyik csúcspontja az origó, másik kettő a tengelyek egységpontjai, az utolsó csúcspont az $(1,1)$ koordinátájú pont). Ez azt jelenti, hogy minden egyes lehetséges érkezési időpont-párnak megfelel az egységnégyzet egy pontja – így valóban beszélhetünk geometriai valószínűségről. Az összes esetet az egységnégyzet jelenti, amelynek területe éppen 1.
Kérdés az, hogy milyen területet feleltethetünk meg a kedvező eseteknek.
A vizsgált esemény az, hogy a korábban érkezőnek nem kell negyed óránál többet várnia a másikra. Ez azt jelenti, hogy a két időpont közötti különbség negyed óránál kisebb (vagy egyenlő), azaz $|x-y| \le \frac{1}{4}$. Az abszolútérték definíciója alapján

$$|x-y| = \begin{cases} x-y\ , & \text{ha } x-y>0 \ \text{(azaz, ha } x>y) \\ y-x\ , & \text{ha } x-y<0 \ \text{(azaz, ha } y>x) \end{cases} ,$$

amiből következik, hogy $y \ge x-\frac{1}{4}$ vagy $y \le x+\frac{1}{4}$ teljesül. Ez a síkon (pontosabban az egységnégyzeten) az $y = x-\frac{1}{4}$ egyenes feletti (de $y = x$ alatti) és az $y = x+\frac{1}{4}$ egyenes alatti (de $y = x$ feletti) területnek felel meg. A megfelelő ponthalmazt ábrázolva látható, hogy az egységnégyzetből két egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszöget „vágtunk le". A kedvező eseteknek a fennmaradó terület felel meg (az ábrán szürke sávval jeleztük). Egy levágott háromszög területe (az $\frac{\text{alap}\cdot\text{magasság}}{2}$ képlet alapján) $\frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}}{2} = \frac{9}{32}$.
A két levágott háromszög összterülete: $\frac{9}{16}$. Ebből a keresett valószínűség:

$$P(A) = \frac{1-\frac{9}{16}}{1} = \frac{7}{16}\ .$$

Végeredmények

3. $\frac{1}{4}$, 4. $h(2-h)$, 5. $\frac{1}{4}$, 6. $\frac{1}{3}$, 7. $\frac{69{,}5}{576}$

4.3. Feltételes valószínűség

Rövid elméleti összefoglaló

Jelölje A, B események együttes bekövetkezését AB. Annak a valószínűségét, hogy *az A esemény bekövetkezik feltéve, hogy B bekövetkezett* $P(A|B)$ jelöli, és

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}\ .$$

Látható, hogy ebből a képletből az együttes bekövetkezés valószínűsége ($P(AB)$) is kiszámítható, a másik két adat ismeretében: $P(AB) = P(A|B)P(B)$. Ez a képlet tetszőleges n db eseményre is kiterjeszthető, például $n = 3$ esetén:

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_3|A_1A_2)P(A_2|A_1)P(A_1)\ .$$

Teljes valószínűség tétele: Ha $B_1, \ldots, B_n$ teljes eseményrendszer (azaz az események páronként diszjunktak, és az uniójuk a teljes eseménytér), akkor

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \ldots + P(A|B_n)P(B_n)\ .$$

Bayes tétele: Ha $B_1, \dots, B_n$ teljes eseményrendszer, akkor

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^n P(A|B_j)P(B_j)} .$$

Feladatok

1. Egy követségi fogadásra 5 angol, 8 német és 3 japán diplomata hivatalos. Egyenként érkeznek, véletlenszerű időpontban. Mennyi a valószínűsége annak, hogy elsőként angol, másodikként német, harmadikként japán diplomata érkezik meg a fogadásra?

2. Egy műhelyben 3 műszakban termelnek azonos fajta árut. Egy napon az összes termelt áruból az első műszakban 40%, a második és a harmadik műszakban 30-30% készült. Az első műszakban készült áruk 5%-a, a másodikban gyártottak 7%-a, a harmadikban termeltek 10%-a hibás. A három műszakban elkészült teljes mennyiségből a minőségi ellenőr találomra kiválaszt egyet, és megvizsgálja azt. Mennyi a valószínűsége, hogy ez az áru hibátlan?

3. Tíz azonos alakú doboz közül az első kilencben 4-4 golyó van, mégpedig 2 fehér és 2 fekete. A tizedik dobozban 5 fehér és 1 fekete golyó található. Az egyik találomra kiválasztott dobozból véletlenszerűen kiveszünk egy golyót. Mennyi a valószínűsége, hogy a golyó a tizedik dobozból való, ha a kihúzott golyó fehér színű?

4. Legyen egy dobozban 5 piros, 5 fehér golyó. Visszatevés nélkül húzzuk ki a golyókat. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadik alkalommal fehér golyót húzunk, ha az első két húzás fehér golyót eredményezett?

5. Nagyon sok kétgyermekes család közül találomra kiválasztunk egyet, és megtudjuk, hogy az egyik gyermekük lány. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik gyermek fiú?

6. Az egyetemi vizsgán az A-szakos hallgatók 60%-a, a B-szakos hallgatók 80%-a szerepel sikeresen. Az A-szakos hallgatók az évfolyam 15%-át teszik ki. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy (az évfolyamból kiválasztott) hallgató sikeresen vizsgázik?

7. Egy biológiai kísérlet során 100 egyedet 3 csoportba osztanak. Az elsőben 20 egyed van, és gyenge hatóanyaggal oltják be őket. A másodikban 30 egyed található, és közepesen erős szérumot kapnak. A harmadik csoport 50 egyedet számlál, és erős hatóanyagot vizsgálnak rajtuk. A kutatócsoport megállapítja, hogy az első csoportban 3, a másodikban 10, a harmadikban 39 egyednél tapasztaltak változást. Ezután a csoportokat újra egyesítik, és találomra kiválasztanak egy egyedet, és nem tapasztalnak rajta változást. Mennyi a valószínűsége, hogy az egyed a második csoportból való?

8. A tapasztalat azt mutatja, hogy a férfiak 5%-a és a nőknek 2%-a dohányos. Egy 20 nőből és 5 férfiból álló csoportból egy személyt találomra kiválasztunk. Megállapítjuk, hogy dohányos. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott személy férfi?

9. Egy céllövöldében 3 rekeszben vannak puskák. Az első rekeszben 3 puska van, ezekkel 0,5 a találat valószínűsége. A második rekeszben egy puska van, ezzel 0,7 a találat valószínűsége. A harmadik rekeszben két puska található, és ezekkel 0,8 valószínűséggel találunk célba. Mennyi a találat valószínűsége egy találomra kiválasztott puskával?

10. Egy dobozban 5 fehér és 2 piros golyó van. Visszatevés nélkül kihúzunk két golyót, majd egy harmadikat. Mennyi a valószínűsége, hogy a harmadikként kihúzott golyó piros?

11. Hat doboz mindegyikében 6 golyó van, amelyekben rendre 1,2,...,6 golyó fehér. Egy találomra kiválasztott dobozból visszatevéssel(!) 3 golyót húzok. Azt találjuk, hogy mindhárom húzás fehér. Mennyi annak a valószínűsége, hogy abból a dobozból húztunk, amelyben 2 fehér golyó van?

12. Egy játékkockát egyszer feldobunk. Legyen A az az esemény, hogy 6-nál kisebb számot dobunk, B pedig az, hogy páros számot dobunk. Számítsa ki a $P(B)$ és $P(B|A)$ valószínűségeket!

13. Három kockával dobunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az egyik kockával hatost dobunk, feltéve, hogy a dobott számok összege 12?

14. Egy önkiszolgáló üzletben 200 üveg tej friss, és 100 üveg másnapos. Két üveget kiveszünk. Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettő friss?

15. 200 munkadarabból, melyek között 20 a selejtes, egymás után kiveszünk kettőt, visszatevés nélkül. Mennyi a valószínűsége annak, hogy

    (a) elsőre selejtest, másodikra jót húzunk;

    (b) elsőre jót, másodikra selejtet húzunk;

    (c) egyik alkalommal selejtet, második alkalommal jó darabot húzunk?

16. Egy csomag magyar kártyából visszatevés nélkül kihúzunk 4 lapot. Mennyi a valószínűsége, hogy az első kettő piros, a második kettő zöld?

17. Egy női konfekcióboltban háromféle méretű ruha kapható: nagy-, közepes- és kisméretű. Ezek megoszlása: nagyméretű az összes ruhák 26%-a, a közepes 44%, kicsi a 30%-a. A ruhákat kívánságra alakra igazítják. Statisztikai adatokból ismeretes, hogy az alakra igazítás valószínűségre rendre $0,2$, $0,1$, illetve $0,15$. Mennyi a valószínűsége, hogy egy eladott ruhát alakítani kell?

18. Televízió-képcsövek kísérleti gyártását végzik egy gyárban. Három tétel készül el. Az első két tétel a teljes mennyiség egy-egy negyedét, a harmadik a felét adja. A vizsgálat során kiderül, hogy az előírt működési óraszámot az első tételnek csak a 90%-a, a másodiknak a 80%-a, a harmadiknak a 75%-a éri el. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy, a teljes mennyiségből találomra kiválasztott képcső az előírt ideig működik?

19. Négy termelőtől almát szállítanak egy üzletbe. Az első termelőtől származik a mennyiség $\frac{1}{10}$ része, melyből 40% elsőosztályú. A második termelőtől szállítják a

tétel $\frac{1}{4}$ részét, amely 50%-ban elsőosztályú. A harmadiktól rendelték a mennyiség $\frac{2}{5}$ részét, ebből 20% elsőosztályú. A többi gyümölcs a negyedik termelőtől kerül az üzletbe, és mind elsőosztályú. Mennyi a valószínűsége annak, hogy az üzletben e szállítmányból találomra kiválasztva egy almát, az elsőosztályú?

20. Izzólámpákat 100 db-os csomagolásban szállítanak. Az előző megfigyelésekből ismert, hogy a 100 db-os tételek között azonos arányban fordul elő 0, 1, 2, 3 hibás darabot tartalmazó (3-nál több hibás darab nem fordul elő). Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy tételből véletlenszerűen 3 égőt kiválasztva mindhárom hibátlan lesz?

21. Egy rádiókészülékeket gyártó üzemben számos vizsgálat alapján megállapították, hogy minden 10 darab elkészült rádió között egyforma valószínűséggel lehet 0, 1, 2 vagy 3 selejtes, de több nem. Egy ilyen 10 darab készüléket tartalmazó tételből a minőségellenőrzés során kiválasztottak 2 rádiót, azokat megvizsgálták, és mind a kettőt jónak találták. Mennyi a valószínűsége, hogy mind a 10 készülék hibátlan?

22. A görögdinnye-szállítmányokat általában úgy ellenőrzik, hogy néhány dinnyét meglékelnek, s a kapott eredményből következtetnek a szállítmányra. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 100 görögdinnye közül legfeljebb 5 rossz, ha közülük találomra kiválasztott 10 dinnye mindegyike jónak bizonyult? Az előzetes tapasztalatok alapján a 100 tételes szállítmányokban legfeljebb 20 darab lehet rossz. A rossz dinnyék számának lehetséges értékei (0, 1, 2, …, 20) mind egyformán valószínűek.

23. Egy tesztrendszerű vizsgánál minden vizsgakérdés egy vizsgalapra van felírva, és minden kérdéshez 4 válasz van megadva, amelyek közül csak egy a helyes. A vizsgázónak ezt a lapot kell kitölteni a helyesnek vélt válasz megjelölésével. Tegyük fel, hogy egy vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ. Ha nem tudja a választ, akkor $\frac{1}{4}$ valószínűséggel jelöli meg a 4 lehetséges válasz közül az egyiket.

    (a) Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó helyesen válaszol?

    (b) A vizsgalap átnézése során kiderül, hogy helyes a válasz. Mennyi a valószínűsége, hogy a vizsgázó azért adott helyes választ, mert tudta a helyes eredményt?

24. *Monty Hall-paradoxon:* Egy játékban a játékosnak 3 csukott ajtót mutatnak, amelyek közül kettő mögött nincs nyeremény, a harmadik mögött viszont egy vadonatúj autó. A játékos nyereménye az, ami az általa kiválasztott ajtó mögött van. Először a játékos csak rámutat az egyik ajtóra, de mielőtt valóban kinyitná, a műsorvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, amelyik mögött nem az autó van (a játékvezető tudja, melyik ajtó mögött mi van), majd megkérdezi a játékost, hogy akar-e módosítani a választásán. A játékos ezután vagy változtat, vagy nem, végül kinyílik az így kiválasztott ajtó, mögötte a nyereménnyel. Érdemes-e változtatni?

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. *(Feltételes valószínűség)* Jelölje A_1, A_2, A_3 rendre azokat az eseményeket, hogy elsőként angol, másodikként német, illetve harmadikként japán érkezik. A $\frac{\text{kedvező esetek}}{\text{összes eset}}$ képletet használva, annak valószínűsége, hogy elsőként angol érkezik: $P(A_1) = \frac{5}{16}$,

mivel összesen 16 főt várunk a fogadásra, és 5 angol diplomata van. Az A_2 valószínűsége feltéve A_1-et: $P(A_2|A_1) = \frac{8}{15}$, ugyanis egy angol diplomata már megérkezett, akkor az összes eset eggyel kevesebb, és 8 német diplomata van. Annak a valószínűsége, hogy harmadikként japán érkezik, feltéve, hogy előtte már egy angol, és egy német diplomata megérkezett: $P(A_3|A_1A_2) = \frac{3}{14}$, hiszen a két diplomata megérkezésével az összes várt ember kettővel kevesebb (azaz 14) és a 3 japán közül még senki nem érkezett meg. Összesítve, annak valószínűsége, hogy elsőként angol, másodikként német, harmadikként japán diplomata érkezik a fogadásra

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{3}{14} \cdot \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{16} = \frac{1}{28} \,.$$

2. *(Teljes valószínűség tétele)* A 3 műszakban termelt áruk összessége kiadja a napi 100%-ot, ezért ha B_1 jelöli azt, hogy egy termék az első, B_2, ha a második, és B_3, ha a harmadik műszakban készült, akkor B_1, B_2, B_3 teljes eseményrendszer – így alkalmazható a teljes valószínűség tétele. Az A esemény jelentse azt, hogy egy áru hibátlan. Ekkor például annak a valószínűsége, hogy egy áru az első műszakban készült és hibátlan: $P(A|B_1) = \frac{95}{100}$, hiszen az első műszakban készült áruk 5%-a hibás, így 95% hibátlan. A képlethez szükséges további adatokat a feladat szövegéből szintén kiolvashatjuk:

$$\begin{aligned} P(B_1) &= \frac{40}{100} & \qquad P(A|B_1) &= \frac{95}{100} \\ P(B_2) &= \frac{30}{100} & \qquad P(A|B_2) &= \frac{93}{100} \\ P(B_3) &= \frac{30}{100} & \qquad P(A|B_3) &= \frac{90}{100} \end{aligned}$$

A teljes valószínűség tételéből megkapjuk, hogy mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra kiválasztott áru hibátlan:

$$P(A) = \frac{95}{100}\frac{40}{100} + \frac{93}{100}\frac{30}{100} + \frac{30}{100}\frac{90}{100} = \frac{9290}{10000} = \frac{929}{1000} = 0,929 \,.$$

3. *(Bayes-tétel)* Jelentse B_i azt, hogy a golyó az i-edik dobozból való ($i = 1, \ldots, 10$), az A pedig azt, hogy a kihúzott golyó fehér színű. A 10 doboz teljes eseményrendszert alkot, és mivel minden dobozból egyforma valószínűséggel húzhatok, ezért $P(B_i) = \frac{1}{10}$. Annak a valószínűsége, hogy az i-edik dobozból húztam golyót, és az fehér:

$$P(A|B_i) = \begin{cases} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,, & \text{ha } i = 1, \ldots, 9 \\ \frac{5}{6}\,, & \text{ha } i = 10 \end{cases}$$

Annak a valószínűsége, hogy a golyó a 10. dobozból való, ha a kihúzott golyó fehér:

$$P(B_{10}|A) = \frac{P(A|B_{10})P(B_{10})}{P(A|B_1)P(B_1) + \ldots + P(A|B_{10})P(B_{10})} = \frac{\frac{5}{6}\frac{1}{10}}{\left(9 \cdot \frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right)\frac{1}{10}} = \frac{5}{32} \,.$$

22. *Útmutató:* Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} A&\colon \{10 \text{ jó dinnyét választottunk}\} \\ B_i&\colon \{i \text{ db rossz dinnyét tartalmazó szállítmány}\}\,, \quad i = 0, \ldots, 20 \end{aligned}$$

Legyen továbbá C a feladat kérdésével megegyező esemény, azaz: 100 görögdinnye közül legfeljebb 5 rossz, ha közülük találomra kiválasztott 10 dinnye mindegyike jó. Ekkor:

$$P(C) = P(B_0|A) + P(B_1|A) + P(B_2|A) + P(B_3|A) + P(B_4|A) + P(B_5|A) \ .$$

A $P(A)$, illetve $P(B_i|A)$ valószínűségek röviden:

$$P(A) = \sum_{j=0}^{20} \frac{C_{100-j}^{10}}{C_{100}^{10}} \cdot \frac{1}{21} \qquad \text{és} \qquad P(B_i|A) = \frac{\frac{C_{100-i}^{10}}{C_{100}^{10}} \cdot \frac{1}{21}}{P(A)} \ .$$

23. Legyen A az az esemény, hogy „a vizsgázó helyesen válaszolt”. B_1 jelentse azt, hogy „a vizsgázó tudta a választ”, míg a B_2 azt, hogy „a vizsgázó nem tudta a választ”. Ha a vizsgázó p valószínűséggel tudja a helyes választ, akkor $(1-p)$ annak a valószínűsége, hogy nem tudja a helyes választ. Amennyiben tudja a jó választ, úgy annak a valószínűsége, hogy a jó választ jelöli be pontosan 1.

    (a) A teljes valószínűség tétele alapján:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \\ &= 1 \cdot p + \frac{1}{4} \cdot (1-p) = \ldots = \frac{3p+1}{4} \ . \end{aligned}$$

    (b) A feladat második részét Bayes-tétellel oldhatjuk meg:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{1 \cdot p}{\frac{3p+1}{4}} = \frac{4p}{3p+1} \ .$$

24. Igen, érdemes változtatni.
A) Először megmutatjuk a feltételes valószínűség eredményeit nem használó indoklást. Legyen a 3 ajtó számozott: 1., 2. és 3. ajtó. A nyereményautó ugyanolyan valószínűséggel van a 3 ajtó mögött – ezért kezdetben a játékos nyerési esélye $\frac{1}{3}$. Tegyük fel, hogy a játékos az 1. ajtót választotta (ugyanez a logika működik majd akkor is, ha 2. vagy 3. ajtóra mutatott rá). Ekkor a műsorvezető – aki minden esetben tudja, hogy hol van a nyereményautó – megmutat egy olyan ajtót, ami mögött nincs nyeremény, és megkérdezi a játékost, hogy megváltoztatja-e az eredeti választását.
Nézzük meg a lehetőségeket egy táblázat segítségével:

	1. ajtó	2. ajtó	3. ajtó	Nyert-e a változtatással?
I. eset	autó	semmi	semmi	nem
II. eset	semmi	autó	semmi	igen
III. eset	semmi	semmi	autó	igen

Látható, hogy a II. és III. esetben (amikor a játékos üres ajtót választott) a műsorvezető már csak azt az ajtót tudja megmutatni, amiben nincs nyeremény. Ezért a nyerési esélye $\frac{2}{3}$, ha változtat.
Egy másik érvelés szerint ha a játékos kiválaszt egy ajtót, akkor ott $\frac{1}{3}$ eséllyel van az autó, így annak a valószínűsége, hogy a másik két ajtó valamelyike mögött van

az autó: $\frac{2}{3}$. Ha a másik két ajtó közül kinyitnak egyet, akkor a fennmaradt ajtó „örökli” a nyerés valószínűségét, azaz a $\frac{2}{3}$-ot – ezért éri meg változtatni.
A problémát ezért hívják paradoxonnak, mert sok ember számára a józan ész azt sugallja, hogy ha már csak két ajtó közül választhat a játékos, akkor $\frac{1}{2}$ eséllyel nyeri meg az autót.
B) Írjuk fel ezt a feltételes valószínűség segítségével. Legyenek A_1, A_2 és A_3 azok az események, hogy a nyeremény az 1., 2. és 3. ajtó mögött van. Tegyük fel ismét azt, hogy a játékos az 1. ajtót választotta (a másik két ajtó választásánál ugyanígy írhatjuk fel a a valószínűségeket). Legyen B_3 az az esemény, hogy a műsorvezető a 3. ajtót nyitotta ki. Ekkor annak a valószínűsége, hogy egy adott ajtó mögött van a nyeremény, ha a műsorvezető a 3. ajtót nyitotta ki:

$$P(A_1|B_3) = \frac{P(A_1B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(B_3|A_1)P(A_1)}{P(B_3)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$
$$P(A_2|B_3) = \frac{P(A_2B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(B_3|A_2)P(A_2)}{P(B_3)} = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$
$$P(A_3|B_3) = \frac{P(A_3B_3)}{P(B_3)} = \frac{P(B_3|A_3)P(A_3)}{P(B_3)} = \frac{0\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = 0$$

Tehát a változtatással kétszer akkora esélye van nyerni a játékosnak.
(Hasonlóan lehetne végigvezetni, hogy mi történik akkor, ha a műsorvezető a 2. ajtót nyitja ki, ami előtt a játékos az 1. ajtót választotta.)
C) Megjegyzés: Úgy is lehet okoskodni, hogy az ajtó változtatásakor a nyeremény valószínűsége éppen akkora, mint amekkora eséllyel elsőként üres ajtót választottunk, azaz $\frac{2}{3}$.

Végeredmények

F-fel jelöljük, ha feltételes valószínűség klasszikus képletét, T-vel, ha a teljes valószínűség tételét, és B-vel, ha a Bayes-tételt alkalmaztuk az adott feladatban.
4. F: $\frac{3}{8}$, 5. F: $\frac{2}{3}$, 6. T: $\frac{77}{100}$, 7. B: $\frac{5}{12}$, 8. B: $\frac{5}{13}$, 9. T: $\frac{19}{30}$, 10. T: $\frac{2}{7}$, 11. B: $\frac{8}{441}$, 12. F: $\frac{1}{2}$ és $\frac{2}{5}$, 13. F: $\frac{3}{5}$, 14. F: $\frac{398}{897}$, 15/a. F: $\frac{18}{199}$, 15/b. F: $\frac{18}{199}$, 15/c. F: $\frac{36}{199}$, 16. F: $\frac{49}{13485}$, 17. T: $\frac{141}{1000}$, 18. T: $\frac{4}{5}$, 19. T: $\frac{99}{200}$, 20. T: $\frac{123617}{129360} \approx 0,996$, 21. B: $\frac{9}{26}$, 22. B: $\sum_{i=0}^{5} \frac{\binom{100-i}{10}}{\sum_{j=1}^{20}\binom{100-j}{10}}$

4.4. Diszkrét és folytonos valószínűségi változók

Rövid elméleti összefoglaló

Ha egy eseménytér elemi eseményeihez egy-egy számértéket rendelünk, akkor egy ξ-vel jelölt, *valószínűségi változó*nak nevezett függvényt értelmeztünk. Ha a ξ valószínűségi változó értékkészlete megszámlálható, akkor *diszkrét valószínűségi változó*nak nevezzük.

Legyen A_k az eseménytér azon elemi eseményeinek részhalmaza, amelyekhez ξ (diszkrét valószínűségi változó) az x_k értéket rendeli; ekkor a $P(A_k) = P(\xi = x_k) = p_k$ valószínűségeket a ξ változó *eloszlás*ának nevezzük. Mivel az A_k események teljes eseményrendszert alkotnak, ezért $\sum p_k = 1$.

Egy ξ valószínűségi változó $F(x)$ *eloszlásfüggvénye* azt adja meg, hogy milyen valószínűséggel vesz fel a ξ az x-nél kisebb(!) értékeket:

$$F(x) = P(\xi < x) \ .$$

Az eloszlásfüggvény monoton növekvő, a $(-\infty)$-ben 0-t, a $(+\infty)$-ben 1-et vesz fel, és minden helyen balról folytonos. Diszkrét valószínűségi változó eloszlásfüggvénye lépcsős függvény.
Az eloszlásfüggvény segítségével kiszámítható annak az eseménynek a valószínűsége, hogy ξ két érték között van: $P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a)$.

Egy ξ valószínűségi változó *sűrűségfüggvénye* az az $f(x)$ függvény, amelyre fennáll, hogy

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Az $f(x)$ sűrűségfüggvény nemnegatív, és $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Ha ξ-nek létezik sűrűségfüggvénye, akkor $F(x)$ folytonos; ilyenkor ξ-t *folytonos valószínűségi változó*nak nevezzük. Ebben az esetben $F'(x) = f(x)$.
A sűrűségfüggvény segítségével annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a ξ két adott érték között van: $P(a \leq \xi < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Egy valószínűségi változó felvett (tapasztalati) értékei egy meghatározott számérték körül ingadoznak, amelyet *várható érték*nek nevezünk. Diszkrét, illetve folytonos valószínűségi változó esetében az $M(\xi)$ várható érték

$$M(\xi) = \sum p_k \cdot x_k \ ; \qquad\qquad M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x\,\mathrm{d}x \ .$$

A valószínűségi változó várható értéke körüli ingadozást méri a *szórás*. Ennek a négyzete, a $D^2(\xi)$ *szórásnégyzet*, a ξ és $M(\xi)$ eltérése négyzetének várható értéke: $D^2(\xi) = M\left((\xi - M(\xi))^2\right)$. A szórásnégyzetre fennáll a következő összefüggés:

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2 \ , \quad \text{azaz}$$

$$D^2(\xi) = \sum_k p_k \cdot x_k^2 - \left(\sum_k p_k \cdot x_k\right)^2 \ , \ \text{illetve}$$

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^2\ \mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x\ \mathrm{d}x\right)^2$$

Feladatok

1. Egy játékot játszunk, amelyben egy dobókockát egyszer feldobunk, és annyiszor 100 Ft-ot nyerünk, amennyit a kockával dobtunk. Jelentse a ξ valószínűségi változó a nyert összeget. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, várható értékét és szórását! Ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt! (Kidolgozott példa)

2. Két kockát dobunk fel egyszerre. A dobott számok összegét tekintsük valószínűségi változónak. Írjuk fel és ábrázoljuk a valószínűségi változó valószínűség-eloszlását és eloszlásfüggvényét!

3. Két kockát dobunk fel egyszerre. A dobott számok különbségének abszolút értékét tekintsük valószínűségi változónak. Írjuk fel és ábrázoljuk a valószínűségi változó valószínűség-eloszlását és eloszlásfüggvényét, továbbá számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó értéke 2-nél nagyobb, de a 4-et nem haladja meg!

4. Egy diszkrét valószínűségi változó lehetséges értékei -1 és 6, melyeket rendre $\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{3}$ valószínűséggel vesz fel. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, számítsuk ki értékét az $x = 0$ helyen, és ábrázoljuk az eloszlásfüggvényt!

5. Egy útvonalon az autókat három, egymás utáni jelzőlámpa állíthatja meg. Bármely időpontban mindegyik $\frac{1}{2}$ valószínűséggel jelez szabad vagy tilos utat. Legyenek a ξ valószínűségi változó értékei azon jelzőlámpák száma, amelyek egy autónak az útvonalon tilosat mutatnak. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlását!

6. Három készüléket választunk ki megbízhatósági vizsgálathoz. A készülékek egymás után kerülnek vizsgálatra, de a vizsgálat megszakad, mihelyt valamelyik készülék nem felel meg a követelményeknek. Egy-egy készülék 0,7 valószínűséggel felel meg. Legyen a valószínűségi változó értéke a megvizsgált készülékek száma. Adjuk meg a valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét!

7. Három ember között először 100, majd 200 és végül 300 forintot sorsolnak ki; az egyes sorsolások eredménye független egymástól. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke egy előre kiszemelt résztvevőnek a sorsolás alapján jutó százasok száma. Határozzuk meg és ábrázoljuk a ξ eloszlásfüggvényét, és adjuk meg annak valószínűségét, hogy az illető 300 forintnál kevesebbet nyer, illetve hogy 350 forintnál kevesebbet nyer.

8. Egy ejtőernyős egy r méter sugarú körbe szeretne ugrani. A kör minden pontjába azonos valószínűséggel érkezhet az ejtőernyős. A ξ valószínűségi változó jelentse az ejtőernyős beérkezési helyének és a kör középpontjának távolságát (méterben). Határozzuk meg a ξ eloszlásfüggvényét, sűrűségfüggvényét, várható értékét és szórását! Ábrázoljuk az eloszlás- és a sűrűségfüggvényt! (Kidolgozott példa, geometriai valószínűség)

9. Egy valószínűségi változó eloszlásfüggvénye

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 1, \\ (x-1)^3 & \text{ha } 1 < x \leq 2, \\ 1 & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

   Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó sűrűségfüggvényét!

10. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{ha } 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3} & \text{ha } 1 \leq x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Határozzuk meg és ábrázoljuk a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!

11. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ cx^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

Határozzuk meg a c értékét és írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét! Mekkora valószínűséggel esik ξ az $]\,1,3\,[$ intervallumba?

12. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 2, \\ \frac{a}{x^3} & \text{ha } x > 2. \end{cases}$$

Határozzuk meg a értékét és írjuk fel ξ eloszlásfüggvényét! Milyen x értékekre adódik a $P(\xi > x)$ valószínűségre $\frac{1}{2}$?

13. Egy ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{4}, \\ 0 & \text{ha } \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

Határozzuk meg ξ eloszlásfüggvényét! Mennyi annak a valószínűsége, hogy a ξ-nek a 0-tól való eltérése kisebb, mint $0,1$?

14. Az alábbi függvények közül melyek sűrűségfüggvények?

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{2} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{ha } x > 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+1} & \text{ha } 0 < x < \infty, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}$$

15. Az alábbi függvények közül melyek eloszlásfüggvények?

    (a)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ \frac{x}{x+1} & \text{ha } x \geq 0. \end{cases}$$

    (b)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 0, \\ 1 & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

    (c)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 0, \\ 2 & \text{ha } 0 \leq x < 1. \\ 1 & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

16. Egységnyi hosszúságú szakaszon találomra kiválasztunk egymástól függetlenül két pontot. Legyen a valószínűségi változó a két pont távolsága. Adjuk meg az eloszlás- és sűrűségfüggvényt! Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy a két pont távolsága legalább $\frac{3}{4}$. (geometriai valószínűség)

17. Egy sorsjátékon 1 darab 5000 Ft-os, 10 db 500 Ft-os és 50 darab 100 Ft-os nyeremény van. A játékhoz 10 000 db sorsjegyet adnak ki. Mennyi legyen a jegy ára, hogy egy sorsjegyre a nyeremény várható értéke a jegy árának a felével egyezzék meg?

18. Két játékos közül az első egyszerre három darab forintos érmét dob fel, a második egyszerre két darab forintos érmét. Az nyer, aki több fejet dobott, és nyereségként megkapja a másik játékos feldobott érméit. Ha a fejek száma azonos, akkor a játékot addig folytatják, amíg valamelyikük nem nyer. Mekkora az első játékos nyereségének várható értéke? (A veszteséget „negatív nyereségnek” tekintjük.)

19. Egy sorsjátékban, amelyben ezer sorsjegy vesz részt, 1 db 1000 Ft-os, 10 db 100 Ft-os és 100 db 20 forintos nyereményt sorsolnak ki. Számítsuk ki a kisorsolt nyeremény várható értékét!

20. Egy szabályos pénzérmét feldobunk. Ha az első dobás eredménye fej, akkor még kétszer dobunk, ha írás, akkor még egyszer. Mennyi a fejdobások számának várható értéke?

21. Egy játékos feldob egy kockát. Ha páratlan számot dob, veszít 1 Ft-ot, ha 6-ost dob, nyer 4 Ft-ot, ha 2-est vagy 4-est, újból dobhat. A második dobásnál 1 Ft-ot nyer, ha párost dob, 2 Ft-ot veszít, ha páratlant dob. Állapítsuk meg, hogy a játékos számára előnyös, méltányos vagy hátrányos a játék!

22. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

    Számítsuk ki a valószínűségi változó várható értékét!

23. (nehezebb) Egy kockával addig dobunk, míg 6-os dobás nem lesz az eredmény. Mennyi az addigi dobásszám várható értéke, ha az utolsó dobást is beleszámítjuk?

24. A ξ valószínűségi változó eloszlása legyen a következőképpen adott:

$$P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{3}{8}, \quad P(\xi = 2) = P(\xi = -2) = \frac{1}{8} .$$

Határozzuk meg a ξ szórását!

25. A ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye legyen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{9} & \text{ha } 0 \leq x < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a ξ változó szórását!

26. Egy céllövés során minden találat $r = 18$cm sugarú körlapra jut. A lövés a kör bármely pontjára egyenlő eséllyel találhat. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a kör középpontjának és a lövés helyének távolsága. Számítsuk ki ξ várható értékét és szórását! (geometriai valószínűség)

27. Két pontot választunk találomra egy egységnyi hosszúságú szakaszon. Határozzuk meg a két pont távolságának várható értékét! (geometriai valószínűség)

28. (nehezebb) Egy dobozban 4 darab fehér és 6 darab fekete golyó van. Találomra kihúzunk egy-egy golyót, amíg fehéret nem választunk. A kihúzott golyókat azonnal visszadobjuk. Határozzuk meg a kihúzott golyók számának várható értékét és szórását!

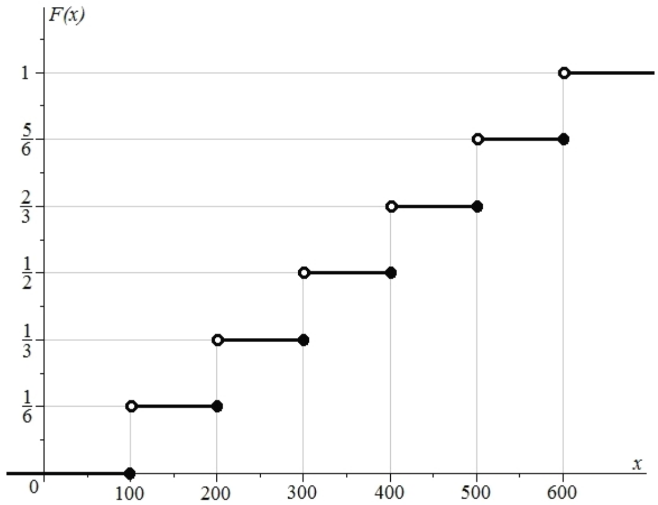
Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. *(Diszkrét eset)* Egy szabályos(!) dobókockával bármely számot azonos valószínűséggel dobjuk, egy-egy szám esetén az összes esetek száma 6, míg a kedvező esete 1; így a valószínűség $\frac{1}{6}$. A ξ valószínűségi változó a megnyert összeget mutatja, ezért az eloszlást a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{aligned}
P(\xi = 100) &= \frac{1}{6}\,, &\quad& \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 100 Ft-ot} \\
P(\xi = 200) &= \frac{1}{6}\,, && \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 200 Ft-ot} \\
P(\xi = 300) &= \frac{1}{6}\,, && \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 300 Ft-ot} \\
P(\xi = 400) &= \frac{1}{6}\,, && \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 400 Ft-ot} \\
P(\xi = 500) &= \frac{1}{6}\,, && \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 500 Ft-ot} \\
P(\xi = 600) &= \frac{1}{6}\,, && \text{mert } \frac{1}{6} \text{ valószínűséggel nyerünk 600 Ft-ot}
\end{aligned}$$

A ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0\,, & \text{ha } x \leq 100\,, \\ \frac{1}{6}\,, & \text{ha } 100 < x \leq 200\,, \\ \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\,, & \text{ha } 200 < x \leq 300\,, \\ \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,, & \text{ha } 300 < x \leq 400\,, \\ \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\,, & \text{ha } 400 < x \leq 500\,, \\ \frac{5}{6}\,, & \text{ha } 500 < x \leq 600\,, \\ 1\,, & \text{ha } 600 < x\,. \end{cases}$$



Az eloszlásfüggvény értelmezéséhez tekintsünk egy példát. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a nyereményünk 325 Ft-nál kevesebb lesz? A választ leolvashatjuk az eloszlásfüggvényből. A keresett valószínűséget matematikai nyelven $P(\xi < 325)$ alakban írhatjuk le, azaz az $F(325)$ értéket kell meghatározni. Az $F(325) = \frac{1}{2}$, tehát ekkora valószínűséggel nyerünk 325 Ft-nál kevesebbet. Ez a valószínűség pusztán következtetéssel is megkapható. A 325 Ft-nál kevesebb nyerhető összeg a 100 Ft, a 200 Ft és a 300 Ft, ez a lehetséges 6 esetből 3 kedvező esetet jelent.
Megjegyzés: Sűrűségfüggvényt diszkrét esetben nem lehet meghatározni, mivel a szükséges deriválást nem végezhetjük el minden pontban, és ahol el tudnánk végezni, ott a sűrűségfüggvény 0 értéket venne fel.

A várható érték és a szórás meghatározása a képletek segítségével történik.

$$M(\xi) = \sum p_k \cdot k = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot (k \cdot 100) = \frac{1}{6} \cdot 100 + \frac{1}{6} \cdot 200 + \ldots + \frac{1}{6} \cdot 600 =$$
$$= \frac{1}{6}(100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600) = \frac{2100}{6} = 350$$

A nyeremény várható értéke 350 Ft.

A szórásnégyzet képlete diszkrét esetben:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 = \sum p_k \cdot (x_k)^2 - \left(\sum p_k \cdot k\right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot (k \cdot 100)^2 - \left(\sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot (k \cdot 100)\right)^2 =$$
$$\frac{10000}{6}(1^2 + 2^2 + \ldots + 6^2) - 350^2 = \frac{910000}{6} - 122500 = \frac{175000}{6} \approx 29166,66$$

A szórás kb. 170,78 Ft.

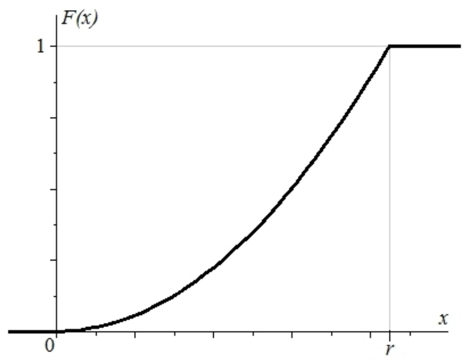
8. *(Folytonos eset)* Ha a diszkrét esethez hasonlóan szeretnénk meghatározni minden(!) körön belüli pontnak (mint beérkezési helynek) a valószínűségét, akkor végtelen sok (nem megszámlálható!) valószínűséget kellene kiszámolni, ami lehetetlen. (Éppen ez különbözteti meg a folytonos és a diszkrét esetet.)
Vizsgáljuk meg annak valószínűségét, hogy az ejtőernyős egy x sugarú körön belül érkezik meg. Az r sugarú kör minden pontja az „összes eset”, az x sugarú kör minden pontja a „kedvező eset” – ez egy geometriai valószínűség, az összes esetnek az eredeti kör területe, a kedvező eseteknek az x sugarú kör területe felel meg. Mivel ξ az ejtőernyős beérkezési helyének és az eredeti kör középpontjának távolságát jelenti, annak a valószínűsége, hogy az ejtőernyős x sugarú körön belül érkezik:

$$P(\xi < x) = \frac{x^2\pi}{r^2\pi} = \frac{x^2}{r^2} \; .$$

Ebből az eloszlásfüggvény:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0 \, , & \text{ha } \; x \leq 0 \, , \\ \frac{x^2}{r^2} \, , & \text{ha } \; 0 < x \leq r \, , \\ 1 \, , & \text{ha } \; x > r \; . \end{cases}$$

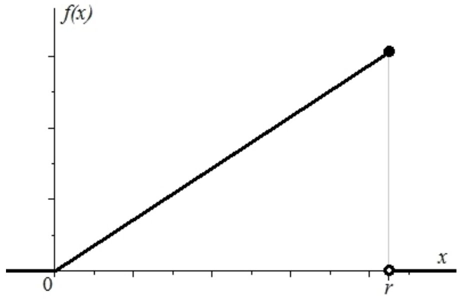
Rövid magyarázat: 0 a valószínűség, ha $x \leq 0$, hiszen egy negatív vagy nulla sugarú körnél kisebb(!) körön belüli érkezés lehetetlen esemény. 0 és r sugarú körökön belüli érkezés a fent tárgyalt geometriai valószínűségnek felel meg. 1 a valószínűség, ha $x > r$, ugyanis egy r-nél nagyobb körbe érkezés biztosan bekövetkezik.
Az eloszlásfüggvény grafikonja:



A ξ sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \, , & \text{ha } \; x \leq 0 \, , \\ \frac{2x}{r^2} \, , & \text{ha } \; 0 < x \leq r \, , \\ 0 \, , & \text{ha } \; x > r \; . \end{cases}$$

A sűrűségfüggvény grafikonja:



A ξ (azaz a kör középpontjától való távolság) várható értéke:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, \mathrm{d}x \overset{(*)}{=} \int_0^r \frac{2x}{r^2} \cdot x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{2}{r^2} \int_0^r x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^r = \frac{2r^3}{3r^2} = \frac{2r}{3} \, .$$

A $(*)$-gal jelölt lépésben azt használtuk fel, hogy ebben az esetben nem szükséges a teljes valós számok halmazán integrálni, mivel 0 „előtt” és r „után” nullát vesz fel a sűrűségfüggvény.
Az r (méter) sugarú kör középpontja és az érkezési hely távolságának várható értéke $\frac{2r}{3}$ méter.
A szórásnégyzet kiszámításához szükséges képlet folytonos esetben:

$$D^2(\xi) = M\left(\xi^2\right) - (M(\xi))^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x^2 \, \mathrm{d}x - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot x \, \mathrm{d}x \right)^2 =$$
$$= \int_0^r \frac{2x}{r^2} \cdot x^2 \, \mathrm{d}x - \left(\int_0^r \frac{2x}{r^2} \cdot x \, \mathrm{d}x \right)^2 = \frac{2}{r^2} \int_0^r x^3 \, \mathrm{d}x - \left(\frac{2r}{3} \right)^2 =$$
$$= \frac{2}{r^2} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^r - \frac{4r^2}{9} = \frac{2r^4}{4r^2} - \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{2} - \frac{4r^2}{9} = \frac{r^2}{18} \, .$$

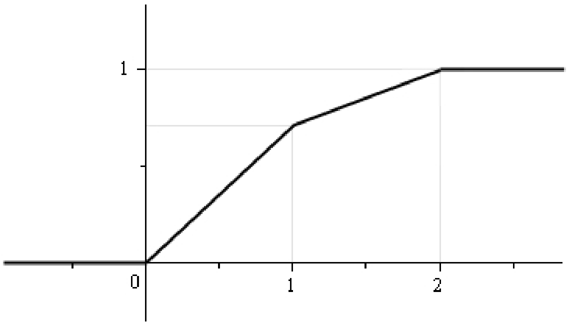
A szórás egy r méter sugarú kör esetén kb. $\frac{r}{4{,}24}$ méter.

10. Felhasználva az $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t$ összefüggést:

$$0 \le x < 1 \text{ esetén: } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2}{3} \, \mathrm{d}t = \ldots = \frac{2}{3}x$$
$$1 \le x < 2 \text{ esetén: } F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{3} \, \mathrm{d}t + \int_1^2 \frac{1}{3} \, \mathrm{d}t = \ldots = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$

(ugyanis a 0 és 2 közötti értékek kivételével a sűrűségfüggvény mindenhol 0.)
A fenti eredményeket felhasználva, az eloszlásfüggvény és annak grafikonja:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ \frac{2}{3}x, & \text{ha } 0 < x \le 1; \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & \text{ha } 1 < x \le 2; \\ 1, & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$



18. *Útmutató:* Legyen A_1 az az esemény, hogy az 1. játékos az első fordulóban nyer, B_1 pedig az, hogy a 2. játékos az első fordulóban nyer. Könnyen kiszámolható, hogy ekkor: $P(A_1) = \frac{16}{32}$ és $P(B_1) = \frac{6}{32}$. (E két esemény itt még nem alkot teljes eseményrendszert, hiszen kimaradtak azok az események, amikor mindkét játékos ugyanannyi fejet dobott.)
Egyrészt a játék minden egyes fordulójában az 1. és 2. játékos nyerési esélyének aránya ugyanannyi, mint az első fordulóban. Másrészt, a két játékos közül az egyik biztosan nyer, ezért ha A az 1. játékos, B a 2. játékos nyerését jelöli, akkor

$$\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{16}{32}}{\frac{6}{32}} = \frac{8}{3} \qquad \text{és} \qquad P(A) + P(B) = 1$$

egyenletrendszert kapjuk. Innen már egyszerű kiszámolni a szükséges valószínűségeket, és a keresett várható értéket.

23. *Útmutató:* Használjuk fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

28. *Útmutató:* Használjuk fel, hogy $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ és $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot q^{k-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$.

Végeredmények

(Az eloszlás- és sűrűségfüggvények ábrázolását a végeredményben nem közöljük.)

2. $P(\xi = 2) = \frac{1}{36}$, $P(\xi = 3) = \frac{2}{36}$, $P(\xi = 4) = \frac{3}{36}$, $P(\xi = 5) = \frac{4}{36}$, $P(\xi = 6) = \frac{5}{36}$, $P(\xi = 7) = \frac{6}{36}$, $P(\xi = 8) = \frac{5}{36}$, $P(\xi = 9) = \frac{4}{36}$, $P(\xi = 10) = \frac{3}{36}$, $P(\xi = 11) = \frac{2}{36}$, $P(\xi = 12) = \frac{1}{36}$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 2; \\ \frac{1}{36}, & \text{ha } 2 < x \le 3; \\ \frac{3}{36}, & \text{ha } 3 < x \le 4; \\ \frac{6}{36}, & \text{ha } 4 < x \le 5; \\ \frac{10}{36}, & \text{ha } 5 < x \le 6; \\ \frac{15}{36}, & \text{ha } 6 < x \le 7; \\ \frac{21}{36}, & \text{ha } 7 < x \le 8; \\ \frac{26}{36}, & \text{ha } 8 < x \le 9; \\ \frac{30}{36}, & \text{ha } 9 < x \le 10; \\ \frac{33}{36}, & \text{ha } 10 < x \le 11; \\ \frac{35}{36}, & \text{ha } 11 < x \le 12; \\ \frac{36}{36} = 1, & \text{ha } 12 < x. \end{cases}$$

3. $P(\xi = 0) = \frac{6}{36}$, $P(\xi = 1) = \frac{10}{36}$, $P(\xi = 2) = \frac{8}{36}$, $P(\xi = 3) = \frac{6}{36}$, $P(\xi = 4) = \frac{4}{36}$, $P(\xi = 5) = \frac{2}{36}$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{6}{36}, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ \frac{16}{36}, & \text{ha } 1 < x \leq 2; \\ \frac{24}{36}, & \text{ha } 2 < x \leq 3; \\ \frac{30}{36}, & \text{ha } 3 < x \leq 4; \\ \frac{34}{36}, & \text{ha } 4 < x \leq 5. \\ 1, & \text{ha } 5 < x \end{cases}$$

$P(2 < \xi \leq 4) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{5}{18}$

4.

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq -1; \\ \frac{1}{3}, & \text{ha } -1 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

$F(0) = \frac{1}{3}$

5. $P(\xi = 0) = \frac{1}{8}$, $P(\xi = 1) = \frac{3}{8}$, $P(\xi = 2) = \frac{3}{8}$, $P(\xi = 3) = \frac{1}{8}$

6. $P(\xi = 1) = 0,3$, $P(\xi = 2) = 0,21$, $P(\xi = 3) = 0,49$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0\ , & \text{ha } x \leq 1; \\ 0,3\ , & \text{ha } 1 < x \leq 2 \\ 0,51\ , & \text{ha } 2 < x \leq 3 \\ 1\ , & \text{ha } 3 < x \end{cases}$$

7. $P(\xi = 0) = \frac{8}{27}$, $P(\xi = 1) = \frac{4}{27}$, $P(\xi = 2) = \frac{4}{27}$, $P(\xi = 3) = \frac{6}{27}$, $P(\xi = 4) = \frac{2}{27}$, $P(\xi = 5) = \frac{2}{27}$, $P(\xi = 6) = \frac{1}{27}$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{8}{27}, & \text{ha } 0 < x \leq 1 \\ \frac{12}{27}, & \text{ha } 1 < x \leq 2; \\ \frac{16}{27}, & \text{ha } 2 < x \leq 3; \\ \frac{22}{27}, & \text{ha } 3 < x \leq 4; \\ \frac{24}{27}, & \text{ha } 4 < x \leq 5; \\ \frac{26}{27}, & \text{ha } 5 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

$P(\xi < 3) = F(3) = \frac{16}{27}$, $P(\xi < 3,5) = F(3,5) = \frac{22}{27}$

9.

$$f(x) = \begin{cases} 3(x-1)^2, & \text{ha } 1 < x \leq 2; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

11. $c = \frac{3}{8}$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{x^3}{8}, & \text{ha } 0 < x \leq 2; \\ 1, & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

$P(1 < \xi < 3) = F(3) - F(1) = \frac{7}{8}$

12. $a = 8$

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2; \\ 1 - \frac{4}{x^2}, & \text{ha } 2 < x. \end{cases}$$

$P(\xi > x) = 1 - P(\xi < x) = \frac{1}{2}$, ha $x = \sqrt{8}$

13.

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 2\sqrt{x}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{1}{4}; \\ 1, & \text{ha } \frac{1}{4} < x. \end{cases}$$

$P(-0,1 < \xi < 0,1) = \frac{2}{\sqrt{10}}$

14. Felhasználva, hogy $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, csak a (b)-beli és az (e)-beli függvény sűrűségfüggvény.

15. (a) igen, (b) igen, (c) nem.

16. (A feladat megoldása hasonló a Geometriai valószínűség fejezet 2. példájánál látottakkal.)

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 2x - x^2, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ 1, & \text{ha } 1 < x. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x, & \text{ha } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

$P\left(\xi \geq \frac{3}{4}\right) = 1 - P\left(\xi < \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{16}$

17. A jegy ára 3 Ft.

18. $M(\xi) = \frac{7}{11}$

19. $M(\xi) = 4$

20. $M(\xi) = \frac{5}{4}$

21. $M(\xi) = 0$, így a játékos számára méltányos a játék.

22. $M(\xi) = \frac{1}{3}$

23. $M(\xi) = 6$

24. $D(\xi) = \sqrt{\frac{7}{4}}$

25. $D(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

26. $M(\xi) = 12$, $D^2(\xi) = 18$

27. $M(\xi) = \frac{1}{3}$ (Felhasználva a 16. feladat eredményeit.)

28. $M(\xi) = 2,5$, $D^2(\xi) = 3,75$

4.5. Nevezetes diszkrét és folytonos eloszlások

Rövid elméleti összefoglaló

Binomiális eloszlás: Tekintsünk m darab elemet, amelyek közül egy darab p valószínűséggel A-típusú, és $(1-p)$ valószínűséggel B-típus. Visszatevéssel kihúzunk n darabot, és jelentse ξ diszkrét valószínűségi változó a kihúzott A-típusú darabok számát. Ekkor ξ binomiális eloszlású:

$$P(\xi = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = n \cdot p \qquad D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Típusfeladata: Egy termék esetén visszatevéses mintavételnél a kihúzott selejtek száma.

Hipergeometrikus eloszlás: Tekintsünk m darab elemet, amelyből s darab A-típusú. Visszatevés nélkül kiveszünk belőlük n darabot, és a ξ diszkrét valószínűségi változó a kihúzott elemekből az A-típusúak számát jelöli. Ekkor ξ hipergeometrikus eloszlású:

$$P(\xi = k) = \frac{\binom{s}{k} \cdot \binom{m-s}{n-k}}{\binom{m}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Várható értéke és szórása, ahol $p = \frac{s}{m}$:

$$M(\xi) = n \cdot p \qquad D(\xi) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p) \cdot \left(1 - \frac{n-1}{m-1}\right)}$$

Típusfeladata: Egy termék esetén visszatevés nélküli mintavételnél a kihúzott selejtek száma.

Geometriai eloszlás: Egy A esemény valószínűsége legyen p, az ellentett eseményé pedig $(1-p)$. A ξ diszkrét valószínűségi változó a $(k+1)$ értéket veszi fel, ha az A esemény először éppen az $(k+1)$-adik alkalommal következik be. Ekkor ξ geometriai eloszlású:

$$P(\xi = k+1) = p \cdot (1-p)^k \qquad k = 0, 1, \ldots$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = \frac{1}{p} \qquad\qquad D(\xi) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}$$

Típusfeladata: Tekintsünk m darab terméket, amelyeknél egy adott termék p valószínűséggel selejtes. Visszatevéssel húzzuk ki a termékeket egymás után addig, amíg az első selejtes terméket kihúztuk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy ez volt a $(k+1)$-edik húzás?
Megjegyzés: A geometriai eloszlás az ún. negatív binomiális eloszlás speciális esete.

Poisson-eloszlás: Egy ξ diszkrét valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű Poisson-eloszlást követ, ha

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \qquad\qquad k = 0, 1, \ldots$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = \lambda \qquad\qquad D(\xi) = \sqrt{\lambda}$$

Típusfeladatai: Adott időszakban bekövetkező véletlen események száma – például adott időszakban meghibásodó alkatrészek száma, adott területre eső esőcseppek száma, egy nyári estén látható csillaghullások száma stb.

Egyenletes eloszlás: Egy ξ folytonos valószínűségi változó egyenletes eloszlású az $]\,a, b\,[$ intervallumon, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{ha } a < x \le b; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{ha } a < x \le b; \\ 1, & \text{ha } b < x. \end{cases}$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} \qquad\qquad D(\xi) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Típusfeladata: Adott időszakban bekövetkező esemény tényleges bekövetkezési időpontja, például: egy telefonközpontban a hívás beérkezésétől a kapcsolásig terjedő időtartam 10 és 25 másodpercig terjed. Az eltelt idő ekkor egyenletes eloszlású valószínűségi változóval jellemezhető.

Exponenciális eloszlás: Egy ξ folytonos valószínűségi változó $\lambda > 0$ paraméterű exponenciális eloszlású, ha sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

Ekkor az eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \qquad\qquad D(\xi) = \frac{1}{\lambda}$$

Típusfeladata: Egy alkatrész első meghibásodása az élettartama során, radioaktív bomlási folyamat stb.

Normális eloszlás: Egy ξ valószínűségi változó normális eloszlású m és $\sigma > 0$ paraméterekkel ($\mathcal{N}(m, \sigma)$), ha sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Ezen sűrűségfüggvény grafikonja ún. haranggörbe, és ekkor ξ eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t$$

Várható értéke és szórása:

$$M(\xi) = m \qquad\qquad D(\xi) = \sigma$$

Ha $m = 0$ és $\sigma = 1$, akkor *standard normális eloszlás*ról van szó, amelynél a sűrűségfüggvényt φ-vel, az eloszlásfüggvényt Φ-vel jelöljük:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad\qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$$

Fennáll továbbá a következő egyenlőség is:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

Egy $\mathcal{N}(m, \sigma)$ eloszlású valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvénye kifejezhető a φ és Φ függvényekkel is:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad\qquad F(x) = \Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Típusfeladatai: Mérési hibák eloszlása, egy gyártási folyamatban fellépő méret- vagy súlyingadozás, stb.

Feladatok

1. Adott 200 darab termék közül 60 darab elsőosztályú. Találomra kiválasztunk 6 darabot egymás után, visszatevéssel. Legyen a ξ valószínűségi változó a kiválasztott elsőosztályú darabok száma. Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlását, továbbá határozzuk meg várható értékét és szórását!

2. A tapasztalat alapján 1000 újszülöttből átlagosan 516 a fiú és 484 a lány. Mekkora a valószínűsége, hogy egy 6 gyermekes családban legfeljebb egy lány van?

3. Öt katona lő egy céltáblára. Mindegyikük 100 lövése közül átlag 30 talál. Mekkora a valószínűsége, hogy ha egyszerre leadnak egy-egy lövést, akkor legfeljebb 3 találat lesz a táblán?

4. Valamely 4000 darabból álló szállítmányban 400 darab selejt található. Visszatevéses módszerrel 10 elemű mintát veszünk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mintában legfeljebb 3 selejt van?

5. Egy binomiális eloszlású valószínűségi változó várható értéke 4, szórása pedig $\frac{4\cdot\sqrt{5}}{5}$. Mekkora az n és p értéke?

6. Egy dobozban 9 golyó van, amelyekből 4 barna színű. Találomra kiveszünk 3 golyót. A ξ valószínűségi változó értéke legyen a kihúzott barna golyók száma. Adjuk meg ξ eloszlását, majd határozzuk meg a várható értékét és szórását!

7. Próbagyártás során 20 gép készül el, amelyek közül 5 javításra szorul. A teljes mennyiségből 4 találomra kiszemelt gépet küldenek felülvizsgálatra. A gyártás akkor indulhat meg, ha a felülvizsgált gépek közül legfeljebb egy szorul javításra. Mennyi a valószínűsége annak, hogy megindulhat a gyártás?

8. Egy pénzdarabot dobálunk mindaddig, amíg először kapunk fejet. Mennyi a valószínűsége annak, hogy csak négy vagy több dobásból álló sorozattal érjük ezt el?

9. Egy motor bekapcsolásakor $0,02$ valószínűséggel kiég. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a kiégésig végbemenő bekapcsolások száma. Határozzuk meg a valószínűségi változó eloszlását, várható értékét és szórását!

10. Legyen ξ egy $\lambda = 4$ paraméterű Poisson-eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg várható értékét és szórását! Milyen valószínűséggel esik ξ a $]\,2,5\,[$ intervallumba? Milyen valószínűséggel vesz fel ξ a várható értéknél kisebb értéket?

11. Egy telefonközpontba percenként átlagosan 4 hívás fut be. Mennyi annak a valószínűsége, hogy 1 perc alatt 6 hívás fut be?

12. Egy 400 oldalas nyomdai korrektúrában átlagosan 400 sajtóhiba található. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy találomra választott oldalon legalább 3 sajtóhiba van, ha feltételezzük, hogy a sajtóhibák száma Poisson-eloszlású?

13. Televízió-készülékek gyártásakor 200 készülékre átlagban 100 hiba jut. Az előző tapasztalatokból tudjuk, hogy a hibák Poisson-eloszlásúak. Legfeljebb hány legyártott készüléket választhatunk ki egyszerre úgy, hogy a kiválasztott készülékek legalább $0,1$ valószínűséggel mind hibátlanok legyenek?

14. Egy orsózógépen 100 munkaóra alatt átlagban 3 szakadás következik be. Mennyi a valószínűsége annak, hogy egy ilyen időtartam alatt a szakadások száma nem lépi túl az átlagot? Az általános tapasztalat alapján feltehető, hogy a szakadások Poisson-eloszlás szerint következnek be.

15. Határozzuk meg a $]\,3,7\,[$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét, valamint várható értékét és szórását!

16. Egy egyenletes eloszlású valószínűségi változó várható értéke 4, szórásnégyzete $\frac{4}{3}$. Írjuk fel az eloszlásfüggvényt!

17. Telefonhívás alkalmával a tárcsázás befejezésétől a kapcsolásig eltelt időt tekintsük valószínűségi változónak. Tegyük fel, hogy ez a valószínűségi változó egyenletes eloszlású, és a kapcsolás időtartama 5 mp-től 105 mp-ig terjedhet. Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Határozzuk meg a várható értéket és a szórást! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy legalább egy percig kell vámunk a kapcsolásra!

18. Egy rádióállomás minden órában közli a pontos időt. Valaki bekapcsolja a rádiót. Mennyi a valószínűsége, hogy legfeljebb 10 percet kell várnia az időjelzésre, ha feltételezzük, hogy a rádió bekapcsolásának időpontja egyenletes eloszlású?

19. Egy gép működési időtartama az első meghibásodásig exponenciális eloszlású valószínűségi változó. Írjuk fel az eloszlás- és sűrűségfüggvényét, ha várható értéke 2 év!

20. Egy benzinkútnál a tapasztalatok szerint a várakozási idő átlagosan 4 perc. Ha a várakozási idő exponenciális eloszlású, akkor mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alkalommal 3 percnél többet, de 4 percnél kevesebbet kell várakozni?

21. Bizonyos típusú izzólámpák tönkremeneteléig eltelt égési időtartam hosszát tekintsük ξ valószínűségi változónak. Megállapították, hogy ξ exponenciális eloszlású és szórása 1000 óra. Határozzuk meg ξ várható értékét! Írjuk fel a ξ valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy egy kiszemelt izzólámpa 3000 órán belül még nem megy tönkre!

22. Távolságmérést végeznek terepen. A valódi és a mért hosszúság különbségét, vagyis a mérési hibát valószínűségi változónak tekintjük. Ez a ξ valószínűségi változó normális eloszlású, várható értéke -20 m, szórása 40 m. (Mivel a várható érték nem nulla, a mérési eredmény nem csak véletlen hibát tartalmaz, hanem szisztematikus torzítást is.) Írjuk fel a valószínűségi változó sűrűség- és eloszlásfüggvényét! Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a hiba abszolút értéke 60 m-nél kevesebb!

23. Egy repülőgép pilótájával közlik a 100 m magasságú légifolyosó közepének földtől mért távolságát. A repülőgép repülési magasságának ettől való eltérése egy ξ valószínűségi változó, amely normális eloszlású, 20 m várható értékkel és 50 m szórással. Számítsuk ki annak valószínűségét, hogy a repülőgép a légifolyosó alatt, a légifolyosóban, ill. a felett halad!

24. Egy munkapadról kikerülő alkatrész hossza normális eloszlású, $m = 30$ cm várható értékkel és $\sigma = 0,2$ cm szórással.

    (a) Írjuk fel a valószínűségi változó eloszlás- és sűrűségfüggvényét!

    (b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy alkatrész hossza 29,7 cm és 30,3 cm közé esik?

(c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a várható értéktől való eltérés abszolút értéke 1 cm-nél kevesebb?

(d) Milyen pontosságot biztosíthatunk 0,9 valószínűséggel a munkadarabok hosszára?

25. A liszt csomagolásánál a csomagológép 1 kg várható súlyú csomagokat készít 2,5 dkg szórással. Feltehető, hogy a csomagolt mennyiség súlya normális eloszlású. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy csomagban 95 dkg-nál kevesebb liszt lesz?

26. Legyen ξ $\mathcal{N}(3,2)$ eloszlású valószínűségi változó. Határozzuk meg a $P(-2 < \xi < 3)$ és a $P(0,1 < |\xi|)$ valószínűségeket!

27. Egy automata gép 2 kg lisztet rak egy-egy zacskóba, de véletlen ingadozás következtében a zacskókban lévő liszt mennyisége $\mathcal{N}(m,\sigma)$ eloszlású. Előzetes megfigyelésekből tudni lehet, hogy $\sigma = 0,002$, valamint, hogy annak a valószínűsége, hogy egy zacskóban kevesebb van 2 kg-nál $0,01$. Határozzuk meg m értékét! Milyen σ mellett biztosíthatjuk, hogy a fenti valószínűség $0,001$ legyen?

28. Egy alkatrész működési ideje (órában mérve) $\mathcal{N}(20000,1500)$ eloszlású. Ha az alkatrész 15000 óránál rövidebb ideig működik, akkor gyárilag selejtesnek minősül. Az alkatrészek hány százaléka lesz selejtes?

Megjegyzés: A standard normális eloszlás táblázatát lásd a fejezet végén.

Kidolgozott mintapéldák és útmutatások

1. Ez a feladat a *binomiális eloszlás* típuspéldája. Az elméleti összefoglaló jelöléseit használva: $m = 200$, $p = \frac{60}{200} = \frac{3}{10}$, $1 - p = \frac{7}{10}$ és $n = 6$. Ezeket felhasználva, az eloszlás ($k = 0, 1, \ldots, 6$):

$$P(\xi = 0) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^6 = \frac{7^6}{10^6}$$

$$P(\xi = 1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^1 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^5 = \ldots = \frac{6 \cdot 3 \cdot 7^5}{10^6}$$

$$P(\xi = 2) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^4 = \ldots = \frac{15 \cdot 3^2 \cdot 7^4}{10^6}$$

$$P(\xi = 3) = \binom{6}{3} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^3 = \ldots = \frac{20 \cdot 3^3 \cdot 7^3}{10^6}$$

$$P(\xi = 4) = \binom{6}{4} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^2 = \ldots = \frac{15 \cdot 3^4 \cdot 7^2}{10^6}$$

$$P(\xi = 5) = \binom{6}{5} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^1 = \ldots = \frac{6 \cdot 3^5 \cdot 7}{10^6}$$

$$P(\xi = 6) = \binom{6}{6} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^6 \cdot \left(\frac{7}{10}\right)^0 = \frac{3^6}{10^6}$$

A várható érték és a szórás pedig:

$$M(\xi) = 6 \cdot \frac{3}{10} = \frac{9}{5} \qquad D(\xi) = \sqrt{6 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}} = \ldots = \frac{3 \cdot \sqrt{14}}{10} \approx 1,12$$

3. Jelölje ξ a találatok számát. Ekkor ξ *binomiális eloszlású*, ahol $n = 5$ és $p = \frac{3}{10}$ (ugyanis 5 katona van és mindegyiküknél 100 lövésből 30 talál célba). A „legfeljebb 3 találat" azt jelenti, hogy a találatok száma 0, 1, 2 vagy 3. Ezért a keresett valószínűség:

$$P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$
$$= 1 - (P(\xi = 4) + P(\xi = 5)) = 1 - \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \cdot \frac{7}{10} - 1 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^5 \cdot 1 =$$
$$= 1 - \frac{5 \cdot 3^4 \cdot 7}{10^5} - \frac{3^5}{10^5} = \ldots = 0,96922$$

(Hasznos és gyakran használt trükk, hogy a kérdéses esemény helyett az ellentett eseményt írjuk fel. A kérdéses esemény valószínűségét megkapjuk, ha a biztos esemény valószínűségéből kivonjuk az ellentett esemény valószínűségét.)

6. A dobozból való húzás visszatevés nélküli, továbbá kétféle golyó van benne: barna és nem barna golyók. Ha ξ jelöli a kihúzott barna golyók számát, akkor ξ *hipergeometrikus eloszlású*, ahol $m = 9$, $s = 4$ és $n = 3$. Ezekből kiszámolható, hogy $p = \frac{s}{m} = \frac{4}{9}$ (ez éppen annak a valószínűsége, hogy egy kihúzott golyó barna színű). Az elméleti összefoglalóban leírt képletet felhasználva az eloszlás ($k = 0, 1, 2, 3$):

$$P(\xi = 0) = \frac{\binom{4}{0} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \ldots = \frac{5}{42}$$
$$P(\xi = 1) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{5}{2}}{\binom{9}{3}} = \ldots = \frac{10}{21}$$
$$P(\xi = 2) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{9}{3}} = \ldots = \frac{5}{14}$$
$$P(\xi = 3) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{9}{3}} = \ldots = \frac{1}{21}$$

A várható érték és a szórás:

$$M(\xi) = 3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{3} \qquad D(\xi) = \sqrt{3 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} \cdot \left(1 - \frac{2}{8}\right)} = \ldots = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

8. Jelölje ξ a lehetséges dobások számát. Annak a valószínűsége, hogy egy dobás fejet eredményez: $p = \frac{1}{2}$. Ekkor ξ *geometriai eloszlású*. A kérdéses esemény az, hogy „4 vagy több dobásból áll a sorozat", amelynek valószínűségét a következőképpen írhatjuk fel:

$$P(4 \leq \xi) = 1 - P(\xi < 4) = 1 - (P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3)) =$$
$$= 1 - p \cdot (1 - p)^0 - p \cdot (1 - p)^1 - p \cdot (1 - p)^2 =$$
$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \ldots = 1 - \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$$

10. A feladat szövege szerint ξ *Poisson-eloszlású* valószínűségi változó, ahol $\lambda = 4$. Ekkor az eloszlása, várható értéke és szórása:

$$P(\xi = k) = \frac{4^k}{k!} \cdot e^{-4} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$M(\xi) = 4 \qquad D(\xi) = \sqrt{4} = 2$$

Annak valószínűsége, hogy a ξ a 2 és 5 értékek közé esik:

$$P(2 < \xi < 5) = P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{1}{e^4} + \frac{4^4}{4!} \cdot \frac{1}{e^4} =$$
$$= \left(\frac{64}{6} + \frac{256}{24}\right) \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{512}{24 \cdot e^4} = \frac{64}{3 \cdot e^4} \approx 0,39$$

Annak valószínűsége, hogy a ξ a várható értéknél kisebb értéket vesz fel:

$$P(\xi < 4) = P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) =$$
$$= \left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3}\right) \cdot \frac{1}{e^4} = \frac{71}{3 \cdot e^4} \approx 0,433$$

13. *Útmutató:* Legyen n a kérdéses darabszám, a ξ pedig az n db készülékben lévő hibás darabok száma. Ekkor $\lambda = \frac{100}{200} \cdot n = \frac{n}{2}$, a kérdésnek megfelelő (megoldandó) egyenlőtlenség: $P(\xi = 0) > 0,1$.

17. A ξ valószínűségi változó *egyenletes eloszlású* az $]\,5, 105\,[$ intervallumon, így az eloszlás-, illetve sűrűségfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 5; \\ \frac{x-5}{100}, & \text{ha } 5 < x \le 105; \\ 1, & \text{ha } 5 < x. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & \text{ha } 5 < x \le 105; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

A várható érték és a szórás (másodpercben):

$$M(\xi) = \frac{5 + 105}{2} = 55 \qquad D(\xi) = \frac{105 - 5}{\sqrt{12}} = \frac{50}{\sqrt{3}} \approx 28,8$$

Annak valószínűsége, hogy legalább 1 percet várnunk kell:

$$P(60 \le \xi) = 1 - P(\xi < 60) = 1 - \frac{60 - 5}{100} = \frac{45}{100}$$

21. Az izzólámpák tönkremenetelének ideje a használata során *exponenciális eloszlású* (azaz az idő haladtával egyszer biztosan tönkremegy). Az ilyen eloszlású valószínűségi változók várható értéke egybeesik a szórással, ezért $M(\xi) = 1000$. Az eloszláshoz tartozó paraméter kiszámítható a várható értékből: $M(\xi) = \frac{1}{\lambda}$, azaz $\lambda = \frac{1}{1000}$. Az eloszlás- és sűrűségfüggvény:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{1000}}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \le 0; \\ \frac{e^{-\frac{x}{1000}}}{1000} & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

Annak valószínűsége, hogy egy adott izzó 3000 órán belül nem megy tönkre (más szavakkal, a tönkremenetelének ideje több, mint 3000):

$$P(3000 \le \xi) = 1 - P(\xi < 3000) = 1 - F(3000) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{3000}{1000}}\right) = \frac{1}{e^3} \approx 0,05$$

24. A feladatban szereplő valószínűségi változó *normális eloszlású*, ahol $m = 30$ és $\sigma = 0,2$.

   (a) Az eloszlás- és sűrűségfüggvény:

$$F(x) = \frac{1}{0,2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-30)^2}{0,08}} \mathrm{d}t \qquad f(x) = \frac{1}{0,2 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-30)^2}{0,08}}$$

   (b) Annak valószínűsége, hogy egy alkatrész hossza 29,7 cm és 30,3 cm közötti:

$$\begin{aligned} P(29,7 < \xi < 30,3) &= F(30,3) - F(29,7) = \\ &= \Phi\left(\frac{30,3-30}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{29,7-30}{0.2}\right) = \\ &= \Phi(1,5) - \Phi(-1,5) = \Phi(1,5) - (1-\Phi(1,5)) = \\ &= 2 \cdot \Phi(1,5) - 1 \approx 2 \cdot 0,9332 - 1 = 0,8664 \end{aligned}$$

   (A Φ függvény értékeit táblázat segítségével adtuk meg.)

   (c) A várható értéktől való eltérés ± 1 cm-nél kevesebb:

$$\begin{aligned} P(29 < \xi < 31) &= F(31) - F(29) = \Phi\left(\frac{31-30}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{29-30}{0,2}\right) = \\ &= \Phi(5) - \Phi(-5) = \Phi(5) - (1-\Phi(5))\, 2 \cdot \Phi(5) - 1 \approx 1 \end{aligned}$$

   (d) 0,9 valószínűséggel a követező hosszúságot biztosíthatjuk:

$$\begin{aligned} P(30 - x < \xi < 30 + x) =& 0,9 \\ F(30+x) - F(30-x) =& 0,9 \\ \Phi\left(\frac{30+x-30}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{30-x+30}{0,2}\right) =& 0,9 \\ \Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{0,2}\right) =& 0,9 \\ \Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{0,2}\right)\right) =& 0,9 \\ 2 \cdot \Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) =& 1,9 \\ \Phi\left(\frac{x}{0,2}\right) =& 0,95 \\ \frac{x}{0,2} \approx& 1,645 \\ x \approx& 0,329 \end{aligned}$$

   A kívánt valószínűséggel $30 \pm 0,329$ cm-es pontosságot biztosíthatunk.

27. A feladatban ξ jelentse a zacskóba töltött liszt mennyiségét, amely *normális eloszlású*. Kiindulva abból, hogy a szórás $0,002$ és $P(\xi < 2) = 0,01$ (azaz annak

valószínűsége, hogy egy zacskóban 2 kg-nál kevesebb liszt van 0,01):

$$\begin{aligned}
P(\xi < 2) = F(2) &= 0,01 \\
\Phi\left(\frac{2-m}{0,002}\right) &= 0,01 \\
\Phi\left(-\frac{m-2}{0,002}\right) &= 0,01 \\
\Phi\left(\frac{m-2}{0,002}\right) &= 0,99 \\
\frac{m-2}{0,02} &\approx 2,33 \\
m-2 &\approx 0,0466 \\
m &\approx 2,0466
\end{aligned}$$

Tehát a várható érték $m = 2,0466$.
Ha a fenti várható értékből indulunk ki, a $P(\xi < 2) = 0,001$ valószínűséget a következő σ szórás mellett biztosíthatjuk (kiindulva az előző számolás 3. sorából):

$$\begin{aligned}
\Phi\left(-\frac{2,0466-2}{\sigma}\right) &= 0,001 \\
\Phi\left(\frac{2,0466-2}{\sigma}\right) &= 0,999 \\
\Phi\left(\frac{0,0466}{\sigma}\right) &= 0,999 \\
\frac{0,0466}{\sigma} &\approx 3,1 \\
\sigma &\approx 0,015
\end{aligned}$$

Végeredmények

2. (binomiális eloszlás) ξ: lányok száma; $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) \approx 0,125$

4. (binomiális e.) $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) + P(\xi = 2) + P(\xi = 3) \approx 0,9872$

5. (binomiális e.) $p = \frac{1}{5}$, $n = 20$

7. (hipergeometrikus e.) $m = 20$, $s = 5$, $n = 4$; $P(\xi = 0) + P(\xi = 1) \approx 0,75$

9. (geometriai e.) ξ: kapcsolások száma, $p = 0,02$; $P(\xi = k+1) = 0,02 \cdot 0,98^k$, $M(\xi) = 50$, $D(\xi) \approx 49,5$

11. (Poisson-e.) $\lambda = 4$; $P(\xi = 6) \approx 0,104$

12. (Poisson-e.) $\lambda = \frac{400}{400} = 1$; $P(\xi \geq 3) \approx 0,08$

13. (Poisson-e.) $n < 4,6$ (Legfeljebb 4 db televíziót választhatunk ki.)

14. (Poisson-e.) $\lambda = 3$; $P(\xi \leq 3) \approx 0,65$

15. (egyenletes e.) $M(\xi) = 5$, $D(\xi) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{ha } 3 < x \leq 7; \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 3; \\ \frac{x-3}{4}, & \text{ha } 3 < x \leq 7; \\ 1, & \text{ha } 7 < x. \end{cases}$$

16. (egyenletes e.) $a = 2$, $b = 6$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 2; \\ \frac{x-2}{4}, & \text{ha } 2 < x \leq 6; \\ 1, & \text{ha } 6 < x. \end{cases}$$

18. (egyenletes e.) ξ: a rádió bekapcsolásának időpontja a legutóbbi pontos idő közlése óta; $P(50 \geq \xi) = \frac{1}{6}$

19. (exponenciális e.) $\lambda = \frac{1}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{2}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \leq 0; \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}}, & \text{ha } 0 < x. \end{cases}$$

20. (exponenciális e.) $\lambda = \frac{1}{4}$; $P(3 < \xi < 4) \approx 0,104$

22. (normális e.) $P(-60 < \xi < 60) \approx 0,8185$

$$f(x) = \frac{1}{40 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x+20)^2}{3200}} \qquad F(x) = \frac{1}{40 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(t+20)^2}{3200}} \mathrm{d}t$$

23. (normális e.) $P(\xi < -50) \approx 0,0808$, $P(-50 < \xi < 50) \approx 0,6449$, $P(50 < \xi) \approx 0,2743$

25. (normális e.) $P(\xi < 95) \approx 0,0228$

26. (normális e.) $P(-2 < \xi < 3) \approx 0,4938$, $P(0,1 < |\xi|) = P(0,1 < \xi) + P(\xi < -0,1) \approx 0,9871$

28. (normális e.) $P(\xi < 15000) \approx 0,0004$ (Kb. $0,04\%$ selejtes.)

A standard normális eloszlás táblázata

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

5. fejezet

Kiegészítések

5.1. Középiskolai alapok röviden

A következőkben röviden összefoglaljuk az általános- és középiskolában megtanult legfontosabb algebrai szabályokat. (Ezeket minden hallgatónak gyorsan és hibátlanul kell tudni használni.)

Alapműveletek, műveletek törtekkel

$$a+(-b)=a-b, \quad a-(-b)=a+b, \quad -a+b=b-a, \quad -a+(-b)=-a-b=-(a+b)$$

$$a\cdot b=ab, \quad a\cdot(-b)=-ab, \quad (-a)\cdot b=-ab, \quad (-a)\cdot(-b)=ab$$

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}=\frac{ad\pm cb}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}, \quad a\cdot\frac{1}{b}=\frac{a}{b}, \quad a\cdot\frac{1}{\frac{1}{b}}=ab, \quad \frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}}=\frac{b}{a}$$

$$a\pm 0=a, \quad 0\pm a=\pm a, \quad a\cdot 0=0, \quad \frac{0}{a}=0, \quad \frac{a}{0} \text{ nincs értelmezve}$$

$$a+a+a+\ldots+a=k\cdot a, \qquad \text{ha az } a\text{-t } k\text{-szor adtuk össze}$$

Ezek kombinálásával például: $a-(b-c)=a-b+c$ és $a(b+c)=ab+ac$

Hatványozás és gyökvonás

$$a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a=a^k, \qquad \text{ha az } a\text{-t } k\text{-szor szoroztuk össze}$$

$$a^{-x}=\frac{1}{a^x}, \quad a^{x+y}=a^x\cdot a^y, \quad a^{x-y}=\frac{a^x}{a^y}, \quad a^{x\cdot y}=(a^x)^y=(a^y)^x$$

$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}, \qquad \text{DE } (a\pm b)^x\neq a^x\pm b^x$$

$$\sqrt[x]{a}=a^{\frac{1}{x}}, \quad \sqrt[x]{a^y}=a^{\frac{1}{x}\cdot y}=a^{\frac{y}{x}}=\left(\sqrt[x]{a}\right)^y, \quad \sqrt[x]{\sqrt[y]{a}}=\left(a^{\frac{1}{y}}\right)^{\frac{1}{x}}=a^{\frac{1}{xy}}=\sqrt[xy]{a}$$

$$\sqrt[x]{a\cdot b}=\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[x]{b}, \quad \sqrt[x]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[x]{a}}{\sqrt[x]{b}}, \qquad \text{DE } \sqrt[x]{a\pm b}\neq\sqrt[x]{a}\pm\sqrt[x]{b}$$

$$a\cdot b^x=\left(\sqrt[x]{a}\cdot b\right)^x, \quad a\cdot\sqrt[x]{b}=\sqrt[x]{a^x\cdot b}, \quad \frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\sqrt{b}}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a\sqrt{b}}{b}$$

Így például: $\sqrt[x]{a}\cdot\sqrt[y]{a}=a^{\frac{1}{x}}\cdot a^{\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{\frac{x+y}{xy}}=\sqrt[xy]{a^{x+y}}$

Nevezetes azonosságok

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3, \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Másodfokú egyenlet megoldóképlete

Az $ax^2 + bx + c = 0$ egyenlet megoldásait (vagy gyökeit) a valós számok halmazában az

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

képlet adja. Az egyenlet *diszkriminánsa* a $D = b^2 - 4ac$ (gyökjel alatti) kifejezés. Ha a $D > 0$, akkor az egyenletnek két különböző megoldása (valós gyöke) van; ha $D = 0$, akkor egyetlen (valós) gyöke van (ún. kétszeres gyök); míg ha $D < 0$, akkor az egyenletnek nincs megoldása a valós számok halmazán.
A fenti másodfokú polinom szorzattá alakítása a gyökei segítségével:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Logaritmus

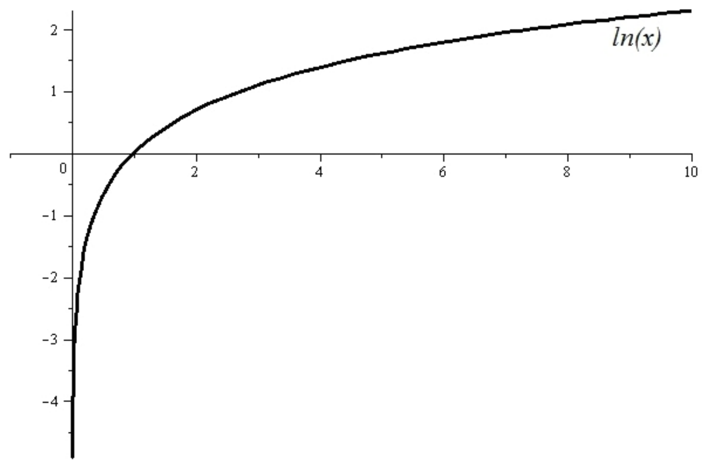
Az $\log_a b = c$, ha $a^c = b$. Ebből következik, hogy $\log_a 1 = 0$ és $\log_a a = 1$.
(A logaritmusfüggvény esetén $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ és $b \in \mathbb{R}_+$.)

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy, \quad \log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}, \quad y \log_a x = \log_a x^y$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$\log_a x$ logaritmusfüggvény inverze a^x exponenciális függvény: $\log_a a^x = x, \quad a^{\log_a x} = x$

Speciális logaritmusok: $\log_{10} a = \lg a$ és $\log_e a = \ln a$ $(e \approx 2,71)$



Trigonometrikus összefüggések

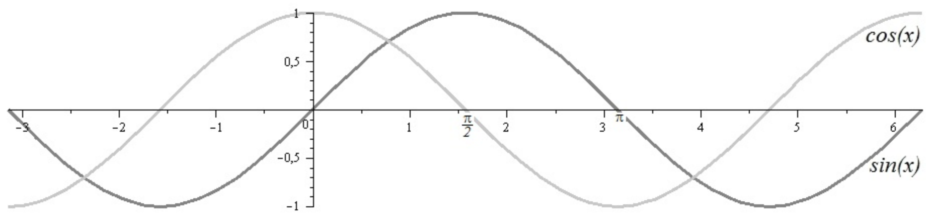
Szögfüggvények hegyesszögekre

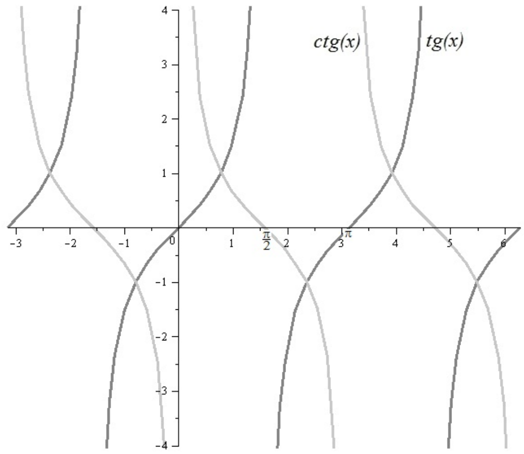
Tekintsünk egy olyan derékszögű háromszöget, amelynek x az egyik hegyesszöge.

$$\sin x = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{átfogó}}, \quad \cos x = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{átfogó}}$$

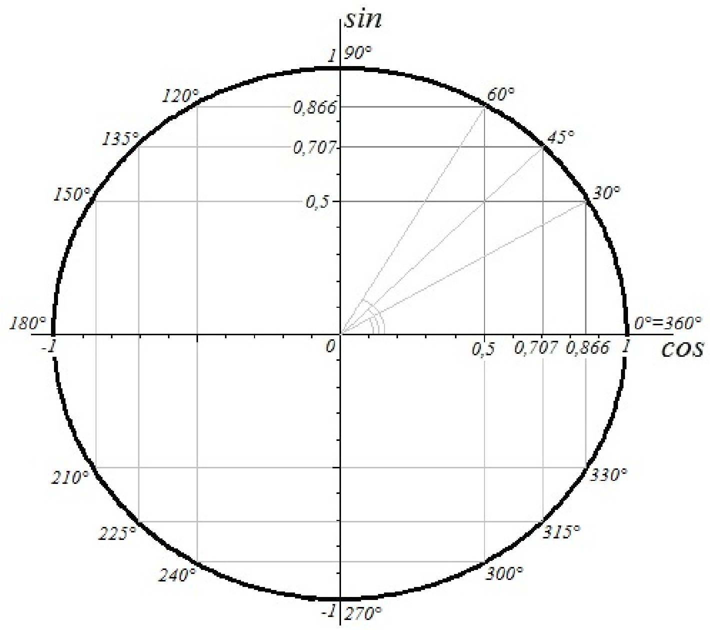
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\text{szöggel szemközti befogó}}{\text{szög melletti befogó}}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\text{szög melletti befogó}}{\text{szöggel szemközti befogó}}$$

Szögfüggvények általános esetben és nevezetes szögek szögfüggvényei





A lenti egységkör esetén tekintsük azokat a vektorokat, amelyeknek kezdőpontja az origó, végpontja a kör valamely pontja. Legyen φ („fí") a vektornak az x-tengellyel bezárt szöge. Ekkor a vektor végpontjának x koordinátája a $\cos\varphi$, y koordinátája a $\sin\varphi$ értékét adja.



Néhány példa:

$$
\begin{array}{ccc}
\sin 0^\circ = 0 \ (\sin 0 = 0) & \sin 30^\circ = 0,5 \left(\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\right) & \sin 45^\circ \approx 0,707 \left(\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\sin 60^\circ \approx 0,866 \left(\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \sin 90^\circ = 1 \left(\sin \frac{\pi}{2} = 1\right) & \sin 180^\circ = 0 \, (\sin \pi = 0) \\
\sin 270^\circ = -1 \left(\sin \frac{3\pi}{2} = -1\right) & \sin 360^\circ = 0 \, (\sin 2\pi = 0) & \\
\cos 0^\circ = 1 \ (\cos 0 = 1) & \cos 30^\circ \approx 0,866 \left(\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \cos 45^\circ \approx 0,707 \left(\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
\cos 60^\circ = 0,5 \left(\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\right) & \cos 90^\circ = 0 \left(\cos \frac{\pi}{2} = 0\right) & \cos 180^\circ = -1 \, (\cos \pi = -1) \\
\cos 270^\circ = 0 \left(\cos \frac{3\pi}{2} = 0\right) & \cos 360^\circ = 1 \, (\cos 2\pi = 1) &
\end{array}
$$

Összefüggések a szögfüggvények között és addíciós képletek:
A szinusz- és a koszinusz függvény periódusa 2π, míg a tangens- és a kotangens-függvény periódusa π.

$$
\begin{gathered}
\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos(x) \\
\sin(90^\circ - x) = \cos x, \quad \sin(180^\circ - x) = \sin x \\
\cos(90^\circ - x) = \sin x, \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x
\end{gathered}
$$

Jelölésbeli egyszerűsítések: $(\cos x)^2 = \cos^2 x$, de $\cos(x^2) = \cos x^2$.

5.2. Halmazelméleti alapok

Egy A és egy B halmaz uniója/metszete/különbsége az alábbi halmaz:

$$
\begin{gathered}
A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\} \\
A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B\} \\
A \setminus B := \{x \mid x \in A, \text{ de } x \notin B\}
\end{gathered}
$$

Az A halmaz részhalmaza a B-nek, ha az A-nak minden eleme B-nek is eleme: $A \subset B$.

A matematikában az „és” szócskát a $\wedge$, a „vagy”-ot a $\vee$, illetve a „nem” szót a $\neg$ szimbólum jelöli. Megemlítjük még az úgynevezett univerzális kvantort $\forall$ =„minden/összes” és az egzisztenciális kvantort $\exists$ =„létezik/van olyan”.

5.3. A teljes indukcióról röviden

Tekintsük a természetes számok $\mathbb{N}$ halmazát. Könnyed megfogalmazással a teljes indukció mint bizonyítási módszer a következő:

Legyen **A** egy állítás.
1. Ha **A** igaz $n = 1$-re, és
2a. feltesszük, hogy **A** teljesül $n = k$-ra,
2b. amelyből belátjuk, hogy **A** igaz $n = k + 1$-re is,
akkor az **A** állítás minden n természetes számra igaz.

(A 2a. lépést indukciós feltevésnek nevezzük.)

Példa: Igazoljuk, hogy $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$!

Megoldás: A feladat tehát az első n természetes szám összegének meghatározása zárt alakban.

1. lépés: $n=1$ esetén $1=\dfrac{1(1+1)}{2}=\dfrac{2}{2}=1$. Így $n=1$-re az állítás igaz.

2. lépés: Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n=k$-ra, azaz felhasználhatjuk a $1+2+3+\ldots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$ képletet.
Ekkor $n=k+1$-re:

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=$$
$$=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

A $1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ éppen az $n=k+1$-re vonatkozó összefüggés. Ez azt jelenti, hogy az állítás $n=k+1$-re is igaz.
Így az állítás minden $n\in\mathbb{N}$-re teljesül.

Hasonlóan láthatóak be a következő fontos összefüggések is:

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$
$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$
$$(1+2+3+\ldots+n)^2=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$
$$1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

6. fejezet

Ajánlott irodalom

1. A teljes anyaghoz kapcsolódó munkák:
   - Obádovics J. Gyula: Matematika
   - Obádovics J. Gyula - Szarka Zoltán: Felsőbb matematika
   - Obádovics J. Gyula: Felsőbb matematika feladatgyűjtemény
   - Scharnitzky Viktor: Matematika feladatok (Matematika a műszaki főiskolák számára sorozat része)
   - George Brinton Thomas, Maurice D. Weir, Joel Hass, Frank R. Giordano: Thomas-féle kalkulus I-II-III.
2. Analízis
   - Urbán János: Határérték-számítás
   - Bárczy Barnabás: Differenciálszámítás
   - Bárczy Barnabás: Integrálszámítás
   - Csernyák László: Analízis
   - Denkinger Géza - Gyurkó Lajos: Analízis gyakorlatok
   - Kovács József - Takács Gábor - Takács Miklós: Analízis
   - Németh József: Integrálszámítás példatár
   - Szabó Tamás: Kalkulus I. példatár
   - Szabó Tamás: Kalkulus II. példatár informatikusoknak
   - Szentelekiné Páles Ilona: Analízis feladatgyűjtemény
   - Lajkó Károly: Kalkulus I. példatár (internetes jegyzet)
   - Lajkó Károly: Kalkulus II. példatár (internetes jegyzet)
3. Lineáris algebra
   - Kovács Zoltán: Feladatgyűjtemény lineáris algebra gyakorlatokhoz
   - Obádovics J. Gyula: Lineáris algebra példákkal
   - Scharnitzky Viktor: Mátrixszámítás

4. Többváltozós függvények analízise, vektoranalízis
   - Gáspár Gyula: Műszaki matematika III. kötet
   - Fekete Zoltán - Zalay Miklós: Többváltozós függvények analízise
5. A valószínűségszámítás alapjai
   - Solt György: Valószínűségszámítás
   - Csernyák László: Valószínűségszámítás
   - Denkinger Géza: Valószínűségszámítási gyakorlatok
   - Nagy Márta, Sztrik János, Tar László: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika feladatgyűjtemény
   - Nagy-György Judit, Oszténdet Krauczi Éva, Székely László: Valószínűségszámítás és statisztika példatár
   - Székelyhidi László: Valószínűségszámítás és matematikai statisztika