A háromszögek Spieker-pontjának néhány érdekes tulajdonsága

Pék Johanna és Szilasi Zoltán

0. Bevezetés

A háromszögekkel kapcsolatban számos nevezetes pont és rengeteg izgalmas tulajdonság ismeretes; gondoljunk csak a háromszögek Euler-egyenesére vagy a Feuerbach-körére, melyeknek igen szép leírása található meg Hajós György tankönyvében [4]. Szintén fontosak a háromszögek oldalait érintő körök tulajdonságai, többek között ezekkel kapcsolatban igen ösztönző összefoglalót nyújt Kiss György KÖMAL cikke [6]. Dolgozatunk első részében a háromszögek két kevésbé közismert nevezetes pontjával, a Nagel- és a Spieker-ponttal kapcsolatban tárgyalunk néhány érdekes tulajdonságot. Ezt követően leírjuk a háromszögek hozzáírt köreinek és a Spieker-pontjának kapcsolatát, felhasználva a körgeometria néhány fontos eszközét (pont körre vonatkozó hatványa, inverzió). Alkalmazásként elemi bizonyítást adunk a háromszögek hozzáírt köreit érintő körök néhány meglepő, a Spieker-ponthoz is köthető tulajdonságára.

Dolgozatunkban a háromszögekkel kapcsolatban a szokásos jelöléseket alkalmazzuk. Ha ABC egy háromszög, akkor a, b, c rendre az A, B és C csúccsal szemközti oldal *hossza*, $s := \frac{1}{2}(a+b+c)$ a háromszög félkerülete. A szakaszokat felülvonással, a hosszukat felülvonás nélkül jelöljük, tehát $a = BC$, és így tovább. $\overleftrightarrow{AB}$ az $A \neq B$ pontokra illeszkedő egyenest, $\overrightarrow{AB}$ az A kezdőpontú, B-t tartalmazó félegyenest jelöli.

1. A háromszögek Nagel-pontja és Spieker-pontja

1. Tétel és definíció. *Tetszőleges háromszög hozzáírt köreinek érintési pontját a szemközti csúccsal összekötő szakaszok egy ponton mennek át. Ezt a pontot a háromszög* Nagel-pont*jának nevezzük.*

A *bizonyítás* során felhasználjuk *Ceva tétel*ét. Ez igen gyakran alkalmazható olyan esetekben, amikor azt akarjuk megmutatni, hogy egy háromszög oldalegyeneseinek egy-egy pontját a szemköztes csúccsal összekötő bizonyos szakaszok, az ún. *Ceva-féle szakasz*ok, egy ponton mennek át. Az eredmény a következő:

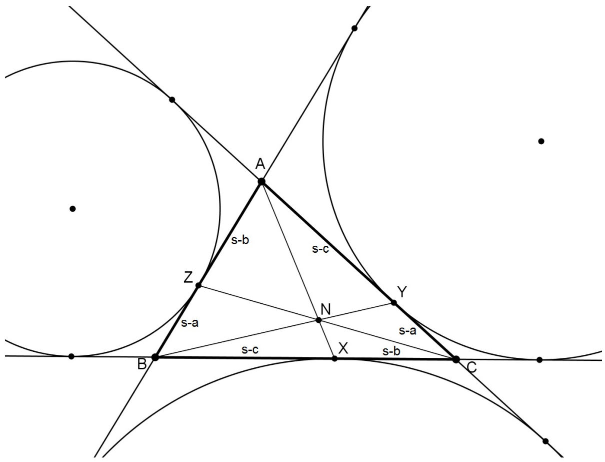
Legyenek X, Y és Z rendre az ABC háromszög $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ oldalegyeneseire illeszkedő pontok. Az $\overleftrightarrow{AX}$, $\overleftrightarrow{BY}$, $\overleftrightarrow{CZ}$ egyenesek pontosan akkor illeszkednek egy pontra, ha

$$\frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \frac{AZ}{ZB} = 1.$$

Ebben az állításban a $\frac{KL}{MN}$ alakú szimbólumok a $\overline{KL}$ és $\overline{MN}$ szakaszok hosszainak *előjeles* hányadosát jelentik, azaz abszolút értékük megegyezik a szakaszok hosszainak hányadosával, és értékük akkor negatív, ha a szakaszok ellentétes irányításúak. A bizonyítás megtalálható [2]-ben.

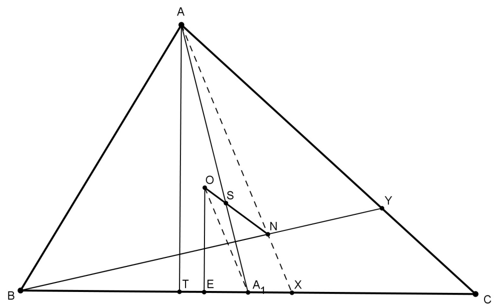
Ennek alapján a Nagel-pont létezésének igazolásához elegendő ellenőrizni a Ceva-tételben szereplő összefüggés teljesülését. Ismeretes (lásd [4]), hogy az ABC háromszög $\overline{BC}$ oldalát érintő hozzáírt kör érintési pontja $s-c$ és $s-b$ hosszúságú szakaszokra bontja az oldalt. Így a kérdéses szakaszok hosszainak hányadosa valóban

$$\frac{s-c}{s-b} \cdot \frac{s-a}{s-c} \cdot \frac{s-b}{s-a} = 1.$$



2. Tétel. *Tetszőleges háromszög súlypontja, beírt körének középpontja és Nagel-pontja egy egyenesre illeszkedik, és a súlypont a másik két pont által meghatározott szakasznak (az ún.* Nagel-szakasz*nak) a Nagel-ponttól távolabbi harmadolópontja.*

Bizonyítás: Jelölje az ABC háromszög súlypontját S, a beírt kör középpontját O, Nagel-pontját N. A $\overline{BC}$ oldal felezőpontja legyen A_1, ezen az oldalon a magasság talppontja T, a beírt kör érintési pontja E, az oldalhoz írt kör érintési pontja X.



Elsőként azt mutatjuk meg, hogy az ATX és az OEA_1 derékszögű háromszögek hasonlóak. Ehhez elegendő azt belátnunk, hogy $\frac{AT}{OE} = \frac{TX}{EA_1}$.

Mivel az $\overline{OE}$ szakasz a beírt kör sugara, a hossza $\frac{t}{s}$, ahol t az ABC háromszög területe. Az $\overline{AT}$ magasság hossza ismert módon $\frac{2t}{a}$. Így $\frac{AT}{OE} = \frac{2s}{a}$.

Az $\overline{EC}$ szakasz hossza $s-c$, ezért az $\overline{EA_1}$ szakasz $s-c-\dfrac{a}{2} = \dfrac{b-c}{2}$ hosszúságú. A $\overline{BX}$ szakasz hossza $s-c$. A $\overline{TX}$ szakasz hossza a $\overline{BX}$ és $\overline{BT}$ szakaszok hosszának különbsége. A $\overline{BT}$ szakasz hosszának meghatározásához az ABT majd ACT derékszögű háromszögekre felírjuk a Pitagorasz-tételt, és rendezés után azt kapjuk, hogy $BT = \dfrac{a^2-b^2+c^2}{2a}$. Ezek után némi számolással a $\overline{TX}$ szakasz $\dfrac{s(b-c)}{a}$ hosszúságúnak adódik. Tehát $\dfrac{TX}{EA_1} = \dfrac{2s}{a}$ valóban teljesül.

Az eddigiek alapján az ATX és OEA_1 háromszögek hasonlóak, így az $\overline{OA_1}$ és az $\overline{AX}$ szakasz párhuzamos.

Megmutatjuk, hogy $\dfrac{AX}{AN} = \dfrac{s}{a}$. Ennek igazolásához felhasználjuk, hogy a háromszögek trigonometrikus területképletéből adódóan

$$\frac{AN}{XN} = \frac{c \cdot \sin(ABY\sphericalangle)}{(s-c)\cdot \sin(YBC\sphericalangle)},$$

ahol Y a $\overleftrightarrow{BN}$ egyenes és az $\overline{AC}$ oldal közös pontja (azaz az $\overline{AC}$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja). Itt $\dfrac{\sin(ABY\sphericalangle)}{\sin(YBC\sphericalangle)}$ ismét a trigonometrikus területképlet alkalmazásával határozható meg, ugyanis az ABY és YBC háromszögek területének aránya $\dfrac{s-c}{s-a}$ (mivel a két háromszög azonos magasságú). Ezért

$$\frac{c \cdot BY \cdot \sin(ABY\sphericalangle)}{BY \cdot a \cdot \sin(YBC\sphericalangle)} = \frac{s-c}{s-a},$$

tehát

$$\frac{\sin(ABY\sphericalangle)}{\sin(YBC\sphericalangle)} = \frac{a(s-c)}{c(s-a)}.$$

Így $\dfrac{AN}{XN} = \dfrac{a}{s-a}$, amiből

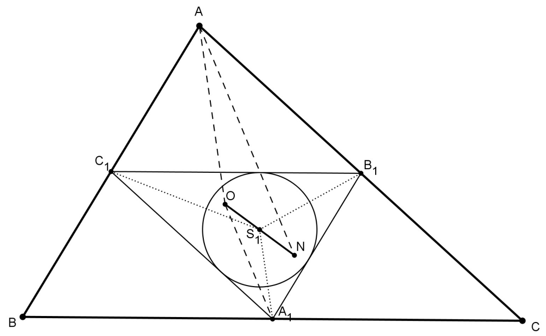
$$\frac{AX}{AN} = \frac{NX+AN}{AN} = \frac{NX}{NA} + 1 = \frac{s-a}{a} + 1 = \frac{s}{a}$$

adódik.

Korábban már beláttuk, hogy az ATX és OEA_1 háromszögek hasonlóak, és a hasonlóságuk aránya $\dfrac{2s}{a}$, $\dfrac{AX}{OA_1} = \dfrac{2s}{a}$. Tudjuk azt is, hogy $\dfrac{AX}{AN} = \dfrac{s}{a}$, és ebből a két észrevételből következik, hogy $\dfrac{AN}{OA_1} = \dfrac{2}{1}$. Mivel a súlypont tulajdonságai miatt $\dfrac{AS}{SA_1} = \dfrac{2}{1}$, adódik, hogy az ASN és A_1SO háromszögek hasonlóak. Ezt felhasználva látható, hogy O, S és N valóban egy egyenesre illeszkednek. Mivel S az $\overline{AA_1}$ szakasz A_1-hez közelebbi harmadolópontja, adódik, hogy a hasonlóság aránya $\frac{1}{2}$, S tehát csakugyan az O-hoz közelebbi harmadolópont. ■

Érdemes megfigyelni az analógiát a háromszögek Euler-egyenesével, amelyre a háromszög magasságpontja, súlypontja és a köré írható kör középpontja illeszkedik úgy, hogy a súlypont a magasságponttól távolabbi harmadolópont.

3. Definíció. *Egy háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög beírt körét a háromszög* Spieker-kör*ének, ennek középpontját a háromszög* Spieker-pont*jának hívjuk.*

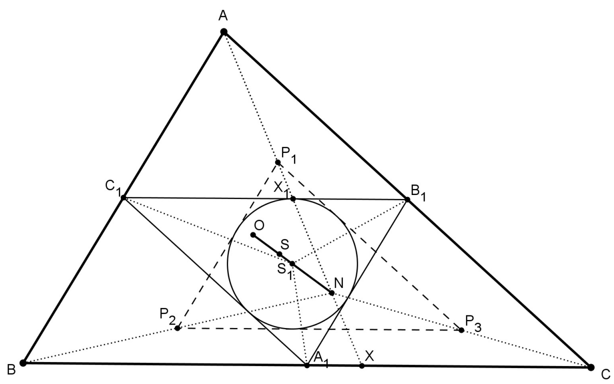


4. Állítás. *Tetszőleges háromszög Spieker-pontja a Nagel-szakasz felezőpontja.*

Bizonyítás: Az előző tétel jelöléseit megtartva, legyen S_1 az $\overline{ON}$ szakasz felezőpontja. Ekkor $\overline{S_1A_1}$ és $\overline{AO}$ párhuzamosak, ugyanis az előző bizonyításból kiolvashatóan az OS_1A_1 és NOA háromszögek hasonlóak. Azonban az $\overleftrightarrow{AO}$ egyenes az ABC háromszög A csúcshoz tartozó szögfelezője, így az $\overleftrightarrow{A_1S_1}$ egyenes az ABC háromszög oldalfelező pontjai által alkotott háromszög szögfelezője. Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy S_1 az oldalfelező pontok által alkotott háromszög további szögfelezőire is illeszkedik, ezért S_1 valóban a Spieker-pont. ∎

Miként az Euler-egyenes esetén a magasságpont és a körülírt kör középpontja által meghatározott szakasz felezőpontja nevezetes pont - a Feuerbach-kör középpontja -, láthatjuk, hogy a Nagel-szakasz felezőpontja is nevezetes pont: a Spieker-pont. Ez az analógia igen figyelemre méltó, ugyanis a Spieker-kör tulajdonságai számos hasonlóságot mutatnak a Feuerbach-kör tulajdonságaival.

Legyen az ABC háromszög Nagel-pontja N; az $\overline{AN}$, $\overline{BN}$, $\overline{CN}$ szakaszok felezőpontjai rendre P_1, P_2, P_3. Ekkor a $P_1P_2P_3$ háromszög egybevágó az ABC háromszög felezőpontjai által meghatározott $A_1B_1C_1$ háromszöggel, ugyanis az ABC háromszögből $P_1P_2P_3\triangle$ N középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú nyújtással, míg $A_1B_1C_1\triangle$ a súlypontból történő, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos nyújtással nyerhető. Középpontos nyújtásnál egy háromszög beírt körének a képe a háromszög képének beírt köre. A súlypontból történő, $-\frac{1}{2}$ arányú középpontos nyújtás a beírt kör O középpontját a Spieker-pontba viszi át; csakúgy mint a Nagelpontból történő, $\frac{1}{2}$ arányú középpontos nyújtás. Ez azt jelenti, hogy az $A_1B_1C_1$ és $P_1P_2P_3$ háromszögek beírt körének egyaránt a Spieker-pont a középpontja; így *a $P_1P_2P_3$ háromszög beírt köre szintén a Spieker-kör.*



Jelölje az $\overleftrightarrow{AN}$ egyenes $\overleftrightarrow{BC}$ oldalegyenessel közös pontját X, a $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ középvonallal közös pontját X_1. Ekkor $\dfrac{BX}{XC} = \dfrac{s-c}{s-b}$. Mivel az AC_1B_1 háromszög az ABC háromszögből A középpontú, $\frac{1}{2}$ arányú nyújtással kapható, így $\dfrac{C_1X_1}{X_1B_1} = \dfrac{s-c}{s-b}$ is fennáll. Azonban az $A_1B_1C_1$ háromszög beírt körének - azaz a Spieker-körnek - a $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ oldalegyenesre illeszkedő érintési pontja éppen ilyen arányban osztja ezt az oldalt, így X_1 illeszkedik a Spieker-körre. Ezzel beláttuk, hogy *a Spieker-kör és az $A_1B_1C_1$ háromszög oldalainak érintési pontjai illeszkednek a Nagel-pontot a megfelelő csúcsokkal összekötő egyenesekre.*

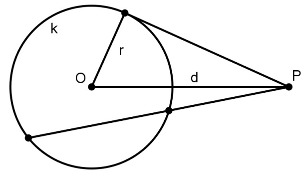
Az elmondottak alapján a Spieker-kör valóban szép analógiát mutat a Feuerbach-körrel: míg a Feuerbach-kör a körülírt körből, a Spieker-kör a beírt körből kapható a súlypontból történő $\frac{1}{2}$ arányú középpontos nyújtással. A Feuerbach-kör az oldalfelező pontok alkotta háromszög, illetve a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai által alkotott háromszögnek körülírt köre; a Spieker-kör pedig az oldalfelezőpontok által alkotott háromszög, illetve a Nagel-pontot a csúcsokkal összekötő szakaszok felezőpontjai által alkotott háromszög beírt köre. Érdemes mindezt összevetni az Euler-egyenes és a Nagel-szakasz analógiájáról leírtakkal.

2. A háromszögek hozzáírt köreinek és Spieker-pontjának kapcsolata

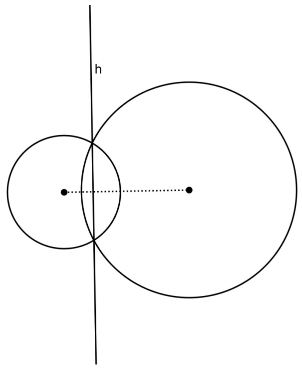
Felidézzük először is, hogy mit értünk egy pont körre vonatkozó hatványán, két kör hatványvonalán és három kör hatványpontján. A következő állítások mindegyikének bizonyítása megtalálható [4]-ben, vagy elemi geometriai úton [7]-ben.

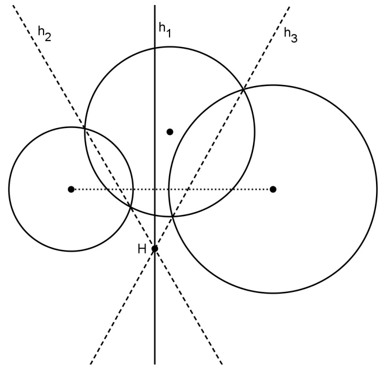
Legyen k a sík egy köre, P a sík egy tetszőleges pontja. Jelölje r a k kör sugarát, d a kör középpontjának P-től való távolságát. A $d^2 - r^2$ számot a *P pont k körre vonatkozó hatványá*nak hívjuk. A P pont k körre vonatkozó hatványa megadja a kör tetszőleges P-re illeszkedő szelője esetén a P-ből a körhöz húzható szelőszakaszok hosszainak előjeles szorzatát, amely így független a szelő megválasztásától. Ez az előjeles szorzat külső P pont esetén pozitív, belső

P pont esetén negatív. A pont körre vonatkozó hatványa pontosan akkor 0, ha a pont illeszkedik a tekintett körre. Ha P külső pont, akkor a k körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzható (bármelyik) érintő hossznégyzete.



Megmutatható, hogy ha két kör nem koncentrikus, akkor azon pontok mértani helye, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, egyenes. Ezt az egyenest a két kör *hatványvonal*ának hívjuk. Tetszőleges két kör esetén a hatványvonal merőleges a körök középpontjainak egyenesére (a körök *centrális*ára), és ha a két kör metsző, akkor a hatványvonal éppen a metszéspontok egyenese. Az előzőekből látható, hogy két kör hatványvonalának tetszőleges pontjából a két körhöz ugyanolyan hosszú érintő húzható. Ha három kör között nincs két koncentrikus, akkor páronként vett hatványvonalaik egy pontra illeszkednek, ezt a pontot a három kör *hatványpont*jának nevezzük.

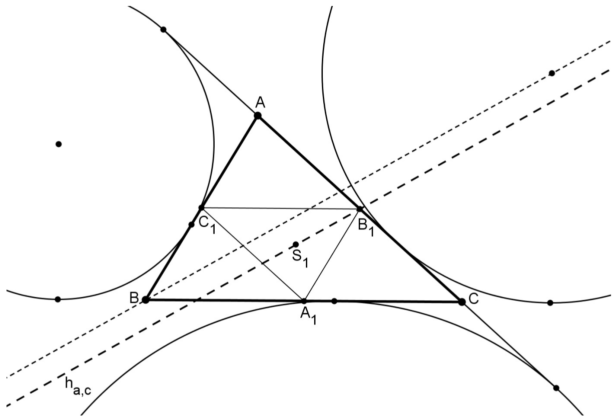




5. Tétel. *Tetszőleges háromszög hozzáírt köreinek hatványpontja a háromszög Spieker-pontja.*

Bizonyítás: Elsőként megmutatjuk, hogy egy ABC háromszög $\overline{BC}$ és $\overline{AB}$ oldalaihoz írt körök hatványvonala illeszkedik az $\overline{AC}$ oldal B_1 felezőpontjára. Valóban, felhasználva, hogy a $\overline{BC}$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja az $\overline{AC}$ oldal egyenesén a C csúcstól $s-b$ távolságra van, és az $\overline{AB}$ oldalhoz hozzáírt kör érintési pontja az $\overline{AC}$ oldal egyenesén az A csúcstól szintén $s-b$ távolságra van, az $\overline{AC}$ oldal felezőpontjából mindkét tekintett hozzáírt körhöz $\frac{b}{2}+(s-b) = s-\frac{b}{2}$ hosszúságú érintő húzható.

A következő lépésben igazoljuk, hogy a $\overline{BC}$ és $\overline{AB}$ oldalakhoz írt körök hatványvonala az $A_1B_1C_1$ háromszögnek a B_1-re illeszkedő szögfelezője. A korábban említettek értelmében két kör hatványvonala merőleges a körök centrálisára, esetünkben ez a centrális a háromszög B csúcsára illeszkedő külső szögfelező, amely merőleges a B csúcson átmenő belső szögfelezőre. A felezőpontok alkotta háromszög oldalai azonban párhuzamosak az eredeti



háromszög oldalaival, így annak szögfelezői párhuzamosak az eredeti háromszög szögfelezőivel. Ezért az $A_1B_1C_1$ háromszög egy-egy szögfelezője is merőleges a megfelelő külső szögfelezőre, tehát a szóban forgó hatványvonal éppen a szögfelező egyenes.

Mivel a szögfelezők metszéspontja definíció szerint a Spieker-pont, és az eddigiek értelmében a szögfelezők a hatványvonalak, a hozzáírt körök hatványpontja valóban a háromszög Spieker-pontja. ∎

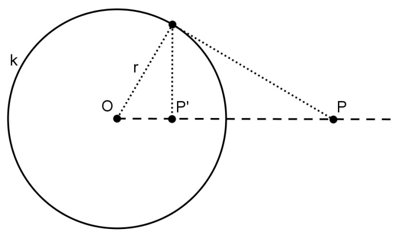
3. A háromszögek hozzáírt köreit érintő körök

A nevezetes Apollóniusz-feladatok három adott kör, egyenes vagy pont mindegyikét érintő körök megszerkesztését tűzik ki. A különböző megoldási módszerekkel kapcsolatban a [7] munkát ajánljuk. Általában, három kört érintő körök száma legfeljebb nyolc.

A következőkben egy háromszög hozzáírt köreit érintő köröket vizsgálunk. Ismert, hogy a háromszög Feuerbach-köre (kívülről) érinti a hozzáírt köröket; e tétel egy igen szép bizonyítása megtalálható [3]-ban. Egy háromszög hozzáírt köreit tekintve olyan körök nem léteznek, amelyek pontosan egyet érintenek kívülről és kettőt belülről, ezek ugyanis az „oldalegyenesekké fajulnak". Így a Feuerbach-kör és az oldalegyenesek mellett van négy további kör. Ezek közül egy kör mindhárom hozzáírt kört belülről érinti. Dolgozatunk záró fejezetében azokkal a körökkel foglalkozunk, amelyek két hozzáírt kört kívülről, egyet belülről érintenek. Célunk annak megmutatása, hogy a három ilyen tulajdonságú kör egy közös pontra, mégpedig a háromszög Spieker-pontjára illeszkedik.

Meggondolásainkban egy igen hasznos geometriai transzformáció, az *inverzió* kerül alkalmazásra. Ennek alapvető tulajdonságait csupán felsoroljuk, a bizonyításokat illetően [9]-re, [4]-re vagy ismét [7]-re utalunk.

Rögzítve a síkon egy O középpontú, r sugarú k kört, O pólusú, k alapkörrel rendelkező *inverzió*nak mondjuk azt a leképezést, amely a sík tetszőleges O-tól különböző P pontjához az $\overrightarrow{OP}$ félegyenes azon P' pontját rendeli, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$ teljesül. Az ábra egy tetszőleges (a k körön kívüli) P pont képének szerkesztését illusztrálja.



Tulajdonságok:

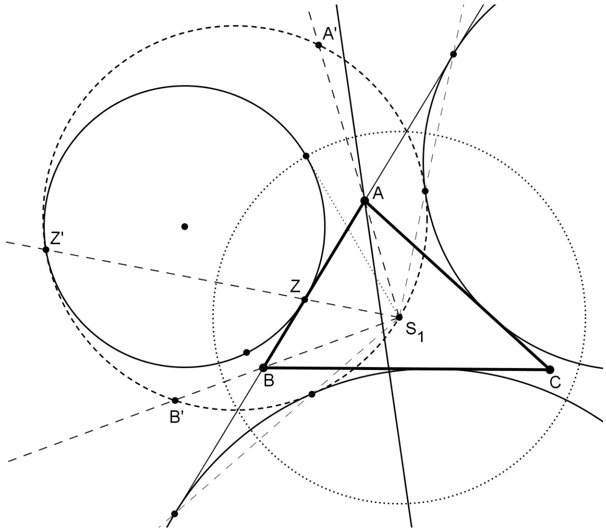
- Az inverzió fixpontjai az alapkör pontjai és csakis ezek.
- Az inverzió pólusára illeszkedő egyenesek invariánsak (azaz egy ilyen tulajdonságú egyenes tetszőleges pontjának képe is illeszkedik az egyenesre).
- Az inverzió pólusára nem illeszkedő egyenes képe a pólusra illeszkedő kör. A képkör pólust tartalmazó átmérője merőleges az eredeti egyenesre.
- Az inverzió pólusára illeszkedő kör képe olyan, a pólusra nem illeszkedő egyenes, amely merőleges az eredeti kör pólust tartalmazó átmérőjére.
- Az inverzió pólusára nem illeszkedő kör képe a pólusra nem illeszkedő kör.
- Az inverzió invariáns körei pontosan az alapkört merőlegesen metsző körök. (Megjegyezzük, hogy két kört akkor nevezünk *merőlegesen metsző*nek, ha közös pontjaikban az érintőik merőlegesek.)
- Az inverzió illeszkedéstartó.
- Az inverzió szögtartó.

6. Állítás. *Bármely háromszöghöz létezik olyan inverzió, amelynek invariáns körei a háromszög hozzáírt körei. Ennek az inverziónak a pólusa a háromszög Spieker-pontja.*

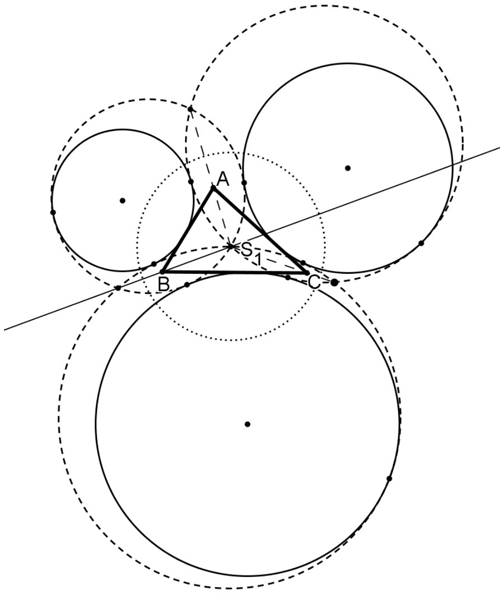
Bizonyítás: A korábban mondottak értelmében a három (hozzáírt) kör hatványpontja a háromszög Spieker-pontja, ezért a Spieker-pontból mindhárom körhöz ugyanolyan hosszúságú érintő húzható. Tekintsük azt a kört, amelynek középpontja a Spieker-pont és sugara az előbb említett érintőszakasz hossza. Ez a kör mindhárom hozzáírt kört merőlegesen metszi (hiszen e kör sugara az érintőszakaszok közös hosszúsága). Az inverzió tulajdonságai miatt az erre a körre vonatkozó inverziónál mindhárom hozzáírt kör invariáns. ■

7. Tétel. *Tekintsük azokat a köröket, amelyek egy háromszög hozzáírt körei közül kettőt kívülről, egyet belülről érintenek. E három kör egy ponton megy át, mégpedig a háromszög Spieker-pontján.*

Bizonyítás: Megadható olyan inverzió, amelynek pólusa a háromszög Spieker-pontja, és a három hozzáírt kör mindegyike invariáns köre (az ábrán az inverzió alapkörét pontozott vonallal jelöltük).



Ennél az inverziónál például az $\overleftrightarrow{AB}$ oldalegyenes képe az S_1 Spieker-ponton átmenő kör. Az inverzió illeszkedéstartó, ezért ha az $\overleftrightarrow{AB}$ oldalegyenes érinti mindhárom hozzáírt kört, akkor a képköre is érinti ezeket a köröket. Azt is tudjuk, hogy a hozzáírt körök invariáns körei az inverziónak, ezért például a Z pont Z' képének illeszkednie kell az $\overleftrightarrow{AB}$ oldalhoz írt körre; ezt a képpontot a $\overrightarrow{S_1 Z}$ félegyenes metszi ki a körből. Az a kör, amely úgy érinti a három hozzáírt kört, hogy az egyik érintési pont a Z', csakis az $\overline{AB}$ oldalhoz írt kört belülről, a másik kettőt kívülről érintő kör lehet.
Hasonlóan látható be, hogy a fennmaradó két, analóg érintési tulajdonsággal rendelkező kör is áthalad a Spieker-ponton. ∎



8. Következmény. *Ha két kör egy háromszög hozzáírt körei közül kettőt kívülről, egyet belülről érint, akkor a hatványvonalukra illeszkedik a háromszög egy csúcsa.*

Bizonyítás: Az előző tétel miatt a két tekintett kör mindegyikére illeszkedik a Spieker-pont. A háromszög valamely csúcsa az előzőekben alkalmazott inverziónál a két kör másik metszéspontja, hiszen az oldalegyenesek képei az inverzióban az előző tételben szereplő körök. Tetszőleges pont és inverze által meghatározott egyenes illeszkedik az inverzió pólusára, így a háromszög tekintett csúcsára és a két kör metszéspontjára illeszkedő egyenes áthalad a Spiekerponton. Mivel ez az egyenes a körök két metszésponjára illeszkedik, így éppen a két kör hatványvonala, ami állításunk helyességét jelenti. ■

Hivatkozások

[1] Nathan Altshiller-Court: *College Geometry - An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Dover, 1980.

[2] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: *Az újra felfedezett geometria*, Gondolat, 1977.

[3] Füredi Zoltán: A Feuerbach kör érinti az érintő köröket, *KÖMAL* **54**, 2004.

[4] Hajós György: *Bevezetés a geometriába*, Tankönyvkiadó, 1971.

[5] Roger A. Johnson: *Advanced Euclidean Geometry*, Dover, 1960.

[6] Kiss György: Amit jó tudni a háromszögekről, *KÖMAL* **42**, 1992.

[7] Maklári József: *Körérintési szerkesztések és alkalmazásaik*, Középiskolai Szakköri Füzetek, Tankönyvkiadó, 1970.

[8] Boris Odehnal: Some Triangle Centers Associated with the Circles Tangent to the Excircles, *Forum Geometricorum* **10**, 2010, 35-40.

[9] Reiman István: *Fejezetek az elemi geometriából*, Typotex, 2005.